Розділ 1. Метричні й топологічні простори

Топологічні й, особливо, метричні простори неодноразово згадувалися і використовувалися у курсах математичного аналізу, лінійної алгебри (де розглядався один із найважливіших прикладів метричного простору — скінченновимірний евклідів простір), диференціальної геометрії (де вивчались геодезійні криві та внутрішня метрика поверхні), а також, звичайно, в курсі топології. Тому ми лише оглядово нагадаємо загальновідомі означення та факти, обговоримо прийняту в підручнику термінологію та систему позначень, а більш детально зупинимось на питаннях, які, можливо, не висвітлені в інших курсах.

1.1. Множини і відображення

При викладі функціонального аналізу вважається, що читач уже знайомий з поняттям множини і найпростішими операціями над множинами — об'єднанням і перетином скінченної або нескінченної кількості множин, різницею, доповненням, симетричною різницею, декартовим добутком множин, так само як і з поняттями відношення, функції, графіка відношення чи функції, класів еквівалентності; такими термінами, як зліченність або незліченність множини і т. д. Ми не користуватимемося в основній частині курсу технікою трансфінітних чисел і трансфінітної індукції; але читач, безумовно, виграє, ознайомившись з елементами теорії трансфінітних чисел, наприклад, за підручником Дж. Л. Келлі [Kel], де в «Додатках» подано строгий формальний виклад теорії, або за книгою І. П. Натансона [Nat], де виклад не настільки формальний, проте добре зрозумілий. Деякі тонкі питання теорії міри і функціонального аналізу вимагають володіння методом трансфінітної індукції. Ми торкатимемося цих питань лише у вправах і коментарях до них (втім, досить рідко). Множини, зазвичай, будуть позначатися великими латинськими літерами, а елементи множин — маленькими. Терміни «набір», «сім'я», «сукупність» використовуватимуться в тому ж значенні, що й термін «множина». Наведемо пояснення деяких термінів і позначень.

- $A \setminus B$ — (теоретико-множинна) різниця множин A і B: $A \setminus B$ складається з усіх елементів, що належать до A, але не належать до B.
- $A \triangle B$ — симетрична різниця множин A і B: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Інше, еквівалентне означення: $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Наведений учбовий текст є витягом з підручнику Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія "Університетська бібліотека") ISBN 978-966-2645-03-3

Усі посилання на теореми, вправи, означення, такі що не увійшли до цього тексту – це посилання на підручник.

– $A\times B$ — декартів добуток множин A і B: $A\times B=\{(a,b):a\in A, b\in B\}$. Тобто декартів добуток множин A і B — це множина впорядкованих пар, де перша координата належить до A, а друга — до B.

– $\prod\limits_{k=1}^{n} A_k$ — декартів добуток множин $A_1, \ldots, A_n$: $\prod\limits_{k=1}^{n} A_k=\{(a_1,...,a_n):a_k\in A_k\}$. Формально операція декартового добутку не асоціативна. Наприклад, $(A\times B)\times C$ як елементи має пари вигляду $((a,b),c)$, а $A\times(B\times C)$ — вигляду $(a,(b,c))$. Водночас і $((a,b),c)$, і $(a,(b,c))$ природно ототожнити з трійкою (a,b,c). Якщо домовитись про таке ототожнення, то операція декартового добутку стає асоціативною, і виконується формула $\left(\prod\limits_{k=1}^{n} A_k\right)\times\left(\prod\limits_{k=n+1}^{m} A_k\right)=\prod\limits_{k=1}^{m} A_k$.

– 2^A — сукупність усіх підмножин множини A.

– $\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел (інша назва — дійсна вісь).

– $\mathbb{Q}$ — множина всіх раціональних дійсних чисел.

– $\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих дійсних чисел.

– $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел.

– $\mathbb{C}$ — множина всіх комплексних чисел.

– $\mathbb{R}^n$ — n-вимірний координатний простір: декартів добуток n примірників дійсної осі.

– $\mathbb{R}^+=\{t\in\mathbb{R}:t\geqslant 0\}$.

У вправах, наведених нижче, зібрані деякі співвідношення між множинами, які ми застосовуватимемо далі в тих чи інших міркуваннях. Зазвичай подібні співвідношення будуть використовуватися без доведення: перевірка їх має технічний характер і вимагає лише незначних навичок маніпулювання з логічними виразами і перебору випадків.

Вправи

1. Нехай $A=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $B=\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Тоді $A\cap B=\bigcup_{k,j=1}^{\infty}(A_k\cap B_j)$.

2. Нехай $A,B\subset\Omega$. Тоді $(\Omega\backslash A)\triangle(\Omega\backslash B)=A\triangle B$.

3. Для будь-яких множин A_1,A_2,A_3 виконується включення $A_1\triangle A_3\subset(A_1\triangle A_2)\cup(A_2\triangle A_3)$.

4. Нехай $\{A_n\}_{n\in M}$, $\{B_n\}_{n\in M}$ — два набори множин. Тоді $\left(\bigcap\limits_{n\in M} A_n\right)\triangle\left(\bigcap\limits_{n\in M} B_n\right)\subset\bigcup\limits_{n\in M}(A_n\triangle B_n)$ і $\left(\bigcup\limits_{n\in M} A_n\right)\triangle\left(\bigcup\limits_{n\in M} B_n\right)\subset\bigcup\limits_{n\in M}(A_n\triangle B_n)$.

5. Для довільного відображення $f\colon X\to Y$ і довільних підмножин $A,B\subset X$ виконуються співвідношення: а) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$; б) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

6. Наведіть приклад, коли $f(A\cap B)\neq f(A)\cap f(B)$.

7. Відображення $f\colon X\to Y$ буде ін'єктивним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких підмножин $A,B\subset X$ виконується співвідношення $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

8. Нехай $f_1\colon X\to Y_1$, $f_2\colon X\to Y_2$ і функція $f\colon X\to Y_1\times Y_2$ діє за правилом $f(x)=(f_1(x),f_2(x))$. Тоді $f^{-1}(A_1\times A_2)=f_1^{-1}(A_1)\cap f_2^{-1}(A_2)$ для будь-яких $A_1\subset Y_1$, $A_2\subset Y_2$.

9. Нехай $\{A_n\}_{n\in M}$ — деякий набір підмножин множини Ω. Тоді справджуються такі формули де Моргана:

$$\Omega\backslash\bigcap_{n\in M} A_n=\bigcup_{n\in M}(\Omega\backslash A_n) \text{ і } \Omega\backslash\bigcup_{n\in M} A_n=\bigcap_{n\in M}(\Omega\backslash A_n).$$

1.2. Топологічні простори

1.2.1. Термінологія

Сім'я τ підмножин множини X називається *топологією*, якщо вона задовольняє такі аксіоми:

1. Як порожня множина, так і сама X належать до τ.

2. Об'єднання довільного набору множин сім'ї τ знову належить до τ.

3. Перетин довільного скінченного числа множин сім'ї τ належить до τ.

Множина, наділена топологією, називається *топологічним простором*. Якщо на множині розглядається лише одна топологія, відповідний топологічний простір ми позначатимемо тією ж літерою, що й саму множину. У випадку, якщо вибір топології вимагає уточнення, для топологічного простору буде вживатися позначення вигляду (X, τ). Множини, які належать до сім'ї τ, називаються *відкритими в топології* τ (або просто *відкритими*, якщо зрозуміло, про яку топологію йде мова). Найпростіший приклад топології на довільній множині X — це дискретна топологія 2^X, де відкритими вважаються всі підмножини. Інший стандартний приклад топологічного простору — це дійсна вісь $\mathbb{R}$, де відкритими множинами вважаються скінченні або зліченні об'єднання відкритих проміжків. Нехай X — топологічний простір, $x \in X$. Підмножина $U \subset X$ називається *відкритим околом* точки x, якщо U відкрита в X і $x \in U$. Підмножина U називається *околом* точки x, якщо вона містить деякий відкритий окіл точки x. Топологічний простір X називається *відокремлюваним за Гаусдорфом*, або *гаусдорфовим*, якщо він задовольняє таку *аксіому відокремлюваності*:

4. Для будь-яких $x, y \in X$, $x \neq y$, існують околи U і V точок x і y відповідно, які не перетинаються між собою.

Далі ми розглядатимемо, як правило, відокремлювані за Гаусдорфом простори. Нехай X — топологічний простір, $x \in X$. Сім'я підмножин $\mathfrak{U}$ називається *базою околів* точки x, якщо всі елементи сім'ї $\mathfrak{U}$ — околи точки x, і для будь-якого околу U точки x існує окіл $V \in \mathfrak{U}$, який цілком міститься в U.

Топологію можна визначати локально, тобто починаючи не з усієї системи відкритих множин, а з баз відкритих околів. Нехай для кожної точки x множини X задано непорожню сім'ю підмножин $\mathfrak{U}_x$, яка має такі властивості:

– якщо $U \in \mathfrak{U}_x$, то $x \in U$;

– якщо $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}_x$, то існує таке $U_3 \in \mathfrak{U}_x$, що $U_3 \subset U_1 \cap U_2$;

– якщо $U \in \mathfrak{U}_x$ і $y \in U$, то існує таке $V \in \mathfrak{U}_y$, що $V \subset U$.

Тоді існує єдина топологія на X, для якої сім'ї $\mathfrak{U}_x$ будуть базами околів відповідних точок. Ця топологія задається у такий спосіб: точка x називається *внутрішньою точкою множини* A, якщо деякий окіл $U \in \mathfrak{U}_x$ точки x міститься в A; множина A називається *відкритою*, якщо всі її точки — внутрішні. Іншими словами, множина відкрита тоді і тільки тоді, коли разом з кожною своєю точкою вона містить і деякий окіл цієї точки. Нехай A — підмножина топологічного простору X. Множина A називається *замкненою*, якщо її доповнення $X \backslash A$ відкрите. Об'єднання скінченного числа замкнених множин замкнене, перетин будь-якого числа замкнених множин знову замкнений. *Замиканням* множини A називається множина $\bar{A}$, яка є перетином усіх замкнених множин, що містять A. $\bar{A}$ — це найменша за включенням замкнена множина, яка містить A. Точка $x \in X$ називається *граничною* для множини A, якщо кожен окіл точки x містить точку множини A, відмінну від x. Замикання множини A складається з точок самої множини A і всіх її граничних точок. Множина A називається *щільною* в множині B, якщо $\bar{A} \supset B$. Множина A називається щільною, якщо вона щільна в усьому просторі. Топологічний простір X називається *сепарабельним*, якщо в X є зліченна щільна підмножина. Нехай (x_n) — послідовність елементів топологічного простору X. Точка $x \in X$ називається *границею* послідовності x_n, якщо для будь-якого околу U точки x усі члени послідовності, починаючи з деякого, містяться в U. Точка x називається граничною для послідовності (x_n), якщо будь-який окіл U точки x містить нескінченне число членів послідовності. Функція f, діюча з топологічного простору X у топологічний простір Y, називається *неперервною*, якщо для будь-якої відкритої множини A в Y її прообраз $f^{-1}(A)$ — відкрита множина в X. Неперервність можна переформулювати мовою околів: функція неперервна, якщо для будь-якої точки $x \in X$ і будь-якого околу U точки $f(x)$ існує такий окіл V точки x, що $f(V) \subset U$. Функція $f\colon X \to Y$ називається *гомеоморфізмом*, якщо вона бієктивна, неперервна і обернена функція $f^{-1}\colon Y \to X$ неперервна. Два простори називаються гомеоморфними, якщо між ними існує гомеоморфізм. Нехай на множині X задано дві топології: τ_1 і τ_2. За означенням, топологія τ_1 *сильніша* за топологію τ_2 (або, еквівалентно, τ_2 *слабша* за τ_1), якщо кожна множина, відкрита в топології τ_2, відкрита і в топології τ_1. Іншими словами, топологія τ_1 сильніша за топологію τ_2, якщо тотожне відображення $x \mapsto x$ з топологічного простору (X, τ_1) у топологічний простір (X, τ_2) неперервне. Відношення «τ_1 сильніша за τ_2» записують $\tau_1 \succ \tau_2$.

