Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Заварзіна Олеся Олегівна

УДК 517.982, 515.124

ДИСЕРТАЦІЯ

«ІЗОМЕТРІЇ ТА СТИСКАННЯ ПІДМНОЖИН БАНАХОВОГО ПРОСТОРУ»

Спеціальність 111 – «Математика»
(Галузь знань 11 - «Математика та статистика»)
Подається на здобуття ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

____________________ О. О. Заварзіна

Науковий керівник: Кадець Володимир Михайлович,
доктор фізико-математичних наук, професор.

Харків – 2020

АНОТАЦІЯ

Заварзіна О. О. Ізометрії та стискання підмножин банахового простору. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика (Галузь знань 11 – Математика та статистика). – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2020.

У вступі обґрунтовано вибір теми дисертаційної роботи, сформульовані мета, об'єкт, предмет, завдання та методи дослідження. Надані відомості про наукову новизну і значення отриманих результатів, зв'язок з науковими програмами, планами, темами.

Перший розділ присвячений огляду наукової літератури та історії розвитку питань, що розглядаються в дисертації.

Означення. Метричний простір називається пластичним, якщо кожна нерозтягувальна бієкція цього простору на себе є ізометрією.

Результати дисертації зосереджені навколо наступних питань:

Питання 1. Одиничні кулі яких банахових просторів є пластичними?

Питання 2. Як можна описати пластичні опуклі обмежені замкнені підмножини гільбертового простору?

Проблема Тінглі. Чи можна ізометрію між одиничними сферами двох банахових просторів продовжити до лінійного бієктивного відображення між цими просторами?

Перші два питання вмотивовані результатами та прикладами з [9], [20] і [6]. А саме: пластичністю цілком обмежених метричних просторів та прикладами не цілком обмежених і навіть необмежених пластичних просторів; пластичністю одиничних куль строго опуклих банахових просторів, зокрема гільбертових, та прикладом непластичного еліпсоїда у гільбертовому просторі.

Проблема Тінглі, незважаючи на велику кількість часткових результатів, як то [13] чи [8], є нерозв'язаною навіть у двовимірному

випадку. У [23] проблема Тінглі розв'язана для так званих локальних GLспросторів, зокрема, GL-просторів, а також доведено, що c_0-, ℓ_1- і ℓ_∞-суми зберігають клас GL-просторів. У цьому світлі нас зацікавили властивості GL-просторів, зокрема описання GLR-просторів.

Другий розділ присвячений вивченню питання 1, та його природному розширенню.

Питання 3. Для яких пар, взагалі кажучи, різних банахових просторів нерозтягувальна бієкція між їхніми одиничними кулями має бути ізометрією?

Головні результати розділу – теореми 2.9, 2.23, 2.20, 2.28, 2.38 – розв'язують цю проблему для пар просторів (X, Y), де X – довільний банахів простір, а Y – строго опуклий, ℓ_1, скінченновимірний, сума строго опуклих просторів по ℓ_1 та такий простір, одинична сфера якого є об'єднанням усіх своїх скінченновимірних поліедральних крайніх підмножин відповідно. У теоремі 2.10 ця задача розв'язана для довільного простору Y і строго опуклого простору X. Таким чином, відповідь на питання 1 додатково отримана для простору ℓ_1, суми строго опуклих просторів по ℓ_1 та простору, одинична сфера якого є об'єднанням усіх своїх скінченновимірних поліедральних крайніх підмножин.

У **третьому розділі** містяться результати з приводу питання 2. А саме, отриманий критерій лінійної пластичності тілесного еліпсоїда у сепарабельному гільбертовому просторі.

Під еліпсоїдом у гільбертовому просторі ми розуміємо множину вигляду

$$E = \left\{ x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n \in H : \sum_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{x_n}{a(n)} \right|^2 \leqslant 1 \right\},$$

де $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ позначає ортонормований базис, а числа $a(n) > 0$ називають півосями E. Ми накладаємо на функцію $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ вимоги:

$$\inf_n a(n) > 0,$$

$$\sup_n a(n) < +\infty,$$

що забезпечує непорожність внутрішності і обмеженість E. Позначимо $A = a(\mathbb{N})$ множину півосей E, і для кожного $t \in A$ ми називатимемо його кратністю кількість елементів у множині $a^{-1}(t)$.