Якщо множина замкнена, то вона замкнена і в будь-якій сильнішій топології. Відповідно, замикання довільної множини в слабшій топології містить замикання цієї множини в сильнішій топології. Гранична точка множини залишається граничною при заміні топології на слабшу. Якщо послідовність (x_n) збігається до x в топології τ_1 і $\tau_1 \succ \tau_2$, то (x_n) збігається до x і в топології τ_2.

Нехай A — підмножина топологічного простору X. Множина $B \subset A$ називається відкритою в A, якщо B можна зобразити як перетин множини A з деякою відкритою підмножиною простору X. Відкриті в A підмножини задають на A топологію, яка називається *індукованою топологією*. Підмножина топологічного простору X, наділена індукованою топологією, називається *підпростором топологічного простору* X. Наприклад, множина цілих чисел $\mathbb{Z}$, наділена дискретною топологією, — підпростір простору $\mathbb{R}$, а $\mathbb{R}$, у свою чергу, — підпростір простору всіх комплексних чисел. Індуковану топологію називають ще *обмеженням топології простору X на підмножину A.*

Вправи

1. У гаусдорфовому просторі кожна точка — це замкнена множина.

2. Нехай топологічний простір X задовольняє таку аксіому відокремлюваності: кожна точка утворює замкнену множину в X. Нехай, далі, точка $x \in X$ — гранична для множини A. Тоді кожний окіл точки x містить нескінченне число точок множини A.

3. Нехай топологічний простір X містить незліченне число неперетинних відкритих множин. Тоді X несепарабельний.

4. Нехай A, B, C — підмножини топологічного простору X, A щільна в B, а B щільна в C. Тоді A щільна в C.

5. Якщо система околів точки x має зліченну базу, то існує спадна за включенням послідовність околів, яка утворює базу околів цієї точки.

6. Нехай A — підмножина топологічного простору X, x — гранична точка множини A і система околів точки x має зліченну базу. Тоді існує послідовність елементів множини A, збіжна до x.

7. Нехай $f\colon X \to Y$ — неперервна функція, A — щільна підмножина в X. Тоді $f(A)$ щільна в $f(X)$.

8. Нехай $f\colon X \to Y$ — неперервна функція, A — щільна підмножина в X і $f(X)$ щільна в Y. Тоді $f(A)$ щільна в Y.

9. Нехай $f\colon X \to Y$ — неперервна функція, A — щільна підмножина X, B — замкнена підмножина в Y. Якщо $f(A) \subset B$, то $f(X) \subset B$.

10. Наведіть приклад неперервної функції $f\colon [0,1] \to [0,1]$ і щільної підмножини $A \subset [0,1]$, для яких $f^{-1}(A)$ не щільна в $[0,1]$.

11. Чи можуть дві щільні підмножини топологічного простору не перетинатись?

12. Дві неперервні функції з топологічного простору X у гаусдорфів топологічний простір Y, які збігаються на щільній підмножині $X_1 \subset X$ збігаються скрізь на X.

13. *Внутрішністю* множини A називається множина всіх внутрішніх точок множини A. Довести, що внутрішність — відкрита множина.

14. Нехай множина $A \subset X$ перетинається з усіма щільними підмножинами простору X. Тоді A має непорожню внутрішність.

15. Композиція двох неперервних функцій неперервна.

16. Розглянемо таку топологію τ на $\mathbb{R}$: для кожного числа x за базу околів візьмемо сім'ю всіх множин вигляду $\{x\} \cup ((x-a, x+a) \cap \mathbb{Q})$, $a > 0$. Доведіть, що побудований простір $(\mathbb{R}, \tau)$ сепарабельний, проте містить несепарабельний підпростір.

1.2.2. Добуток двох топологічних просторів

Нехай X_1, X_2 — топологічні простори. Означимо на декартовому добутку $X_1 \times X_2$ цих просторів топологію, задавши для кожної точки $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ базу околів $\mathfrak{U}_x$, яка складається з усіх множин вигляду $U_1 \times U_2$, де U_1 — окіл точки x_1 в X_1, а U_2 — окіл точки x_2 в X_2. Описана топологія називається *топологією добутку*, а множина $X_1 \times X_2$, наділена топологією добутку, називається *добутком топологічних просторів* X_1 і X_2.

Розглянемо відображення $P_j\colon X_1 \times X_2 \to X_j$, $j = 1, 2$, яке ставить елементу $x = (x_1, x_2)$ у відповідність його j-ту координату: $P_1(x) = x_1$, $P_2(x) = x_2$. Ці відображення називаються координатними проекторами.

Вправи

1. Координатні проектори неперервні.

2. Серед усіх топологій на $X_1 \times X_2$, в яких неперервні координатні проектори, топологія добутку найслабша.

3. Звичайна топологія на площині $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ збігається з відповідною топологією добутку.

4. Нехай $x, x_n \in X_1 \times X_2$. Доведіть, що збіжність послідовності (x_n) до елемента x в топології добутку еквівалентна одночасній збіжності послідовності $(P_1(x_n))$ до $P_1(x)$ і $(P_2(x_n))$ до $P_2(x)$. Цим буде обґрунтовано ще одну назву топології добутку: «топологія покоординатної збіжності».

5. Нехай X, Y_1, Y_2 — топологічні простори; $f_1\colon X \to Y_1$, $f_2\colon X \to Y_2$ і функція $f\colon X \to Y_1 \times Y_2$ діє за правилом $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Функція неперервна тоді і тільки тоді, коли неперервні обидві функції f_1 і f_2.

6. Функції $(x, y) \mapsto x + y$ і $(x, y) \mapsto x \cdot y$ неперервні як функції з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$.

7. З попередніх двох вправ і теореми про неперервність композиції неперервних функцій виведіть теореми про неперервність суми і добутку неперервних функцій з топологічного простору в $\mathbb{R}$.

8. Виведіть теореми про границю суми і добутку збіжних числових послідовностей із вправ 3, 4 і 6.

9. Позначимо через $[0, 1]$ відрізок у звичайній топології, а через $[0, 1]_d$ — той самий відрізок в дискретній топології. Опишіть топологію добутку на $X_1 \times X_2$, якщо: а) $X_1 = X_2 = [0, 1]$; б) $X_1 = X_2 = [0, 1]_d$; в) $X_1 = [0, 1]$, $X_2 = [0, 1]_d$.

10. Добуток гаусдорфових просторів гаусдорфів.

11. Координатні проектори — це *відкриті відображення*: образ відкритої множини під дією координатного проектора — знову відкрита множина.

1.2.3. Компакти

Гаусдорфів топологічний простір X називається *компактом*, якщо він непорожній і з будь-якого відкритого покриття простору X можна вибрати скінченне підпокриття. Детальніше: X — компакт, якщо для будь-якої сім'ї $\mathfrak{U}$ відкритих множин, що дають в об'єднанні весь X, існує скінченне число $U_1, \ldots, U_n$ елементів сім'ї $\mathfrak{U}$, які все ще дають в об'єднанні весь X. Підмножина A топологічного простору X називається *компактною множиною*, якщо A — компакт в індукованій топології. Іншими словами, A — компактна множина, якщо для будь-якої сім'ї $\mathfrak{U}$ відкритих множин в X, об'єднання яких містить A, існує скінченне число $U_1, \ldots, U_n$ елементів сім'ї $\mathfrak{U}$, об'єднання яких також містить A. Довільна компактна підмножина гаусдорфового топологічного простору замкнена; замкнена підмножина компакту сама компактна.

Нехай X, Y — гаусдорфові простори, функція $f\colon X \to Y$ неперервна і X — компакт. Тоді $f(X)$ — компактна підмножина в Y (ця теорема легко випливає з означення). Зокрема, при неперервному відображенні компакту K в гаусдорфів простір Y образ будь-якої замкненої підмножини X замкнений. Отже, якщо відображення $f\colon K \to Y$ не тільки неперервне, але й бієктивне, то й $f^{-1}\colon Y \to K$ неперервне, тобто f — гомеоморфізм. Останнє твердження формулюють ще у такий спосіб: нехай на X задано дві відокремлювані топології $\tau_1 \succ \tau_2$ і X — компакт у топології τ_1. Тоді $\tau_1 = \tau_2$.

Сім'я множин $\mathfrak{W}$ називається *центрованою*, якщо перетин будь-якого скінченного набору множин з $\mathfrak{W}$ непорожній.

Теорема 1. *Гаусдорфів топологічний простір K є компактом тоді і тільки тоді, коли довільна центрована сім'я замкнених підмножин простору K має спільну точку.*

Доведення. Нехай K — компакт, $\mathfrak{W}$ — центрована сім'я замкнених підмножин K. Припустимо, що в елементів цієї сім'ї немає спільної точки, тобто $\bigcap_{W \in \mathfrak{W}} W$ порожній. Переходячи до доповнень, одержуємо, що $\bigcup_{W \in \mathfrak{W}} (K \setminus W) = K$. Отже, відкриті множини вигляду $K \setminus W$ утворюють покриття компакту K. Виберемо скінченне підпокриття: $K \setminus W_1, \ldots, K \setminus W_n$, $W_i \in \mathfrak{W}$, $\bigcup_{i=1}^{n} (K \setminus W_i) = K$. Але остання умова означає, що $\bigcap_{i=1}^{n} W_i$ порожній. Протиріччя із центрованістю сім'ї $\mathfrak{W}$.

Навпаки, припустимо, що будь-яка центрована сім'я замкнених підмножин простору K має спільну точку, і доведемо, що K — компакт. Нехай сім'я $\mathfrak{U}$ відкритих множин утворює покриття простору K. Тоді доповнення до елементів сім'ї $\mathfrak{U}$ — це система $\mathfrak{W}$ — замкнених множин із порожнім перетином. За умовою $\mathfrak{W}$ не може бути центрованою сім'єю множин, отже, існує скінченний набір $W_1, \dots, W_n \in \mathfrak{W}$, який має порожній перетин. Тоді $\bigcup_{i=1}^{n} (K \backslash W_i) = K$, $K \backslash W_i \in \mathfrak{U}$, тобто з покриття $\mathfrak{U}$ можна вибрати скінченне підпокриття. Теорему доведено. □

Теорема 2. *Довільна нескінченна підмножина компакту має граничну точку.*

Доведення. Нехай A — нескінченна підмножина компакту K. Розглянемо сім'ю $\mathfrak{W}$ всіх таких замкнених підмножин W компакту K, що різниця $A \backslash W$ містить скінченне число точок. Сім'я $\mathfrak{W}$ центрована, отже існує точка x, яка належить до всіх елементів сім'ї $\mathfrak{W}$. Ця точка x є граничною для A. Справді, якщо U — довільний відкритий окіл точки x, то доповнення $K \backslash U$ не містить x і, отже, не лежить в $\mathfrak{W}$. Тобто $A \backslash (K \backslash U) = A \cap U$ складається з нескінченної кількості точок. □

Наведемо без доведення лему Урисона про функціональну відокремлюваність множин і теорему Тітце про продовження. Доведення цих загальновідомих фактів (навіть у дещо загальнішому формулюванні) подано в підручнику К. Куратовського [Kur, т. 1, с. 132–135].

Лема Урисона. *Нехай A і B — неперетинні замкнені підмножини компакту K. Тоді існує неперервна функція $f\colon K \to [0,1]$, яка дорівнює 0 на A і 1 на B.*

Теорема Тітце. *Будь-яка неперервна дійснозначна функція, задана на замкненій підмножині компакту, продовжується до неперервної функції, заданої на всьому компакті.*

Вправи

1. Нехай K — компакт, $x \in K$, A — замкнена підмножина компакту K, $x \notin A$. Тоді в K існують такі неперетинні відкриті підмножини U і V, що $x \in U$ і $A \subset V$.

2. Нехай A і B — неперетинні замкнені підмножини компакту K. Тоді в K існують такі неперетинні відкриті підмножини U і V, що $A \subset U$ і $B \subset V$.

Властивості компактів, сформульовані у двох попередніх вправах, можна розглядати як посилення аксіоми відокремлюваності Гаусдорфа (п. 1.2.1, аксіома 4). Топологічні простори, де будь-які неперетинні замкнені підмножини можна розділити неперетинними околами (як у вправі 2), називаються *нормальныьми просторами.* Лема Урисона правильна не тільки для компактів, але і для будь-яких нормальних просторів. Читач зможе самостійно відновити доведення цього факту, розібравши наступні вправи.

3. Нехай A і B — неперетинні замкнені підмножини K, $f\colon K \to [0,1]$ — неперервна функція, яка дорівнює 0 на A і 1 на B. Через D позначимо множину $\left\{\frac{n}{2^m} : m \in \mathbb{N};\ 1 \leqslant n < 2^m\right\}$ всіх двійково-раціональних точок відрізка $(0,1)$; і, нарешті, для будь-якого $r \in D$ означимо $F_r = f^{-1}([r,1])$. Тоді множини F_r мають такі властивості: (1) всі F_r замкнені; (2) для будь-яких $r_1 < r_2$ існує відкрита множина $G = G_{r_1,r_2}$, яка задовольняє умову $F_{r_1} \supset G \supset F_{r_2}$ (зокрема, $F_{r_1} \supset F_{r_2}$); (3) $B \subset F_r \subset K \backslash A$ для будь-якого $r \in D$.

4. Нехай деяка сім'я множин F_r має перелічені у вправі 2 властивості (1)–(3). Задамо функцію $f\colon K \to [0,1]$ рівністю $f(x) = \sup\{r \in D : x \in F_r\}$ (у цій рівності якщо множина порожня, то її супремум вважаємо нулем). Тоді функція f неперервна, $F_r = f^{-1}([r,1])$ при $r \in D$; $f(x) = 0$ на A і $f(x) = 1$ на B.

5. Нехай K — нормальний топологічний простір, F — замкнена, а G —відкрита множина в K, $F \subset G$. Тоді існують такі множини $\tilde{F}$ і $\tilde{G}$ в K, що $\tilde{F}$ — замкнена, $\tilde{G}$ — відкрита множина і $F \subset \tilde{G} \subset \tilde{F} \subset G$.

6. Нехай A і B — неперетинні замкнені підмножини нормального топологічного простору K. Тоді існує сім'я множин F_r, $r \in D$, яка має властивості (1)–(3). (Множини

F_r потрібно будувати в такій послідовності: спочатку $F_{1/2}$, потім $F_{1/4}$ і $F_{3/4}$ і т. д., на кожному кроці стежачи за виконанням властивостей (1)–(3)).

1.2.4. Напівнеперервні функції

Нехай X — топологічний протір. Функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ називається *напівнеперервною знизу*, якщо для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ множина $f^{-1}((a,+\infty))$ відкрита. Іншими словами, функція f напівнеперервна знизу, якщо для довільної точки $x \in X$ і будь-якого $a \in \mathbb{R}$, з умови $f(x) > a$ випливає існування околу елемента x, на якому всі значення функції f також більші за a. Функція f називається *напівнеперервною зверху*, якщо функція $-f$ напівнеперервна знизу. Функція f буде напівнеперервною зверху тоді і тільки в тоді, коли для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ множина $f^{-1}((-\infty, a))$ відкрита. Функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ неперервна тоді і тільки тоді, коли вона одночасно напівнеперервна знизу і зверху. Множину напівнеперервних знизу дійснозначних функцій на X позначимо $\mathrm{LSC}(X)$, напівнеперервних зверху — через $\mathrm{USC}(X)$, а множину неперервних дійсних функцій на X позначимо $C(X)$ (від *lower semicontinuous*, *upper semicontinuous* і *continuous* відповідно).

Приклад. Нехай $A \subset X$ — довільна підмножина,

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in X \setminus A \end{cases}$$

(така функція називається *характеристичною функцією* множини A). Функція $\mathbb{1}_A$ напівнепрервна знизу тоді і тільки тоді, коли множина A відкрита, і напівнеперервна зверху в тоді і тільки тоді, коли A замкнена.

Теорема 1. *Клас* $\mathrm{LSC}(X)$ *має такі властивості:*

1. *Якщо* $f, g \in \mathrm{LSC}(X)$, *то* $f + g \in \mathrm{LSC}(X)$.

2. *Якщо* $f \in \mathrm{LSC}(X)$, $g \in C(X)$, *то* $f - g \in \mathrm{LSC}(X)$.

3. *Якщо* $f \in \mathrm{LSC}(X)$, $\lambda \in [0, +\infty)$, *то* $\lambda f \in \mathrm{LSC}(X)$.

4. *Супремум будь-якої кількості напівнеперервних знизу функцій знову лежить в* $\mathrm{LSC}(X)$. *Детальніше: нехай* $S \subset \mathrm{LSC}(X)$ *і функція* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *задана рівністю* $f(x) = \sup\{g(x) : g \in S\}$. *Тоді* $f \in \mathrm{LSC}(X)$.

5. *Якщо* $f, g \in \mathrm{LSC}(X)$, *то* $\min\{f, g\} \in \mathrm{LSC}(X)$.

Доведення. 1. Для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ множину $(f+g)^{-1}\big((a,+\infty)\big)$ запишемо у вигляді об'єднання відкритих множин:

$$(f+g)^{-1}\big((a,+\infty)\big) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Big(f^{-1}\big((t,+\infty)\big) \cap g^{-1}\big((a-t,+\infty)\big)\Big).$$

Отже, ця множина сама є відкритою.

2. Випливає з попереднього пункту, бо $-g \in C(X) \subset \mathrm{LSC}(X)$.

3. $(\lambda f)^{-1}\big((a,+\infty)\big) = f^{-1}\big((a/\lambda,+\infty)\big)$.

4. Супремум числової множини більший за a, тоді і тільки тоді, коли принаймні одне з чисел цієї множини більше за a. Тому прообраз $f^{-1}\big((a,+\infty)\big)$ можна зобразити як об'єднання відкритих множин $\bigcup_{g \in S} g^{-1}\big((a,+\infty)\big)$. Отже, він є відкритою множиною.

5. $(\min(f,g))^{-1}\big((a,+\infty)\big) = f^{-1}\big((a,+\infty)\big) \cap g^{-1}\big((a,+\infty)\big)$, а перетин двох відкритих множин відкритий. □

Теорема 2. *Будь-яка напівнеперервна знизу функція на компакті обмежена знизу.*

Доведення. Нехай $f \in \mathrm{LSC}(X)$ і X — компакт. Розглянемо множини $A_n = f^{-1}\big((-n, +\infty)\big)$, $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $A_n \subset A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ і ці множини утворюють відкрите покриття компакту X, як наслідок існує $n_0 \in \mathbb{N}$, для якого $A_{n_0} = X$, і, відповідно, $f(t) > -n_0$ в усіх точках. □

Теорема 3. *Нехай X — компакт і $f \in \mathrm{LSC}(X)$. Тоді f збігається із супремумом сім'ї всіх неперервних функцій, які мажоруються цією функцією f. Іншими словами, для будь-якого $x \in X$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує така функція $g \in C(X)$, що $g \leqslant f$ у всіх точках і $g(x) \geqslant f(x) - \varepsilon$.*

Доведення. Не зменшуючи загальності, можемо вважати функцію f невід'ємною: з огляду на попередню теорему, цього можна досягти, додавши до f достатньо велику сталу. Зафіксуємо точку $x \in X$ і позначимо $f(x) - \varepsilon$ через a. Якщо $a \leqslant 0$, то $g \equiv 0$ задовольнятиме всі умови теореми. Тому можемо вважати $a > 0$. Застосувавши лему Урисона до пари неперетинних замкнених множин $A = f^{-1}\big((-\infty, a]\big)$ і $B = \{x\}$, одержимо існування неперервної функції $h\colon X \to [0, 1]$, яка дорівнює 0 на A і 1 на B. Перевіримо, що $g = ah$ буде шуканою функцією. Справді, в точках $t \in X$, де $g(t) = 0$, нерівність $0 \leqslant g(t) \leqslant f(t)$ очевидна. Ті ж точки, де $g(t) \neq 0$, лежать в $X \setminus A$, тобто в цих точках $f(t) > a \geqslant g(t)$. □

Вправи

1. Нехай X — компакт, $f \in \mathrm{LSC}(X)$. Тоді існує точка $x \in X$, в якій $f(x) = \min\limits_{t \in X} f(t)$.

2. Нехай X — топологічний простір, $f\colon X \to \mathbb{R}$, а $\mathfrak{U}_x$ — система околів точки $x \in X$. *Нижньою границею* функції f у точці x називається число $\varliminf\limits_{t \to x} f(t) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, яке визначається за формулою

$$\varliminf_{t \to x} f(t) = \sup_{V \in \mathfrak{U}_x} \inf_{t \in V \setminus \{x\}} f(t).$$

Аналогічним способом означається *верхня границя*:

$$\varlimsup_{t \to x} f(t) = \inf_{V \in \mathfrak{U}_x} \sup_{t \in V \setminus \{x\}} f(t).$$

3. Функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ на топологічному просторі X напівнеперервна знизу тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $x \in X$ правильна нерівність $f(x) \leqslant \varliminf\limits_{t \to x} f(t)$.

4. Нехай $f\colon X \to \mathbb{R}$ — довільна обмежена функція на топологічному просторі X. Функція $\underline{f}(x) = \min\left\{f(x), \varliminf\limits_{t \to x} f(t)\right\}$ називається *нижньою обвідною функції* f, а $\overline{f}(x) = \max\left\{f(x), \varlimsup\limits_{t \to x} f(t)\right\}$ називається *верхньою обвідною* функції f. Перевірте напівнеперервність знизу $\underline{f}$ і напівнеперервність зверху $\overline{f}$.

5. Нехай $f\colon X \to \mathbb{R}$ — довільна функція, $g \in \mathrm{LSC}(X)$ і $g \leqslant f$. Тоді $g \leqslant \underline{f}$.

1.3. Метричні простори

1.3.1. Метрика. Послідовності і топологія

Функція двох змінних $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ називається *метрикою* на множині X, якщо вона має такі властивості:

1. $\rho(x, x) = 0$;

2. якщо $\rho(x, y) = 0$, то $x = y$ (невиродженість);

3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симетричність);

4. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (нерівність трикутника).

Перераховані вище властивості називаються аксіомами метрики. Для величини $\rho(x, y)$ використовують ще термін *відстань* (або дистанція) між елементами x і y.

Множина із введеною на ній метрикою називається *метричним простором*. Підмножина метричного простору X, наділена метрикою з X, називається *підпростором метричного простору* X.