Означення. Нехай M – підмножина нормованого простору X. Будемо говорити, що M лінійно пластична, якщо будь-який лінійний оператор $T : X \to X$, чиє обмеження на M є бієктивним нерозтягуючим відображенням з M на M, є ізометрією на M.

Головний результат розділу наступний.

Теорема. Еліпсоїд E є лінійно пластичним тоді і тільки тоді, коли кожна підмножина B множини A півосей E, що складається більш ніж з одного елемента, має принаймні одну з наступних властивостей:

1. B має максимум скінченної кратності;
2. B має мінімум скінченної кратності.

Четвертий розділ присвячений вивченню властивостей GL-просторів.

Означення. Замкненою зрізкою одиничної кулі B_X банахового простору X називається підмножина B_X вигляду

$$\mathcal{S}(x^*, \alpha) = \{x \in B_X : x^*(x) \geqslant 1 - \alpha\},$$

де $x^* \in S_{X^*}$ і $\alpha \in (0, 1)$.

Означення. Банахів простір X називається узагальнено-пишним, або GL-простором, якщо для будь-якого $x \in S_X$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться зрізка $\mathcal{S}(x^*, \varepsilon)$, така що $x \in \mathcal{S}(x^*, \varepsilon)$ і

$$\operatorname{dist}(y, \mathcal{S}(x^*, \varepsilon)) + \operatorname{dist}(-y, \mathcal{S}(x^*, \varepsilon)) < 2 + \varepsilon$$

для всіх $y \in S_X$.

Означення. Гранню одиничної кулі банахового простору X будемо називати непорожню множину вигляду

$$\mathcal{F}(x^*) = \{x \in B_X : x^*(x) = 1\},$$

де $x^* \in S_{X^*}$.

Означення. Підмножину $A \subset B_X$ називатимемо пухкою, якщо для будь-якого $y \in S_X$ знайдуться $a_1, a_2 \in A$, такі що

$$\|y - a_1\| + \|y + a_2\| \leqslant 2.$$

Означення. Нормований простір X називається ультра-GL відносно підпростору $W \subset X^*$ (ультра-GL(W)-простір), якщо для будь-якого $x \in S_X$ знайдеться $x^* \in S_W$, такий що $x \in \mathcal{F}(x^*)$ і $\mathcal{F}(x^*)$ пухка. У випадку, коли $W = X^*$, простір X будемо називати ультра-GL.

Нехай $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ – нормований простір. Позначимо e_k, $k = 1, \dots, n$, елементи канонічного базису: координата з номером k вектора e_k дорівнює 1, усі інші – нулю. Норму $\|\cdot\|_E$ будемо називати абсолютною, якщо вона задовольняє наступні умови:

(i) $\|e_k\|_E = 1$, $k = 1, \dots, n$;

(ii) для будь-якого $a = (a_1, ..., a_n)$ вектор

$$|a| := (|a_1|, ..., |a_n|)$$

має таку ж норму, як a:

$$\|(a_1, ..., a_n)\|_E = \|(|a_1|, ..., |a_n|)\|_E.$$

Нехай $X_1, \dots, X_n$ – нормовані простори, і $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ – простір з абсолютною нормою. E-сума просторів X_k (позначимо її $E(X_k)_1^n$) – це векторний простір усіх $x = (x_1, ..., x_n)$, $x_k \in X_k$, $k = 1, \dots, n$, з нормою

$$\|x\| = (\|x_1\|, \dots, \|x_n\|)_E.$$

Означення. Простір $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ з абсолютною нормою називається GL-зберігаючим (коротко – GLR-простором), якщо для кожного набору $X_1, \dots, X_n$ GL-просторів відповідна E-сума $E(X_k)_1^n$ є GL-простором.

Означення. Нехай $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ – простір з абсолютною нормою, $d^* = (d_1, ..., d_n) \in \operatorname{ext}(B_{E^*})$ з $d_k \geqslant 0$. Грань $\mathcal{F}(d^*) \subset S_E$ називається монотонно пухкою якщо, позначивши $D = \{k : d_k \neq 0\}$, для будь-якого $a = (a_1, ..., a_n) \in S_E$ з $a_k \geqslant 0$ і будь-якого $z = (z_1, ..., z_n) \in B_E$ з

$$0 \leqslant z_k \leqslant a_k \text{ для } k \in D$$

знайдеться $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathcal{F}(d^*)$, такий що $\|b - z\| = 1 - d^*(z)$ і $b_k \geqslant a_k$ для $k \in D$. Простір E називається GL-монотонним (GLM-простором), якщо для будь-якого $d^* \in \text{ext}(B_{E^*})$ з $d_k \geqslant 0$ відповідна грань $\mathcal{F}(d^*) \subset S_E$ є монотонно пухкою.