Нехай X — метричний простір, $x_0 \in X$, $r > 0$. Символом $B_X(x_0, r)$ (або $B(x_0, r)$, якщо зрозуміло, про який простір йде мова) позначається відкрита *куля* радіуса r з центром в x_0: $B_X(x_0, r) = \{ x \in X : \rho(x, x_0) < r \}$. *Топологія метричного простору* задається за допомогою куль: кулі з центром в x_0 утворюють базу околів точки x_0. Іншими словами, підмножина A метричного простору X називається відкритою, якщо разом з будь-якою своєю точкою множина A містить деяку кулю з центром у цій точці: $\forall x \in A \ \exists r > 0 : B_X(x, r) \subset A$. Послідовність (x_n) елементів метричного простору збігається до елемента x, якщо $\rho(x_n, x) \to 0$ $(n \to \infty)$. Оскільки метричний простір є одночасно і топологічним, у метричних просторах визначені всі основні топологічні поняття. Особливістю ж метричних просторів є можливість еквівалентного означення топологічних понять через збіжність послідовностей (*секвенційні означення*). Деякі з таких означень наведені нижче.

Нехай A — підмножина метричного простору X. Точка $x \in X$ називається граничною для A, якщо існує послідовність елементів $x_n \in A \backslash \{x\}$, збіжна до x. Підмножина $A \subset X$ називається замкненою, якщо вона містить усі свої граничні точки. Підмножина $A \subset X$ називається відкритою, якщо її доповнення замкнене.

Отже, в метричних просторах збіжність послідовностей однозначно визначає топологію. В інший спосіб цей самий факт можна пояснити, давши секвенційні означення неперервності й гомеоморфізму. Нехай X, Y — метричні простори. Функція $f\colon X \to Y$ називається неперервною, якщо вона переводить збіжні послідовності у збіжні:

$$\forall (x_n), x \in X \ \ (x_n \to x) \Rightarrow (f(x_n) \to f(x)) .$$

Самі поняття гомеоморфізму та гомеоморфних просторів означаються через неперервність (див. п. 1.2.1). І ще одне означення. Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ізометрією*, якщо воно бієктивне і зберігає метрику: $\rho(x_1, x_2) = \rho(f(x_1), f(x_2))$ для будь-яких $x_1, x_2 \in X$. Метричні простори X і Y називаються *ізометричними*, якщо між ними існує ізометрія.

Вправи

1. У метричному просторі система околів будь-якої точки має зліченну базу.

2. Доведіть, що для метричних просторів наведені вище секвенційні означення еквівалентні топологічним.

3. Для підмножин метричного простору відстанню називають нижню межу попарних відстаней між елементами: $\rho(A, B) = \inf\limits_{a \in A, b \in B} \rho(a, b)$. Покажіть, що така «відстань» не задовольняє ані аксіому невиродженості, ані нерівність трикутника.

4. Нехай X, Y — метричні простори. На декартовому добутку $X \times Y$ означимо метрику рівністю $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \rho(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2)$. Перевірте аксіоми метрики для цієї величини. Доведіть, що ця метрика задає топологію на $X \times Y$, яка збігається зі звичайною топологією добутку. Зокрема, послідовність у цій метриці збігається тоді і тільки тоді, коли вона збігається покоординатно: $(x_n, y_n) \to (x, y)$ в $X \times Y$ тоді і тільки тоді, коли $x_n \to x$ в X і $y_n \to y$ в Y.

5. Нехай X, Y — метричні простори, $f\colon X \to Y$ — неперервна функція. Тоді *графік* $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ функції f замкнений в $X \times Y$. Результат цієї вправи переноситься на відокремлювані топологічні простори. Відокремлюваність якого з просторів X, Y тут важлива, а якого — ні?

6. Наведіть приклад розривної функції $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком.

7. Покажіть, що графік неперервної функції $f\colon X \to Y$ гомеоморфний простору X.

8. Нехай Y — підпростір метричного простору X. Тоді на Y є топологія, індукована з простору X, і є топологія, яка задається метрикою простору Y. Доведіть, що ці топології збігаються.

9. Замкненою кулею радіуса r з центром в x_0 метричного простору X називається множина $\overline{B}_X(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leqslant r\}$. На прикладі метричного простору, який складається з двох точок: $X = \{0, 1\}$, $\rho(0, 1) = 1$ доведіть, що замикання відкритої кулі може не бути відповідною замкненою кулею. На прикладі метричного простору, який складається з трьох точок $\{0, 1, 2\}$ з природною метрикою, доведіть, що куля більшого радіуса може строго міститися у кулі меншого радіуса (звичайно, центри куль при цьому збігатись не повинні). Яким може бути співвідношення радіусів у строго вкладених замкнених куль?

10. На просторі $\mathbb{R}^\omega$ усіх числових послідовностей введемо метрику

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

де x_n і y_n — це координати елементів x і y відповідно. Перевірте аксіоми метрики. Доведіть, що збіжність у цій метриці і покоординатна збіжність еквівалентні.

11. Інша метрика на $\mathbb{R}^\omega$, яка задає ту ж топологію, — це метрика Фреше:

$$\rho_1(x, y) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} + \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k - y_k| \right\}.$$

12. Підпростір сепарабельного метричного простору сепарабельний. (Для загальних топологічних просторів це не так: див. вправу 16 п. 1.2.1).

13. Які з відомих Вам метричних просторів сепарабельні, а які — ні?

1.3.2. Відстань від точки до множини

Відстанню від точки x метричного простору X до непорожньої підмножини $A \subset X$ називається точна нижня межа відстаней від x до елементів множини A: $\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$. Зазначимо, що точка x належить до замикання множини A тоді і тільки тоді, коли $\rho(x, A) = 0$.

Твердження. *Функція $\rho(x, A)$ неперервна за x.*

Доведення. Нехай $x, y \in X$. За нерівністю трикутника

$$\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a) \leqslant \inf_{a \in A} \rho(y, a) + \rho(x, y) = \rho(y, A) + \rho(x, y).$$

Звідки, $\rho(x, A) - \rho(y, A) \leqslant \rho(x, y)$. З огляду на рівноправність точок x і y $\rho(y, A) - \rho(x, A) \leqslant \rho(x, y)$, тобто для будь-яких $x, y \in X$

$$|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leqslant \rho(x, y).$$

Отже, ми довели не тільки неперервність, але й виконання так званої умови Ліпшиця з одиничною сталою. □

Вправи

1. *Дистанцією Гаусдорфа* між двома непорожніми замкненими підмножинами A і B метричного простору X називається величина

$$\rho_H(A, B) = \max\left\{\sup_{b\in B}\rho(b, A),\ \sup_{a\in A}\rho(a, B)\right\}.$$

Доведіть, що дистанція Гаусдорфа справді задає метрику на сім'ї всіх непорожніх обмежених замкнених підмножин метричного простору X (для порівняння див. вправу 3 п. 1.3.1).

2. Нехай A і B — неперетинні замкнені підмножини метричного простору X. Розглянемо множини $A_1 = \{x \in X : \rho(x, A) < \rho(x, B)\}$ і $B_1 = \{x \in X : \rho(x, A) > \rho(x, B)\}$. Перевірте, що A_1 і B_1 — неперетинні відкриті околи множин A і B відповідно. Цим буде доведено, що будь-який метричний простір — нормальний топологічний простір (див. вправи п. 1.2.3).

3. Нехай A і B — неперетинні замкнені підмножини метричного простору X. Для будь-якого $x \in X$ приймемо $f(x) = \frac{\rho(x,A)}{\rho(x,A)+\rho(x,B)}$. Тоді f — неперервна функція, яка дорівнює 0 на A, 1 на B і набуває скрізь значення з відрізка $[0, 1]$. Отримаємо просте доведення леми Урисона в метричних просторах (див. п. 1.2.3). Більше того, на відміну від загальної леми Урисона, побудована вище функція f дорівнює 0 *тільки* в точках множини A і 1 *тільки* в точках множини B.

4. Нехай A — замкнена підмножина метричного простору X, $f\colon A \to [0, 1]$ — неперервна функція. Доозначимо функцію f на $X\setminus A$ за допомогою такої формули Гаусдорфа:

$$f(x) = \inf_{t\in A}\left\{f(t) + \frac{\rho(t, x)}{\rho(x, A)} - 1\right\}.$$

Перевірте, що при такому доозначенні функція f буде неперервна на всьому X. Виведіть звідси теорему Тітце (п. 1.2.3) для випадку метричних просторів.

1.3.3. Повнота

Послідовність (x_n) елементів метричного простору X називається *фундаментальною*, якщо $\rho(x_n, x_m) \to 0$ $(n, m \to \infty)$. Детальніше: послідовність (x_n) фундаментальна, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, починаючи з якого всі попарні відстані між елементами x_n стають меншими за ε. Фундаментальні послідовності називають ще *послідовностями Коші*. Якщо послідовність $x_n \in X$ має границю $x \in X$, то вона фундаментальна:

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Метричний простір X називається *повним*, якщо будь-яка фундаментальна послідовність в X має границю. Як відомо з курсу аналізу, простори $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, а також будь-який скінченновимірний евклідовий простір повні.

Нагадаємо деякі факти.

Теорема 1. *Замкнений підпростір повного метричного простору є повним; повний підпростір будь-якого метричного простору замкнений.*

Доведення. Нехай A — замкнена підмножина метричного простору X, $x_n \in A$ — фундаментальна послідовність. Оскільки X повний, послідовність x_n має деяку границю $x \in X$. Із замкненості A випливає, що ця границя лежить в A. Повноту підпростору A доведено. Навпаки, нехай A повний, а послідовність $x_n \in A$ має деяку границю $x \in X$. Тоді ця послідовність фундаментальна. З огляду на повноту, (x_n) має границю в A, а з огляду на єдиність границі ця границя дорівнює x. Тобто $x \in A$. Замкненість множини A, а з нею і теорему доведено. □

Нехай A — непорожня підмножина метричного простору X. *Діаметром* множини A називається величина $\operatorname{diam}(A) = \sup\limits_{x,y\in A} \rho(x,y)$.

Теорема 2 (принцип вкладених множин). *Нехай $A_1 \supset A_2 \supset \ \dots$ — спадна послідовність непорожніх замкнених підмножин повного метричного простору X і $\operatorname{diam} A_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Тоді $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ не порожній і складається з однієї точки.*

Доведення. Виділимо в кожному з A_n по точці a_n. Нехай N — деяке натуральне число, $k, j > N$. Тоді, з огляду на спадання послідовності множин A_n , точки a_k і a_j належать до множини A_N. Тому

$$\rho\,(a_j, a_k) \leqslant \operatorname{diam} A_N \to 0, \quad N \to \infty$$

тобто a_n утворюють фундаментальну послідовність. Позначимо границю цієї послідовності через a. Для будь-якого N і будь-якого $k > N$ точка a_k лежить в A_N. Отже, й $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_k$ також лежить в A_N. Ми показали, що $a \in A_N$ для будь-якого N, тобто перетин множин A_n не порожній. Зазначимо, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset A_N$ при будь-якому N, отже,

$$\operatorname{diam} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \leqslant \operatorname{diam} A_N \to 0, \quad N \to \infty.$$

Множина нульового діаметра не може містити більше ніж одну точку. Теорему доведено. □

Вправи

1. Нехай послідовність Коші (x_n) у метричному просторі X містить збіжну підпослідовність. Тоді й сама послідовність (x_n) збіжна.

2. Метричний простір X повний тоді і тільки тоді, коли будь-яка послідовність (x_n) з $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < \infty$ збігається.

3. Розглянемо куб з одиничним ребром і кулю одиничного радіуса в тривимірному евклідовому просторі. Яка з цих фігур має більший діаметр? Чи зміниться відповідь, якщо аналогічні фігури розглянути в чотиривимірному просторі? У п'ятивимірному? (Одиничний куб в $\mathbb{R}^n$ — це множина тих векторів, всі координати яких лежать між 0 і 1, одинична куля — це множина тих векторів, сума квадратів координат яких не перевищує одиниці.)

4. Покажіть, що в неповному просторі принцип вкладених множин може не виконуватись.

5. Наведіть приклад спадної послідовності $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ замкнених підмножин дійсної осі з порожнім перетином.

6. Побудуйте гомеоморфізм між відкритим проміжком $(0,1)$ і дійсною віссю $\mathbb{R}$. Цим буде доведено, що повнота — це метрична, а не топологічна властивість: неповний і повний простори можуть бути гомеоморфні.

7. Перевірте, що якщо X, Y — повні метричні простори, то декартів добуток $X \times Y$ з метрикою з вправи 4 п.1.3.1 також повний.

8. Перевірте повноту простору $\mathbb{R}^\omega$ із вправи 11 п. 1.3.1.

9. В евклідовому просторі діаметр кулі дорівнює подвоєному радіусу. Чи поширюється це твердження на кулі в довільному метричному просторі?

10. Доведіть, що на евклідовій площині будь-яку множину одиничного діаметра можна помістити в круг радіуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (теорема Юнга).

11. Доведіть, що на евклідовій площині будь-яку множину одиничного діаметра можна розбити на 3 частини, діаметр яких менший за одиницю (теорема Борсука).

Вправи 10 і 11 належать до напрямку математики, який називається *комбінаторною геометрією.* Комбінаторна геометрія вивчає задачі взаємного розташування фігур, оптимальні покриття, розбиття на менші частини і т. д. Не дивлячись на прості, на перший погляд, формулювання, такі задачі часто є нетривіальними; багато природних запитань дотепер залишаються нерозв'язаними. Наприклад, *проблема Борсука*: *чи кожну множину одиничного діаметра в чотиривимірному евклідовому просторі можна розбити на 5 частин, діаметр яких менший за одиницю?* Детальніше про цю проблему й інші задачі комбінаторної геометрії — див. монографії [B-H], [Gru] і [H-D].

12. Замкнена підмножина топологічного простору називається *досконалою множиною*, якщо вона не має ізольованих точок (іншими словами, якщо кожна точка множини — гранична для самої множини). Доведіть, що в повному метричному просторі потужність будь-якої досконалої множини не менша за потужність континуума.

13. Показати, що метричний простір сепарабельний в тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ він може бути покритий зліченним числом куль радіуса ε.

14. Нехай A — незліченна підмножина повного сепарабельного метричного простору X. Точка $x \in X$ називається *точкою конденсації* множини A, якщо перетин множини A з будь-яким околом точки x незліченний. Доведіть, що множина A_c точок конденсації множини A не порожня, досконала і різниця $A \setminus A_c$ не більш ніж зліченна.

1.3.4. Рівномірна неперервність. Теорема про продовження

Означення. Нехай X, Y — метричні простори. Відображення $f\colon X \to Y$ називається *рівномірно неперервним*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для будь-яких двох елементів $x_1, x_2 \in X$ з $\rho(x_1, x_2) < \delta$ відстань між їх образами не перевищує ε: $\rho\left(f(x_1), f(x_2)\right) \leqslant \varepsilon$.

Зазначимо, що будь-яке рівномірно неперервне відображення неперервне, але з неперервності рівномірна неперервність, взагалі кажучи, не випливає. Приклад — функція $f(x) = 1/x$ на відкритому проміжку $(0,1)$.

Лема. *Нехай $f\colon X \to Y$ — рівномірно неперервне відображення метричного простору X у метричний простір Y. Тоді для будь-якої фундаментальної послідовності (x_n) елементів простору X її образ $(f(x_n))$ — фундаментальна послідовність в Y.*

Доведення. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ візьмемо $\delta(\varepsilon)$ з означення рівномірної неперервності. За означенням послідовності Коші, існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, починаючи з якого всі попарні відстані між елементами x_n стають меншими за $\delta(\varepsilon)$, тобто для будь-яких $n, m > N$ маємо $\rho(x_n, x_m) < \delta(\varepsilon)$. Але тоді для будь-яких $n, m > N$ правильна і нерівність $\rho\left(f(x_n), f(x_m)\right) \leqslant \varepsilon$. $\square$

Теорема. *Нехай X_1 — підпростір метричного простору X, $\overline{X}_1$ — замикання множини X_1 в X, а Y — повний метричний простір. Тоді будь-яке рівномірно неперервне відображення $f\colon X_1 \to Y$ продовжується єдиним способом до рівномірно неперервного відображення $\bar{f}\colon \overline{X}_1 \to Y$.*

Доведення. Для будь-якої точки $x \in \overline{X}_1$ існує послідовність елементів $x_n \in X_1$, яка збігається до x. З огляду на повноту простору Y, за попередньою лемою послідовність $(f(x_n))$ має границю. Більше того, ця границя не залежить від вибору послідовності (x_n), а залежить лише від елемента x. Справді, якщо $x_n, y_n \in X_1$ — дві різні послідовності, збіжні до x, то «змішана» послідовність $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ також збіжна до x. Тому, послідовність образів $f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \ldots$ прямує до деякої границі, і, отже, підпослідовності $(f(x_n))$ і $(f(y_n))$ повинні мати ту саму границю. Позначимо через $\bar{f}(x)$ — цю спільну границю для всіх послідовностей вигляду $(f(x_n))$, де $x_n \in X_1$ і $x_n \to x$.

Якщо $x \in X_1$, то за (x_n) можна взяти послідовність $(x, x, x, \ldots)$. Тому в цьому випадку $\bar{f}(x) = f(x)$. Цим доведено, що відображення $\bar{f}$ — продовження відображення f. Перевіримо рівномірну неперервність відображення $\bar{f}$.

Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і покажемо, що $\delta = \delta(\varepsilon)$ з означення рівномірної неперервності відображення f підходить і для відображення $\bar{f}$. Нехай $x, y \in \bar{X}_1$ — будь-які елементи з $\rho(x, y) < \delta$, $x_n, y_n \in X_1$, $x_n \to x$ і $y_n \to y$ $(n \to \infty)$. Оскільки $\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, y) + \rho(x, y) + \rho(x, y_n)$, то $\rho(x_n, y_n) < \delta$ при достатньо великих n. Отже, при великих n маємо оцінку $\rho\left(f(x_n), f(y_n)\right) \leqslant \varepsilon$. Переходячи до границі при $n \to \infty$, отримуємо потрібну нерівність $\rho\left(\bar{f}(x), \bar{f}(y)\right) \leqslant \varepsilon$. $\square$

Вправи

Кількісною характеристикою рівномірної неперервності відображення є модуль неперервності

$$\omega(f, \varepsilon) = \sup\{\delta > 0 : (\rho(x_1, x_2) < \delta) \Rightarrow (\rho\left(f(x_1), f(x_2)\right) \leqslant \varepsilon)\}$$

(домовимося тут вважати, що супремум порожньої множини дорівнює 0).

1. Функція f рівномірно неперервна тоді і тільки тоді, коли $\omega(f, \varepsilon) > 0$ при всіх $\varepsilon > 0$.

2. Для функції f на відрізку чи на прямій *модуль неперервності напівадитивний*: $\omega(f, \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \geqslant \omega(f, \varepsilon_1) + \omega(f, \varepsilon_2)$ при всіх $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$.

3. Наведіть приклад метричного простору X і дійснозначної функції f на X, для якої модуль неперервності не буде напівадитивним.

4. Нехай відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє умову Ліпшиця

$$\exists C > 0\, \forall x_1, x_2 \in X\ \rho\left(f(x_1), f(x_2)\right) \leqslant C\rho(x_1, x_2).$$

Тоді f рівномірно неперервне. Оцініть знизу модуль неперервності відображення.

5. Обчисліть модуль неперервності ізометрії.

1.3.5. Псевдометрика й асоційований метричний простір. Поповнення метричного простору

Функція двох змінних $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ називається *псевдометрикою* на множині X, якщо вона задовольняє аксіоми 1, 3 і 4 метрики (аксіоми симетричності та нерівності трикутника), проте, можливо, не задовольняє аксіому 2 (аксіому невиродженості). Множина із псевдометрикою називається *псевдометричним простором.* Топологія на псевдометричному просторі задається так само, як і на метричному просторі, — за допомогою куль, що утворюють базу околів. Основна відмінність псевдометричних просторів від метричних — це невідокремлюваність топології, яка задається псевдометрикою. Покажемо, що «склеївши» ті точки псевдометричного простору, які неможливо відділити одну від одної, можна природним способом одержати метричний простір.

Нехай (X, ρ) — псевдометричний простір. Елементи $x, y \in X$ назвемо *ρ-еквівалентними* $(x \approx y)$, якщо $\rho(x, y) = 0$.

Теорема. *Відношення $\approx$ — це відношення еквівалентності на X. Якщо A, B — класи еквівалентності, $a \in A$, $b \in B$ — довільні представники цих класів, то величина $\rho(A, B) = \rho(a, b)$ не залежить від вибору представників класів еквівалентності і задає метрику на множині $X/\approx$ всіх класів еквівалентності, породжених відношенням $\approx$.*

Доведення. Симетричність відношення $\approx$ очевидна. Далі, зазначимо, що

$$\text{якщо } \ x, y, z \in X, \ z \approx y, \ \text{ то } \rho(x, y) = \rho(x, z). \tag{i}$$

Справді, за нерівністю трикутника,

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) = \rho(x, z)$$

і

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) = \rho(x, y).$$

Звідси випливає транзитивність відношення $\approx$. Незалежність величини $\rho(a, b)$ від вибору представників $a \in A$, $b \in B$ класів еквівалентності A, B так само з очевидністю випливає зі співвідношення (i). Симетричність і нерівність трикутника для величини ρ на $X/\approx$ випливають із відповідних властивостей вихідної псевдометрики ρ на X. Нарешті, невиродженість метрики ρ на $X/\approx$ — це результат виконаної «склейки»: якщо $A, B \in X/\approx$ — класи еквівалентності, для яких $\rho(A, B) = 0$, то існують представники $a \in A$, $b \in B$, для яких $\rho(a, b) = 0$. Тобто $a \approx b$, і, відповідно, класи A і B — це один і той самий клас еквівалентності. □

Описаний простір $X/\approx$ називається *метричним простором, асоційованим із псевдометричним простором X.*

Так само, як і для метричного простору, послідовність (x_n) елементів псевдометричного простору X називається фундаментальною, чи послідовністю Коші, якщо $\rho\left(x_n, x_m\right) \to 0$ $(n, m \to \infty)$. Псевдометричний простір називається повним, якщо будь-яка фундаментальна послідовність в X має границю. Відображення $F\colon X \to X/\approx$, яке ставить елементу у відповідність його клас еквівалентності, зберігає відстані і, як наслідок, зберігає фундаментальність і збіжність послідовностей. Тому псевдометричний простір X буде повним тоді і тільки тоді, коли є повним метричний простір $X/\approx$.

Означення. Нехай X — неповний метричний простір. Метричний простір $Y \supset X$ називається *поповненням* простору X, якщо Y — повний простір, звуження метрики простору Y на X збігається з вихідною метрикою простору X (тобто X — підпростір простору Y) і X — щільна підмножина в Y.

Розв'язавши наведені нижче вправи, читач доведе існування поповнення будь-якого неповного простору і єдиність цього поповнення з точністю до ізометрії.

Вправи

1. Нехай X — метричний простір. Означимо простір $\tilde{X}$ як простір усіх послідовностей Коші в X. Нехай $x, y \in \tilde{X}$, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Приймемо $\rho(x, y) = \lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n)$. Перевірте, що величина $\rho(x, y)$ коректно визначена для будь-яких $x, y \in \tilde{X}$ і задає псевдометрику на $\tilde{X}$.