У розділі детально розглядається взаємодія наведених вище понять. Головними результатами розділу є наступні теореми та наслідок.

Теорема. Одинична куля будь-якого скінченновимірного GL-простору є багатогранником з пухкими максимальними гранями.

Теорема. Простір $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ з абсолютною нормою є GL-зберігаючим тоді і тільки тоді, коли він GL-монотонний.

Теорема. Нехай X – банахів простір, і $\mathfrak{U}$ – нетривіальний ультрафільтр на $\mathbb{N}$. Тоді наступні твердження еквівалентні:

(I) X – GL-простір,

(II) $X^{\mathfrak{U}}$ – ультра-GL відносно підпростору $W = (X^*)^{\mathfrak{U}}$.

Теорема. Нехай X – дійсний двовимірний GL-простір. Тоді X ізометричний або простору, чия одинична куля є шестикутником з одиничними ребрами, або $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\ell_1})$.

Наслідок. Єдиними двовимірними GLR-просторами є ℓ_1^2 і ℓ_∞^2.

Ключові слова: нерозтягувальне відображення, одинична куля, пластичний простір, строго опуклий простір, еліпсоїд, лінійно-пластичний простір, проблема Тінглі, властивість Мазура-Улама, поліедральний простір, GL-простір, ультрадобуток.

ABSTRACT

Zavarzina O. O. Isometries and contractions of Banach space subsets. Qualification scholarly paper: a manuscript.

Thesis submitted for obtaining the Doctor of Philosophy degree in Mathematics and statistics Sciences, Speciality 111 – Mathematics. – V. N. Karazin Kharkiv National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2020.

In **the introduction** the choice of the topic of the thesis is explained, the goal, object, subject, tasks and methods of research are formulated. The information about the scientific novelty and the significance of the results obtained, connection with scientific programs, plans, themes is provided. Also, the introduction contains information on the publications of the applicant with an indication of the personal contribution and the approbation of the thesis results.

The first section is devoted to the survey of the literature and short history of questions considered in the thesis.

Definition. A metric space is called expand-contract plastic if every non-expansive bijection of this space onto itself is an isometry.

The results of the thesis are concentrated around the following problems:

Problem 1. What Banach spaces have expand-contract plastic unit balls?

Problem 2. Is there a description of expand-contract plastic convex bounded closed subsets of Hilbert spaces?

Tingley's problem. Is it true that a bijective isometry between the unit spheres of two real Banach spaces extends to a linear isometry of the corresponding spaces?

The first two questions are motivated by results and examples from [9], [20] and [6]. Namely, the plasticity of totally bounded metric spaces and examples of not totally bounded and even unbounded plastic spaces; plasticity of the unit balls of strictly convex Banach spaces, in particular Hilbert spaces, and the example of a not-EC-plastic ellipsoid in the Hilbert space.

In spite of a number of partial positive results, for example [13] or [8], in general case, Tingley's problem is still open even in dimension two. In [23] Tingley's problem is solved for so called locally-GL-spaces, in particular, GL-spaces; it is shown that the class of GL-spaces is stable under c_0-, ℓ_1- and ℓ_∞-sums. That is why we are interested in the properties of GL-spaces, in particular, in description of GLR-spaces.

The second section is devoted to studying of Problem 1 and its natural extension.

Problem 3. For which pairs of different, generally speaking, Banach spaces any non-expansive bijection between their unit balls appears to be an isometry?

The main results of the section are Theorems 2.9, 2.23, 2.20, 2.28, 2.38, which solve this problem for pairs of spaces (X, Y), where X is an arbitrary Banach space and Y is strictly convex, ℓ_1, finite-dimensional, ℓ_1-sum of the collection of strictly convex Banach spaces or the space whose unit sphere is the union of all its finite-dimensional polyhedral extreme subsets correspondingly. Theorem 2.10 solves this problem for an arbitrary Banach space Y and strictly convex Banach space X. So, the answer to Problem 1 is additionally received for ℓ_1, ℓ_1-sum of the collection of strictly convex Banach spaces and for the space whose unit sphere is the union of all its finite-dimensional polyhedral extreme subsets.

In **the third section** the results concerning Problem 2 are contained. Namely, the criterion for linear plasticity of a solid ellipsoid in a separable Hilbert space is obtained.

An ellipsoid in a Hilbert space is a set of the form

$$E = \left\{ x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n \in H : \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{x_n}{a(n)} \right|^2 \leqslant 1 \right\},$$

where $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ denotes a fixed orthonormal basis and the positive numbers $a(n) > 0$ are called semi-axes of E. We suppose that the corresponding function $a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ is bounded above and below, which ensures solidness and boundedness of E. Denote by $A = a(\mathbb{N})$ the set of semi-axes of E, and for every $t \in A$ we call its mutiplicity the number of elements in the set $a^{-1}(t)$.

Definition. Let M be a subset of a normed space X. We say that M is linearly expand-contract plastic (briefly LEC-plastic) if every linear operator $T : X \to X$ whose restriction on M is a non-expansive bijection from M onto M is an isometry on M.

The main result of the section is following.

Theorem. The ellipsoid E is LEC-plastic if and only if every subset B of the set A of semi-axes of E that consists of more than one element possesses at least one of the following properties:

1. B has a maximum of finite multiplicity;
2. B has a minimum of finite multiplicity.

The fourth section is devoted to the study of the properties of GL-spaces.

Definition. A closed slice of the unit ball B_X of a Banach space X is a subset of B_X of the form

$$\mathcal{S}(x^*, \alpha) = \{x \in B_X : x^*(x) \geqslant 1 - \alpha\},$$

where $x^* \in S_{X^*}$ and $\alpha \in (0, 1)$.

Definition. A Banach space X is said to be generalized-lush (GL-space for short) if for every $x \in S_X$ and every $\varepsilon > 0$ there exists a slice $\mathcal{S}(x^*, \varepsilon)$ with $x^* \in S_{X^*}$ such that $x \in \mathcal{S}(x^*, \varepsilon)$ and

$$\operatorname{dist}(y, \mathcal{S}(x^*, \varepsilon)) + \operatorname{dist}(-y, \mathcal{S}(x^*, \varepsilon)) < 2 + \varepsilon$$

for all $y \in S_X$.

Definition. A face of the unit ball of a Banach space X is a nonempty set of the form

$$\mathcal{F}(x^*) = \{x \in B_X : x^*(x) = 1\},$$

where $x^* \in S_{X^*}$.

Definition. We call a subset $A \subset B_X$ plump if for every $y \in S_X$ there are $a_1, a_2 \in A$ such that

$$\|y - a_1\| + \|y + a_2\| \leqslant 2.$$

Definition. A normed space X is said to be ultra-GL with respect to a subspace $W \subset X^*$ (ultra-GL(W)-space) if for every $x \in S_X$ there exists an $x^* \in S_W$ such that $x \in \mathcal{F}(x^*)$ and $\mathcal{F}(x^*)$ is plump. In the case of $W = X^*$ the space X is said to be ultra-GL.

Let $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ be a normed space. Denote by e_k, $k = 1, \ldots, n$, the elements of the canonical basis: the k-th coordinate of the vector e_k equals 1, all the others are equal to 0. A norm $\|\cdot\|_E$ is called absolute, if it satisfies the following conditions:

(i) $\|e_k\|_E = 1$, $k = 1, \ldots, n$;

(ii) for any $a = (a_1, ..., a_n)$ vector

$$|a| := (|a_1|, ..., |a_n|)$$

has the same norm as a:

$$\|(a_1, ..., a_n)\|_E = \|(|a_1|, ..., |a_n|)\|_E.$$

Let $X_1, \ldots, X_n$ be normed spaces and $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ be a space with absolute norm. E-sum of the spaces X_k (denote it by $E(X_k)_1^n$) is the vector space of all $x = (x_1, ..., x_n)$, $x_k \in X_k$, $k = 1, \ldots, n$, endowed with the following norm:

$$\|x\| = (\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|)_E.$$

Definition. A space $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ with absolute norm is said to be GL-respecting (GLR-space for short) if for every collection $X_1, \ldots, X_n$ of GL-spaces the corresponding E-sum $E(X_k)_1^n$ is generalized-lush.