2. Доведіть, що $\tilde{X}$ — це повний псевдометричний простір.

3. Позначимо через $\tilde{\tilde{X}}$ — метричний простір, асоційований з псевдометричним простором $\tilde{X}$. Кожний елемент x простору X ототожнимо з класом еквівалентності послідовності Коші $(x, x, x, ...)$. Перевірте, що при такому ототожнені X — це підпростір простору $\tilde{\tilde{X}}$.

4. $\tilde{\tilde{X}}$ — це поповнення простору X.

5. Єдиність поповнення: нехай Y_1, Y_2 — два поповнення метричного простору X. Тоді існує бієктивна ізометрія $S\colon Y_1 \to Y_2$, яка залишає елементи простору X на місці ($S(x) = x$ для будь-якого $x \in X$). Тобто, з точки зору їхньої метричної структури, простори Y_1 і Y_2 не розрізняються.

6. Використовуючи існування поповнення, узагальніть результат вправи 14 п. 1.3.3 на неповний сепарабельний простір.

1.3.6. Множини першої категорії та теорема Бера

Підмножина A топологічного простору X називається *ніде не щільною*, якщо вона не щільна в жодній непорожній відкритій множині в X. Іншими словами, підмножина A ніде не щільна, якщо її замикання не містить жодної відкритої множини.

Оскільки в метричному просторі для будь-якої точки замкнені кулі ненульового радіуса утворюють базу околів, для випадку метричного простору означення можна переформулювати так: підмножина A ніде не щільна, якщо в будь-якій кулі $\overline{B}_X(x_0, r)$, $r > 0$ знайдеться менша замкнена куля ненульового радіуса, яка не містить жодної точки множини A.

Типові приклади ніде не щільних множин: канторова множина на відрізку (див. п. 1.4.4), спрямна крива на площині. Потрібно звернути увагу, що, говорячи про ніде не щільну множину, необхідно зазначати, як підмножину якого простору її розглядають. Скажімо, відрізок буде ніде не щільною множиною на площині, але не на прямій; $A = \{0\}$ ніде не щільна на осі, проте у множині натуральних чисел та сама A буде відкритою.

Теорема Бера. *Повний метричний простір не можна покрити зліченним числом своїх ніде не щільних підмножин.*

Доведення. Нехай X — повний метричний простір, $A_1, A_2, \dots$ — ніде не щільні підмножини в X. Нам потрібно довести, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ не збігається з X. Оскільки A_1 ніде не щільна в X, існує замкнена куля $B_1 = \overline{B}_X(x_1, r_1)$ з $0 < r_1 < 1/2$, яка не перетинає A_1. У свою чергу, A_2 ніде не щільна (зокрема, A_2 не щільна в B_1), отже, існує куля $B_2 = \overline{B}_X(x_2, r_2)$, $0 < r_1 < 1/4$, яка міститься в B_1 і не перетинається з A_2. Продовжуючи це міркування, отримаємо спадну послідовність $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$ замкнених куль, з радіусами, що прямують до нуля, причому кожна B_n не перетинається з відповідним

A_n. Згідно з принципом вкладених множин (п. 1.3.3), у множин B_n є спільна точка. Позначимо цю точку x. Оскільки $x \in B_n$ при будь-якому n, а B_n не перетинаються з A_n, отримуємо, що x не належить до жодного з A_n. Ми показали, що існує точка $x \in X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, тобто множини A_n не покривають всього простору X. □

У зв'язку з доведеною теоремою Бер ввів таку термінологію. Підмножина A топологічного простору X називається *множиною першої категорії* в X, якщо A можна зобразити як зліченне об'єднання ніде не щільних в X підмножин. Підмножина в X, яка не є множиною першої категорії, називається *множиною другої категорії* в X. У цих термінах теорема Бера стверджує, що повний метричний простір — множина другої категорії в собі.

Вправи

1. Перевірте, що доповнення до щільної відкритої множини — це ніде не щільна множина.

2. Покажіть, що будь-яка відкрита підмножина повного метричного простору X — це множина другої категорії в X.

3. Доведіть, що для неповного метричного простору твердження теореми Бера може не виконуватися.

4. Перевірте такі властивості: підмножина множини першої категорії знову має першу категорію, скінченне або зліченне об'єднання множин першої категорії — множина першої категорії; якщо множина містить підмножину другої категорії, то вона сама має другу категорію.

5. Чи правильно, що перетин двох множин другої категорії має другу категорію?

6. Доведіть теорему Кантора про незліченність відрізка $[0, 1]$, спираючись на теорему Бера.

7. Покажіть, що одноточкова підмножина $A = \{x\}$ топологічного простору X є ніде не щільною тоді і тільки тоді, коли x — гранична точка в X. Звідси і з теореми Бера легко вивести таку послаблену версію вправи 12 п. 1.3.3: будь-яка досконала множина в повному метричному просторі незліченна.

8. Нехай нескінченно диференційовна функція f на відрізку $[0, 1]$ має таку властивість: для будь-якої точки $t \in [0, 1]$ існує такий номер $n = n(t)$, що n-та похідна функції f в точці t дорівнює нулеві. Використовуючи множини $A_n = \left\{ t \in [0, 1] : f^{(n)}(t) = 0 \right\}$ і теорему Бера, доведіть, що на деякому відрізку $[a, b] \subset [0, 1]$ функція f — поліном.

9. В умовах попередньої вправи доведіть, що функція f — поліном на всьому відрізку $[0, 1]$.

10. Підмножина A топологічного простору X називається *множиною першої категорії в точці* $x \in X$, якщо існує окіл U точки x, для якої $A \cap U$ — це множина першої категорії в X. У протилежному випадку A називається *множиною другої категорії в точці* x. Доведіть, що якщо множина $A \subset X$ є множиною першої категорії в кожній точці $x \in X$, то A — множина першої категорії. Далі, доведіть що для будь-якої множини A другої категорії існує така куля B, що A — множина другої категорії у всіх точках $x \in B$.

11. Доведіть такий аналог теореми Бера: компактний топологічний простір — це множина другої категорії в собі.

1.4. Компактні множини в метричних просторах

1.4.1. Передкомпакти

Нехай X — метричний простір, $A, C \subset X$, $\varepsilon \geqslant 0$. Множина C називається *ε-сіткою* для A, якщо $\bigcup_{x\in C} B(x,\varepsilon) \supset A$. Іншими словами, для будь-якого $a \in A$ існує $x \in C$ з $\rho(x,a) < \varepsilon$. Ще одне переформулювання: множина C є ε-сіткою для A тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $a \in A$ $\rho(a, C) < \varepsilon$. З нерівності трикутника випливає, що якщо C — ε-сітка для A і D — ε-сітка для C, то D — 2ε-сітка для A. Наприклад, центр відкритої кулі радіуса r є r-сіткою для цієї кулі, множина $C = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ є $\frac{1}{3}$-сіткою для проміжку $(0,1)$. Множина C називається скінченною ε-сіткою для A, якщо C — ε-сітка для A і C складається зі скінченного числа елементів.

Лема 1. *Якщо для множини A існує скінченна ε-сітка, то для A існує скінченна 2ε-сітка, що складається з елементів множини A.*

Доведення. Нехай C — скінченна ε-сітка для A. У кожній кулі $B(c,\varepsilon)$, $c \in C$, як тільки ця куля перетинається з A, виберемо по елементу $x \in B(c,\varepsilon) \cap A$. Одержана скінченна множина елементів і є шуканою 2ε-сіткою. □

Підмножина A метричного простору X називається *передкомпактом*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ у A існує скінченна ε-сітка. Згідно з попередньою лемою, можна вимагати, щоб ε-сітка в означенні передкомпакту складалась з елементів самої множини A.

Відзначимо очевидні властивості передкомпактів: якщо $A \supset B$ і A — передкомпакт, то і B — передкомпакт; об'єднання скінченного числа передкомпактів — передкомпакт. Кожен передкомпакт — обмежена множина, тобто міститься в деякій кулі скінченного радіуса (для цього досить навіть існування скінченної ε-сітки при деякому одному фіксованому значенні ε). Множина в $\mathbb{R}^n$ є передкомпактом тоді і тільки тоді, коли вона обмежена.

Лема 2. *Нехай для будь-якого $\varepsilon > 0$ множина A має передкомпактну ε-сітку. Тоді A — передкомпакт.*

Доведення. Виберемо для A передкомпактну $\varepsilon/2$-сітку B, а для B — скінченну $\varepsilon/2$-сітку C. Тоді C є скінченною ε-сіткою для A. □

Теорема 1. *Нехай A — підмножина метричного простору X. Тоді такі умови еквівалентні:*

1. *A — передкомпакт.*
2. *Для будь-якого $\varepsilon > 0$ з будь-якої послідовності елементів множини A можна вибрати підпослідовність, всі попарні відстані між елементами якої не перевищують ε.*
3. *З будь-якої послідовності елементів множини A можна вибрати фундаментальну підпослідовність.*

Доведення. 1. $\Rightarrow$ 2. Нехай A — передкомпакт, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$. Покриємо множину A скінченним числом куль радіуса $\varepsilon/2$. Принаймні одна з цих куль містить нескіченну підпослідовність послідовності a_n.

2. $\Rightarrow$ 3. Нехай $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$. Застосовуючи послідовно умову 2 з $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1/2$, $\varepsilon = 1/3$, ..., отримаємо нескінченні множини індексів $N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset ...$, для яких $\operatorname{diam}\{a_n\}_{n\in N_k} \leqslant 1/k$. Утворимо зростаючу послідовність індексів M, вибравши перший елемент в N_1, другий — в N_2, третій — в N_3 і т. д. Підпослідовність $(a_n)_{n\in M}$ є послідовністю Коші, адже для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ усі попарні відстані між членами цієї послідовності, починаючи з k-го, не перевищують $1/k$.

3. $\Rightarrow$ 1. Припустимо, що множина A не є передкомпактом. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що жодна скінченна множина не є ε-сіткою для A. Доведемо існування послідовності $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, в якої всі попарні відстані між елементами більші або дорівнюють ε. У такій послідовності не може бути підпослідовностей Коші. Побудова здійснюється у такий спосіб. За a_1 візьмемо довільний елемент множини A. Множина $C_1 = \{a_1\}$ не утворює ε-сітки, отже, існує $a_2 \in A$ з $\rho(a_2, C_1) \geqslant \varepsilon$. У множини $C_2 = \{a_1, a_2\}$ попарні відстані між елементами більші або дорівнюють ε. C_2 не утворюють ε-сітки, отже, існує $a_3 \in A$ з $\rho(a_3, C_2) \geqslant \varepsilon$. Нехай вже побудовано елементи $a_1, ..., a_n$ шуканої послідовності з попарними відстанями не меншими за ε. Множина $C_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ скінченна і, отже, не є ε-сіткою для A. Точку $a_{n+1} \in A$ виберемо так, щоб відстань від a_{n+1} до C_n була не менша, ніж ε. Продовжуючи описаний процес необмежено, одержимо шукану послідовність. $\square$

У повних просторах результат можна посилити.

Теорема 2. *Нехай A — замкнена підмножина повного метричного простору X. Тоді такі умови еквівалентні:*

1. *A — компактна множина.*
2. *A — передкомпакт.*
3. *З будь-якої послідовності елементів множини A можна вибрати збіжну підпослідовність.*

Доведення. Еквівалентніть 2. $\Leftrightarrow$ 3. випливає з попередньої теореми; імплікація 1. $\Rightarrow$ 3. — з наявності граничної точки у будь-якої підмножини компакта, зокрема у будь-якої підпослідовності. Залишилось довести імплікацію 2. $\Rightarrow$ 1. Для цього зазначимо спочатку, що для будь-якої центрованої сім'ї $\mathfrak{W}$ підмножин замкненого передкомпакта і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує така замкнена підмножина B цього передкомпакта, що сім'я $\mathfrak{W}_1 = \{V \cap B : V \in \mathfrak{W}\}$ буде знову центрованою сім'єю і $\operatorname{diam}(B) < \varepsilon$. Справді, досить покрити передкомпакт скінченним числом замкнених підмножин діаметра меншого ε; тоді принаймні одну з цих підмножин можна взяти за B.

Доведемо тепер, що будь-яка центрована сім'я $\mathfrak{W}$ замкнених підмножин нашого передкомпакта A має спільний елемент. За теоремою 1 п. 1.2.3 це й означатиме компактність множини A.

Отож A — передкомпакт, $\mathfrak{W}$ — центрована сім'я, тому, існує така замкнена підмножина $B_1 \subset A$ з $\operatorname{diam}(B_1) < 1$, що сім'я $\mathfrak{W}_1 = \{V \cap B_1 : V \in \mathfrak{W}\}$ знову центрована. B_1 — знову передкомпакт, як наслідок, існує така замкнена підмножина $B_2 \subset B_1$ з $\operatorname{diam}(B_2) < 1/2$, що сім'я $\mathfrak{W}_2 = \{V \cap B_2 \colon V \in \mathfrak{W}\}$ центрована. Продовжуючи цей процес, отримаємо спадний ланцюжок $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$ замкнених підмножин з $\operatorname{diam}(B_n) \to 0$, для кожної з яких сім'я $\{V \cap B_n \colon V \in \mathfrak{W}\}$ центрована. Зокрема, всі перетини $V \cap B_n$, $V \in \mathfrak{W}$, $n \in \mathbb{N}$ не порожні. Згідно з принципом вкладених множин (п.1.3.3), $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ не порожній і складається з однієї точки, яку ми позначимо літерою x. Розглянемо довільний елемент $V \in \mathfrak{W}$. Оскільки для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ перетин $V \cap B_n$ не порожній і $x \in B_n$, то $\rho(x, V) < \operatorname{diam}(B_n)$ при всіх n. Звідси $\rho(x, V) = 0$, тобто x є шуканою спільною точкою всіх множин сім'ї. □

Вправи

1. Будь-який компактний метричний простір сепарабельний.
2. Декартів добуток передкомпактів у метриці із вправи 4 п. 1.3.1 — знову передкомпакт, а компактів — компакт.
3. Нехай K, X — метричні простори, $f \colon K \to X$ — неперервна функція і K — компакт. Тоді f рівномірно неперервна.

Для підмножини A метричного простору X через $n_A(r)$ позначимо найбільше можливе число попарно неперетинних куль радіуса r з центрами в точках множини A.

Доведіть, що:

4. A — передкомпакт тоді і тільки тоді, коли величина $n_A(r)$ скінченна при будь-якому r.
5. Функція $n_A(r)$ не зростає зі зростанням r.
6. Функція $n_A(r)$ обмежена (в околі нуля) тоді і тільки тоді, коли множина A скінченна.
7. Нехай A — обмежена множина з непорожньою внутрішністю в $\mathbb{R}^m$. Тоді $n_A(r)$ має той самий порядок зростання в нулі, що й r^{-m}. Тобто $n_A(r)$ можна використовувати для означення виміру множини A.

Зазначимо, що точні значення $n_A(r)$ нелегко підрахувати навіть для відносно простих множин, як, скажімо, для кулі в $\mathbb{R}^3$. Класична задача про найщільніше упакування куль в $\mathbb{R}^3$ розв'язана лише в 1998 році! Задача ж про можливість точної оцінки чисел $n_A(r)$ для множин в $\mathbb{R}^m$ має важливе прикладне значення. Наприклад, якщо сигнал, який складається з m числових компонент, ототожнити з точкою в $\mathbb{R}^m$, то відстань характеризує легкість розпізнавання цих сигналів. Відповідно, питання про можливе число розпізнавальних сигналів цієї потужності зводиться до пошуку якомога більшого числа попарно непретинних куль радіуса r у фіксованій кулі.

1.4.2. Простір неперервних функцій. Теорема Арцела

Нехай Γ — деяка множина, а X — метричний простір. На множині всіх обмежених функцій, визначених на Γ зі значеннями в X, задамо метрику рівністю $\rho(f,g) = \sup\limits_{t\in\Gamma} \rho(f(t), g(t))$.[2]

Отриманий метричний *простір обмежених функцій* позначається $l_\infty(\Gamma, X)$. Метрика цього простору називається *рівномірною метрикою*, і збіжність в $l_\infty(\Gamma, X)$ означає рівномірну збіжність.

Теорема 1. *Якщо X — повний метричний простір, то $l_\infty(\Gamma, X)$ також повний.*

Доведення. Нехай (f_n) — довільна послідовність Коші в $l_\infty(\Gamma, X)$. Тоді для будь-якого $t \in \Gamma$ значення $f_n(t)$ також утворюють послідовність Коші в X:

$$\rho(f_n(t), f_m(t)) \leqslant \rho(f_n, f_m) \to 0 \quad n, m \to \infty.$$

Оскільки простір X повний, у послідовності $(f_n(t))$ існує границя, яку ми позначимо $f(t)$. Щоб довести, що (f_n) збігається до f рівномірно, розпишемо детальніше означення послідовності Коші: $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n, m > N$ виконується нерівність $\rho(f_n, f_m) \leqslant \varepsilon$. Розписавши означення відстані в $l_\infty(\Gamma, X)$, одержуємо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $N \in \mathbb{N}$, що для будь-яких $t \in \Gamma$ і будь-яких $n, m > N$ справджується $\rho(f_n(t), f_m(t)) \leqslant \varepsilon$. Переходячи в останній нерівності до границі при $m \to \infty$, отримуємо, що $\rho(f_n(t), f(t)) \leqslant \varepsilon$ для всіх $t \in \Gamma$. З останнього співвідношення і обмеженості функції f_n випливає обмеженість функції f, тобто $f \in l_\infty(\Gamma, X)$. Далі, при $n > N$ візьмемо в нерівності $\rho(f_n(t), f(t)) \leqslant \varepsilon$ супремум по $t \in \Gamma$ і отримаємо, що $\rho(f_n, f) \leqslant \varepsilon$ для будь-якого $n > N$. Отже, $f_n \to f$ в метриці простору $l_\infty(\Gamma, X)$, чим і доведено повноту цього простору. □

Нехай K — компактний топологічний простір, а X — метричний простір. Множина неперервних функцій з K в X, наділена рівномірною метрикою, називається *простором неперервних функцій* і позначається $C(K, X)$. Відстань в $C(K, X)$ можна виразити формулою

$$\rho(f,g) = \max_{t\in K} \rho(f(t), g(t)).$$

Згідно з відомою з курсу аналізу теоремою про неперервність границі рівномірно збіжної послідовності неперервних функцій, $C(K, X)$ — замкнена підмножина простору $l_\infty(K, X)$. Тому якщо X — повний метричний простір, то $C(K, X)$ також повний.

Нагадаємо також, що будь-яка функція $f \in C(K, X)$ рівномірно неперервна (як неперервна функція на метричному компакті).

Лема 1. *Якщо X — передкомпакт, а множина Γ скінченна, то $l_\infty(\Gamma, X)$ — передкомпакт.*

[2]Буква ρ в останній формулі використовується в двох різних значеннях: зліва — як відстань в $l_\infty(\Gamma, X)$, а справа — як відстань в X. Усунути цю нечіткість можна, позначивши метрику простору через ρ_X.

Доведення. Нехай A — скінченна ε-сітка для X. Тоді множина $l_\infty(\Gamma, A)$ всіх функцій з Γ в A, буде скінченною ε-сіткою для $l_\infty(\Gamma, X)$. □

Лема 2. *Нехай сім'я G неперервних функцій утворює передкомпакт в $C(K, X)$. Тоді множина $G(K) = \bigcup_{f \in G} f(K)$ — передкомпакт в X.*

Доведення. Нехай $G_1 \subset G$ — скінченна ε-сітка для G. Розглянемо $G_1(K) = \bigcup_{f \in G_1} f(K)$. Оскільки кожна з множин $f(K)$ компактна (образ компакту при неперервному відображенні), то $G_1(K)$ компактна як скінченне об'єднання компактів. Водночас $G_1(K)$ утворює ε-сітку для $G(K)$. За лемою 2 з попереднього пункту 1.4.1, $G(K)$ — передкомпакт в X. □

Означення. Нехай K, X — метричний простір. Сім'я G функцій з K в X, називається *одностайно неперервною*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якої функції $f \in G$ і будь-яких точок $t_1, t_2 \in K$ з $\rho(t_1, t_2) < \delta$ відстань між образами цих точок не перевищує ε:

$$\rho(t_1, t_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(t_1), f(t_2)) \leqslant \varepsilon.$$

Лема 3. *Нехай K, X — метричні простори, K — компакт і сім'я G неперервних функцій з K в X — передкомпакт в $C(K, X)$. Тоді сім'я G одностайно неперервна.*

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо $G_1 \subset G$ — скінченну ε-сітку для G. Оскільки кожна функція $g \in G_1$ рівномірно неперервна і цих функцій скінченне число, існує таке $\delta > 0$, що для будь-якої функції $g \in G_1$ і будь-яких точок $t_1, t_2 \in K$ з $\rho(t_1, t_2) < \delta$ виконується оцінка $\rho(g(t_1), g(t_2)) \leqslant \varepsilon$. Нехай $f \in G$. Згідно з означенням ε-сітки, існує $g \in G_1$ з $\rho(f, g) < \varepsilon$. За нерівністю трикутника, для будь-яких $t_1, t_2 \in K$ з $\rho(t_1, t_2) < \delta$ маємо:

$$\rho(f(t_1), f(t_2)) \leqslant \rho(f(t_1), g(t_1)) + \rho(g(t_1), g(t_2)) + \rho(g(t_2), f(t_2)) \leqslant 3\varepsilon.$$

З огляду на довільність ε одностайну неперервність сім'ї G доведено. □

Теорема Арцела. *Нехай K, X — метричні простори, K — компакт і $G \subset C(K, X)$. Для того, щоб сім'я функцій G була передкомпактом, необхідно і досить, щоб виконувались дві умови: 1) G одностайно неперервна і 2) образи функцій сім'ї G містяться в деякому передкомпакті $Y \subset X$, спільному для всіх функцій сім'ї G.*

Доведення. Необхідність вже доведено у наведених вище лемах 2 і 3. Доведемо достатність. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і відповідне йому $\delta = \delta(\varepsilon)$ з означення одностайної неперервності сім'ї G. Виберемо скінченну δ-сітку Γ в K. Розглянемо відображення обмеження $F\colon G \to l_\infty(\Gamma, Y)$, яке ставить у відповідність кожній функції $f \in G$ її обмеження на Γ. За лемою 1, увесь $l_\infty(\Gamma, Y)$ — передкомпакт, отже, $F(G)$ — також передкомпакт. Тому існує скінченна множина $G_1 \subset G$, для якої $F(G_1)$ — ε-сітка в $F(G)$. Доведемо, що ця множина G_1 є 3ε-сіткою для G.