Definition. Let $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ be a space with absolute norm, $d^* = (d_1, ..., d_n) \in \operatorname{ext}(B_{E^*})$ with $d_k \geqslant 0$. The face $\mathcal{F}(d^*) \subset S_E$ is said to be monotone plump if, denoting $D = \{k : d_k \neq 0\}$, for every $a = (a_1, ..., a_n) \in S_E$ with $a_k \geqslant 0$ and every $z = (z_1, ..., z_n) \in B_E$ with

$$0 \leqslant z_k \leqslant a_k \text{ for } k \in D \tag{0.1}$$

there is $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathcal{F}(d^*)$ such that $\|b - z\| = 1 - d^*(z)$ and $b_k \geqslant a_k$ for $k \in D$. The space E is said to be GL-monotone (GLM-space for short) if for every $d^* \in \operatorname{ext}(B_{E^*})$ with $d_k \geqslant 0$ the corresponding face $\mathcal{F}(d^*) \subset S_E$ is monotone plump.

The interaction of the concepts above is discussed in the section in detail. The main results of this section are the following theorems and corollary.

Theorem. The unit ball of every finite-dimensional GL-space is a polyhedron whose maximal faces are plump.

Theorem. A space $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ with absolute norm is GL-respecting if and only if it is GL-monotone.

Theorem. Let X be a Banach space, and $\mathfrak{U}$ be a nontrivial ultrafilter on $\mathbb{N}$. Then the following assertions are equivalent:

(I) X is a GL-space,

(II) $X^{\mathfrak{U}}$ is ultra-GL with respect to the subspace $W = (X^*)^{\mathfrak{U}}$.

Theorem. Let X be a real two-dimensional GL-space. Then X is isometric either to the space, whose unit sphere is the equilateral hexagon with unit edges, or to $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\ell_1})$.

Corollary. The only two-dimensional GLR-spaces are ℓ_1^2 and ℓ_∞^2.

Keywords: non-expansive map, unit ball, plastic space, strictly convex space, ellipsoid, linearly expand-contract plastic space, Tingley's problem, Mazur-Ulam property, polyhedral space, GL-space, ultraproduct.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікація у науковому фаховому виданні України:

1. Kadets, V., Zavarzina, O.: Plasticity of the unit ball of ℓ_1. Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University Ser. «Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics». 83, 4–9 (2016)

Публікація у науковому виданні України, що входить до міжнародної наукометричної бази:

2. Zavarzina, O.: Linear expand-contract plasticity of ellipsoids in separable Hilbert spaces. Matematychni Studii. 51(1), 86–91 (2019) (Scopus)

Публікації у зарубіжних спеціалізованих виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

3. Kadets, V., Zavarzina, O.: Nonexpansive bijections to the unit ball of the ℓ_1-sum of strictly convex Banach spaces. Bull. Aust. Math. Soc. 97(2), 285–292 (2018) (Scopus)
4. Zavarzina, O.: Nonexpansive bijections between unit balls of Banach spaces. Ann. Funct. Anal. 9(2), 271–281 (2018) (Scopus)
5. Angosto, C., Kadets, V., Zavarzina, O.: Non-expansive bijections, uniformities and polyhedral faces. J. Math. Anal. Appl. 471 (1-2), 38–52 (2019) (Scopus)
6. Kadets, V., Zavarzina, O.: Generalized-lush spaces revisited. Ann. Funct. Anal. 11(2), 244-258 (2020) (Scopus)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації: друковані тези, що опубліковані у матеріалах наукових конференцій:

7. Zavarzina, O.: Non-expansive bijections between unit balls of Banach spaces. В: Сборник тезисов докладов XII международной

конференции молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», Харьков, 25-26 апреля 2017 г.

8. Zavarzina, O.: Expand-contract plasticity of unit balls and related results. В: Збірник тез доповідей XII Літньої школи «Алгебра, Топологія, Аналіз», с. Колочава, Закарпатська область, 10-23 липня 2017 р.

9. Zavarzina, O.: EC-plasticity of unit balls and non-expansive bijections. В: Сборник тезисов докладов XIII международной конференции молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», Харьков, 16-17 марта 2018 г.