Справді, нехай $f \in G$ — довільна функція. Згідно з означенням множини G_1, існує елемент $g \in G_1$ з $\rho(F(f), F(g)) < \varepsilon$. Розшифрувавши означення відображення F і метрики в $l_\infty(\Gamma, Y)$, отримуємо, що $\rho(f(t), g(t)) < \varepsilon$ для будь-якого $t \in \Gamma$. Далі, для будь-якого $x \in K$ існує $t \in \Gamma$ з $\rho(x, t) < \delta$ (Γ — це δ-сітка в K). Згадавши, нарешті, що δ взяте з означення одностайної неперервності, маємо:

$$\rho(f(x), g(x)) \leqslant \rho(f(x), f(t)) + \rho(f(t), g(t)) + \rho(g(t), g(x)) < 3\varepsilon.$$

Оскільки нерівність справджується для всіх $x \in K$, то й

$$\rho(f,g) = \max_{x \in K} \rho(f(x), g(x)) < 3\varepsilon.$$

Отож, у G для будь-якого $\varepsilon > 0$ є скінченна 3ε-сітка. Теорему доведено. □

Наслідок. *Якщо в умовах теореми Арцела простір X повний, то для компактності множини $G \subset C(K,X)$ необхідно і досить, щоб виконувались три умови: 1) G одностайно неперервна, 2) образи функцій сім'ї G містяться в деякому передкомпакті $Y \subset X$, спільному для всіх функцій сім'ї G, і 3) G — замкнена підмножина простору $C(K,X)$.*

У найбільш важливих часткових випадках, коли простір значень X — це $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ чи $\mathbb{R}^n$, передкомпакти в X — це просто обмежені множини. Умову 2) теореми Арцела в цьому випадку можна сформулювати простіше: сім'я G рівномірно обмежена, тобто $\sup_{f \in G,\, t \in K} \rho(0, f(t)) < \infty$. Що ж стосується одностайної неперервності, наведемо одну просту, але дуже зручну в застосуваннях достатню умову: якщо всі функції сім'ї G підпорядковуються умові Ліпшиця зі спільною сталою, тобто

$$\exists c > 0\ \forall f \in G\ \forall t, \tau \in K\ \rho(f(t), f(\tau)) \leqslant c\rho(t,\tau),$$

то G одностайно неперервна.

Вправи

1. Чому відстань між двома елементами простору $C(K,X)$ скінченна?

2. Чому в означенні рівномірної метрики в $C(K,X)$ можна писати «max», а не «sup»?

3. Перевірити аксіоми метрики для рівномірної метрики.

4. Якщо $C(K,X)$ — повний метричний простір, то X також повний.

Позначимо через $C[0,1]$ метричний простір $C([0,1],\mathbb{R})$.

5. Жодна непорожня відкрита множина в $C[0,1]$ не буде одностайно неперервною. Зокрема, в $C[0,1]$ є непередкомпактні обмежені множини.

Для наступних множин в $C[0,1]$ перевірте, чи є вони a) обмеженими, b) відкритими, c) замкненими, d) одностайно неперервними, e) передкомпактними, f) компактними:

6. $A_1 = \{f : \forall t \in [0,1] \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant 1\}$.

7. $A_2 = \{f : \forall t \in [0,1] \quad f(t) > 0\}$.

8. Множина A_3 тих функцій з A_2, для яких $\int_0^1 f(t)dt < 1$.

9. Множина A_4 неперервно диференційовних функцій з $\max\limits_{t \in [0,1]} |f'(t)| \leqslant 1$.

10. Множина A_5 неперервно диференційовних функцій з $\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \leqslant 1$.

11. Множина A_6 неперервно диференційовних функцій з $\int_0^1 |f'(t)| dt \leqslant 1$.

12. $A_7 = A_1 \cap A_4$.

13. Множина A_8 всіх опуклих функцій з A_1.

1.4.3. Застосування: ізопериметрична задача

Ізопериметричною задачею на площині називається задача про відшукання серед усіх замкнених опуклих кривих заданої довжини кривої, що обмежує множину найбільшої площі. Ця класична задача, яка розглядалась ще стародавніми греками[2], має чисельні узагальнення, які відіграють важливу роль у геометрії опуклих тіл (див. книгу В.

[2] З ізопериметричною задачею пов'язана легенда про царицю Дідону — засновницю Карфагена. Коли колоністи прибули на нове місце, тубільці прийняли їх не дуже люб'язно. Відповідь на прохання надати ділянку для будівництва була такою: «Вам дозволено зайняти під своє місто стільки місця, скільки можна відгородити шкірою одного бика». Проте Дідона не розгубилась. Вона наказала розрізати шкіру на тонкі ремені і, зв'язавши їх разом, позначити межу майбутнього поселення. При цьому, вочевидь, бажано було отримати якнайбільшу площу, тобто розв'язати ізопериметричну задачу.

Бляшке [Bla]) і функціональному аналізі (див. монографію В. Мільмана і Г. Шехтмана [M-S]). У припущенні існування розв'язку ізопериметричної задачі можна довести елементарними методами, що шуканою оптимальною кривою може бути лише коло. Деякі з цих елементарних доведень, наприклад, чотиришарнірний метод Штейнера (§1 книги В. Бляшке), настільки прості та вишукані, що їх нерідко включають у програму шкільних математичних гуртків. Доведення ж існування розв'язку виявилось досить непростим і було вперше отримано Вейєрштрассом у 70-х роках XIX століття. Відтоді математика у своєму розвитку пройшла довгий шлях, і ми, озброєні такими потужними засобами, як теорія компактів і, зокрема, теорема Арцела, здатні довести згадану теорему Вейєрштрасса без особливих зусиль.

Позначимо через G сім'ю функцій $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, які задовольняють умову Ліпшиця зі сталою 1 і для яких $f([0,2\pi])$ — опукла крива (тобто функції з G — це параметрично задані опуклі криві). Кожну опуклу криву довжини не більше ніж 2π, яка починається і закінчується в нулі, можна ототожнити з деякою функцією з G. Для цього достатньо розглянути природну параметризацію кривої, тобто за параметр взяти довжину відрізка кривої від нуля до даної точки. Для кожної функції $g \in G$ через $s(g)$ позначимо площу, обмежену кривою $f([0,2\pi])$.

Теорема. *Сім'я функцій G є компактом в $C[0,2\pi]$; s — неперервна функція на G, і, отже, s досягає свою верхню межу на G.*

Доведення. Як зазначено наприкінці попереднього пункту, наявність спільної сталої Ліпшиця означає одностайну неперервність сім'ї. Далі, для будь-якої функції $g \in G$ маємо

$$\rho(0, g(t)) = \rho(g(0), g(t)) \leqslant |t| \leqslant 2\pi;$$

тобто сім'я G рівномірно обмежена. Рівномірна (і навіть поточкова) границя функцій, які задовольняють умову Ліпшиця зі сталою 1, знову задовольняє умову Ліпшиця з тією ж сталою. Опуклість також не порушується при такому граничному переході, тобто сім'я G замкнена. Отже, компактність сім'ї G доведено. Залишилось перевірити неперервність функції s. Для $f_1, f_2 \in G$ позначимо фігури на площині, обмежені цими кривими, через F_1 і F_2 відповідно, а $\rho(f_1, f_2)$ позначимо через ε. Через $F_{1,\varepsilon}$ позначимо множину всіх точок, які знаходяться від F_1 на відстані, яка не перевищує ε. Виберемо на відрізку $[0,2\pi]$ ε-сітку $t_1, ..., t_n$ з $n < 2\pi/\varepsilon$. З огляду на умову Ліпшиця, множина $f_1(t_1), ..., f_1(t_n)$ є ε-сіткою на кривій $f_1([0,2\pi])$. З центром у кожній з точок $f_1(t_k)$ побудуємо круг радіуса 2ε. Об'єднання цих n кругів і множини F_1 буде покривати всю множину $F_{1,\varepsilon}$ і, отже, буде покривати множину F_2. Маємо

$$s(f_2) \leqslant s(f_1) + 4n\pi\varepsilon^2 \leqslant s(f_1) + 8\pi^2\varepsilon.$$

Враховуючи рівноправність функцій f_1 і f_2, тобто, що в наведеному вище міркуванні їх можна було поміняти місцями, робимо висновок, що

$$|s(f_2) - s(f_1)| \leqslant 8\pi^2\varepsilon = 8\pi^2\rho(f_2, f_1),$$

тобто відображення s не тільки неперервне, а навіть задовольняє умову Ліпшиця. □

Вправи

1. Доведіть опуклість множини $F_{1,\varepsilon}$ з доведення попередньої теореми.

2. Доведіть включення $F_{1,\varepsilon} \supset F_2$.

3. Відновіть деталі доведення замкненості сім'ї G в $C\,[0,2\pi]$.

4. Доведіть, що супремум площ усіх опуклих фігур заданого периметра l збігається з супремумом площ усіх фігур, обмежених спрямними кривими довжини l. Іншими словами, умова опуклості в ізопериметричній задачі неістотна.

1.4.4. Канторова множина

Трійковим разкладом числа $x \in [0,1]$ називається зображення числа у вигляді $x = \frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{3^2}+\frac{x_3}{3^3}+...$, де *цифри розкладу* x_k — це 0, 1 або 2. Скорочений запис — $x = (0.x_1x_2...)_3$. Деякі числа мають по два трійкових розклади. Наприклад, $(0.10000...)_3 = (0.02222...)_3$. За означенням, *канторова множина* — це підмножина $\mathcal{K}$ відрізка $[0,1]$, яка складається з чисел, що мають принаймні один трійковий розклад, який не містить цифри 1. Структуру канторової множини простіше зрозуміти, розглянувши його доповнення. Так, числа, чиї трійкові розклади обов'язково мають 1 як першу цифру, утворюють інтервал $\Delta_1^1 = (\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. Числа, в яких перша цифра не дорівнює 1, а друга — обов'язково дорівнює 1, разом утворюють два інтервали $\Delta_1^2 = (\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ і $\Delta_2^2 = (\frac{7}{9},\frac{8}{9})$. Таке міркування дає опис всього доповнення до $\mathcal{K}$. Відповідно, $\mathcal{K}$ можна уявляти собі як результат такої побудови: на першому кроці з відрізка $[0,1]$ відкидаємо його середню третину — проміжок $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. Залишаться два відрізки — $[0,\frac{1}{3}]$ і $[\frac{2}{3},1]$. У кожному з них відкинемо його середню третину. Залишаться вже чотири відрізки. Знову в кожному із відрізків, що залишилися, відкинемо середню третину. Те, що залишиться по закінченню такого нескінченного процесу — це і є канторова множина $\mathcal{K}$.

Вправи

1. Канторова множина $\mathcal{K}$ замкнена.

2. $\mathcal{K}$ — досконала множина, тобто не має ізольованих точок.

3. Потужність канторової множини дорівнює потужності континуума.

4. Опишіть швидкість зростання в нулі величини $n_{\mathcal{K}}(r)$ для канторової множини (означення див. у вправах п. 1.4.1).

5. Канторова множина ніде не щільна на відрізку.

6. Для будь-якого компактного метричного простору X існує сюр'єктивне неперервне відображення $f\colon \mathcal{K} \to X$.

7. Розглянемо множину $2^{\mathbb{N}}$ всіх підмножин натурального ряду в такій топології: базу околів підмножини $A \subset \mathbb{N}$ утворюють сім'ї підмножин $U_n(A) = \{B \subset \mathbb{N} : B \cap \{1,2,...,n\} = A \cap$
Перевірте, що $2^{\mathbb{N}}$ в цій топології гомеоморфна канторовій множині.

Коментарі до вправ

Як ми вже зазначали раніше, даний розділ має допоміжний характер і значна частина матеріалу вже відома читачеві з інших курсів. Тому ми не оснащуємо (снабжаем)? перший розділ коментарями до вправ. Розв'язання переважної більшості вправ можна знайти у стандартних підручниках з топології [Kur], [Kel], [Bur].