10. Zavarzina, O.: Non-expansive bijections and EC-plasticity of the unit balls. In: Book of Abstracts of the XIII-th Summer School «Analysis, topology and applications», Vyzhnytsya, Chernivtsi Region, 29 July – 11 August, 2018

11. Zavarzina, O.: Plasticity of the unit balls. В: Збірник тез доповідей XIV міжнародної конференції молодих вчених «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях», Харків, 15-16 березня 2019 р.

12. Zavarzina, O.: Linear expand-contract plasticity of ellipsoids in separable Hilbert spaces. In: Book of Abstracts of International Conference dedicated to the 70th anniversary of Anatolij Plichko «Banach spaces and their applications», Lviv, 26-29 June, 2019

13. Zavarzina, O.: Non-expansive bijections between unit balls of Banach spaces and related problems. In: Book of Abstracts of the XIV-th Summer School «Analysis, topology, algebra and applications», Pidzakharychi, Chernivtsi Region, 10-20 August, 2019

14. Kadets, V., Zavarzina, O.: Some results on GL-spaces, In: Book of Abstracts of International conference dedicated to 70th anniversary of

Professor Oleh Lopushansky «Infinite dimensional analysis and topology», Ivano-Frankivsk, 16-20 October, 2019

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

У подальшому літери X та Y позначатимуть дійсні банахові простори. Будемо використовувати також наступні позначення:

aconv – абсолютно опукла оболонка.

$\overline{\text{aconv}}$ – замикання абсолютно опуклої оболонки.

BnE-відображення – бієктивне нерозтягувальне відображення.

B_X – замкнена одинична куля простору X.

$C(K)$ – простір неперервних скалярних функцій на компакті K, з нормою $\|f\| = \max\limits_{t \in K} |f(t)|$.

c_0 – простір послідовностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, що збігаються до нуля, з нормою $\|x\| = \sup |x_i|$.

conv – опукла оболонка.

$\overline{\text{conv}}$ – замикання опуклої оболонки.

$D(x, a)$ – множина $aB_X \cap (x + (1 - a)B_X)$.

$D_1(x)$ – множина $(x + B_X) \cap (-x + B_X)$.

$D_1(y_1, y_2)$ – множина $(y_1 + B_X) \cap (-y_2 + B_X)$.

EC-простір – пластичний простір, дивись означення 1.2.

$E(X_k)_1^n$ – E-сума нормованих просторів $X_k, k = 1...n$, дивись підрозділ 4.3.

ℓ_p – простір послідовностей дійсних чисел $x = (x_1, x_2, \ldots)$, таких що $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < \infty$, з нормою $\|x\| = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{1/p}$.

ℓ_∞ – простір обмежених послідовностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ з нормою $\|x\| = \sup |x_i|$.

$\text{ext}(A)$ – множина крайніх точок опуклої множини A.

$\mathcal{F}(x^*)$ – грань одиничної кулі банахового простору, дивись означення 4.3.

GL-простір – узагальнено-пишний простір, дивись означення 4.2.

GL-монотонний простір – дивись означення 4.17.

GLR-простір – дивись означення 4.15.

H – сепарабельний нескінченновимірний гільбертів простір (дійсний чи комплексний).

$L_1(\mu)$ – лінійний простір усіх інтегровних по мірі μ скалярних функції $f(t)$ з нормою $\|f(t)\| = \int |f(t)| d\mu$.

Lin – лінійна оболонка.

$\overline{\mathrm{Lin}}$ – замкнена лінійна оболонка.

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел.

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел.

$\mathbb{R}^+$ – множина дійстних невід'ємних чисел.

$\mathcal{S}(x^*, \alpha)$ – замкнена зрізка одиничної кулі банахового простору, дивись означення 4.1.

S_X – одинична сфера простору X.

X^* – простір, спряжений до простору X.

$\langle x, y \rangle$ – скалярний добуток елементів $x, y \in H$.

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел.

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Метричний простір називають пластичним, якщо кожна нерозтягувальна бієкція цього простору на себе є ізометрією. Відомо [9], [20], що кожен цілком обмежений, інакше кажучи, передкомпактний, метричний простір є пластичним. Проте існують приклади не цілком обмежених і навіть не обмежених пластичних просторів. У [6] Б. Каскалес, В. Кадець, Х. Оріуела та Е. Вінглер довели пластичність одиничних куль строго опуклих банахових просторів, тобто таких просторів, чия одинична сфера не містить нетривіальних відрізків прямих. Відкритими залишаються питання, чи існує проста характеризація пластичних просторів і чи є пластичною одинична куля довільного банахового простору.

Питання пластичності одиничної кулі банахового простору має природне продовження: для яких пар різних просторів нерозтягувальне бієктивне відображення між одиничними кулями цих просторів має бути ізометрією.

Зауважимо, що зі строгої опуклості гільбертового простору випливає пластичність його одиничної кулі. З іншого боку, у роботі [6] також наведений приклад непластичної замкненої обмеженої опуклої підмножини у гільбертовому просторі. Ця множина є тілесним еліпсоїдом, тобто вона має багато спільного з одиничною кулею, проте властивості пластичності не має. Звідси постає питання про опис пластичних замкнених обмежених опуклих підмножин гільбертового простору, та зокрема, пластичних еліпсоїдів.

Вибір теми дисертаційної роботи зумовлений також ще одним колом питань, що стосуються так званої проблеми Тінглі. У 1987 році Д. Тінглі [25] сформулював наступне запитання: якщо існує ізометрія між одиничними сферами двох банахових просторів, чи можна її продовжити до лінійного бієктивного відображення між цими просторами?

Незважаючи на велику кількість позитивних відповідей для конкретних банахових просторів, у загальному випадку на це питання немає відповіді навіть для двовимірних просторів. У [13] доведено, що ізометрія між одиничними сферами скінченновимірних поліедральних банахових просторів (тобто таких, у яких одиничні кулі є багатогранниками) продовжується до лінійної ізометрії на відповідних просторах. Д. Тан, С. Хуан та Р. Лю [23] довели, що питання Тінглі має позитивну відповідь для так званих узагальнено-пишних просторів (або, GL-просторів, від англ. generalized-lush), показали, що c_0-, ℓ_1- і ℓ_∞-суми зберігають клас узагальнено-пишних просторів, і довели, що двовимірний простір E, одинична куля якого є шестикутником з одиничними ребрами, є узагальнено-пишним простором. Відкритими були питання, чи зберігає клас узагальнено-пишних просторів E-сума, які ще існують двовимірні узагальнено-пишні простори, та які ще суми зберігають цей клас просторів.

Саме цими відкритими проблемами зумовлений вибір теми дисертації.

Мета і завдання дослідження. *Метою* даної дисертаційної роботи є розширення відомостей про властивості нерозтягуючих бієкцій та ізометрій між підмножинами банахових просторів.

Об'єкт дослідження – банахові простори, нерозтягуючі відображення, ізометрії.

Предмет дослідження – пластичність підмножин банахового простору, властивості узагальнено-пишних банахових просторів.

Завдання дослідження:

- перевірити пластичність одиничних куль якомога більшого числа конкретних не строго опуклих банахових просторів;
- знайти пари банахових просторів, для яких бієктивні нерозтягуючі відображення між одиничними кулями повинні бути ізометріями;
- описати лінійно пластичні еліпсоїди у сепарабельному гільбертовому просторі;

– дослідити властивості узагальнено-пишних просторів;

– класифікувати двовимірні GL- та GL-зберігаючі простори.

Методи дослідження. Оскільки задачі, що розглядаються в дисертації, відносяться до геометрії банахових просторів, у роботі використовувалися загальні методи функціонального аналізу, геометрії банахових просторів, загальної топології, теорії двоїстості.

Наукова новизна отриманих результатів. У даній дисертаційній роботі вперше доводиться пластичність одиничних куль простору ℓ_1, ℓ_1-суми будь-якого набору строго опуклих банахових просторів та банахового простору, чия одинична сфера є об'єднанням усіх своїх скінченновимірних поліедральних крайніх підмножин. Також в роботі вперше розглядається узагальнена задача: для яких пар просторів (X, Y) нерозтягувальне бієктивне відображення між одиничними кулями цих просторів виявляється ізометрією. Нам вдалося розв'язати цю узагальнену задачу у випадку, коли Y – строго опуклий банахів простір, скінченновимірний банахів простір, ℓ_1, ℓ_1-сума строго опуклих банахових просторів або банахів простір, одинична сфера якого є об'єднанням усіх своїх скінченновимірних поліедральних крайніх підмножин, а X – довільний банахів простір. Також задача розв'язана у випадку строго опуклого банахового простору X і довільного банахового простору Y.

У дисертації вводиться поняття лінійної пластичності та вивчаються необхідні та достатні умови лінійної пластичності тілесного еліпсоїда у сепарабельному гільбертовому просторі у термінах його півосей.

Також у даній роботі вперше наводиться класифікація двовимірних GL- та GLR-просторів, доводиться поліедральність скінченновимірних GL-просторів та факт, що простір є GL-монотонним тоді і тільки тоді, коли він є GLR - простором.

Практичне значення отриманих результатів. Робота носить теоретичний характер. Отримані результати розширюють наші уявлення про властивості банахових просторів та їх підмножин і можуть бути використані в теорії банахових просторів, топології та інших розділах математики.

Особистий внесок здобувача. Постановки задач належать науковому керівникові. Дві статті, що ввійшли до дисертаційної роботи написані без співавторів - [33] та [30]. Статті [16], [15], [14] та розділи 3 та 4 роботи [1] написані у співавторстві з науковим керівником. Розділ 2 з [1], який належить співавторові Карлосу Ангосто, згадується лише в огляді літератури з відповідним посланням. Усі результати, включені до дисертації, були отримані авторкою особисто, проте постійно обговорювалися з науковим керівником. Результати, що належать співавторам та іншим математикам, згадуються за необхідністю для повноти викладу та супроводжуються відповідними посиланнями.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися й обговорювалися на наступних конференціях та семінарах:

1. XII Международная конференция молодых учёных «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», Харьков, 25-26 апреля 2017 г. (Форма участі у конференції: очна.)

2. XII Літня школа «Алгебра, Топологія, Аналіз», с. Колочава, Закарпатська область, 10-23 липня 2017 р. (Форма участі у конференції: заочна.)

3. XIII Международная конференция молодых учёных «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», Харьков, 16-17 марта 2018 г. (Форма участі у конференції: очна.)

4. Засідання Харківського математичного товариства, Харків, березень 2018 р.

5. The XIII-th Summer School «Analysis, topology and applications»,

Vyzhnytsya, Chernivtsi Region, July 29 – August 11, 2018. (Форма участі у конференції: очна.)

6. XIV Міжнародна конференція молодих вчених «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях», Харків, 15-16 березня 2019 р. (Форма участі у конференції: очна.)
7. International Conference dedicated to the 70th anniversary of Anatolij Plichko «Banach spaces and their applications», Lviv, 26-29 June, 2019. (Форма участі у конференції: очна.)
8. The XIV-th Summer School «Analysis, topology, algebra and applications», Pidzakharychi, Chernivtsi Region, August 10-20, 2019. (Форма участі у конференції: очна.)
9. International conference dedicated to 70th anniversary of Professor Oleh Lopushansky «Infinite dimensional analysis and topology», Ivano-Frankivsk, October 16-20, 2019. (Форма участі у конференції: очна.)
10. Семінар з функціонального аналізу в Вільному університеті Берліну (ФРН), 27 січня 2020.

Публікації. Всі основні результати роботи в повній мірі опубліковані у фахових журналах, пройшли апробацію на наукових конференціях та семінарах. Основні положення дисертації містяться в 14 наукових публікаціях, серед яких 1 стаття [16] – у науковому фаховому виданні України, 1 стаття [30] – у науковому виданні України, що входить до міжнародної наукометричної бази (Scopus), 4 статті [1], [15], [14], [33] – у зарубіжних спеціалізованих виданнях, що входять до міжнародної наукометричної бази (Scopus), і в 8 тезах доповідей [17], [34], [27], [35], [28], [31], [29], [32] на конференціях. З 6 статей дві написані без співавторів.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, загальних висновків та списку використаних джерел, який містить 36 найменувань. Обсяг загального тексту дисертації – 128 сторінок. Обсяг основного тексту роботи – 108 сторінок. Розділ 1, присвячений огляду наукової літератури, складає 17 сторінок. Робота ілюстрована 4 рисунками.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано на кафедрі фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна у відповідності до тематики пріоритетних досліджень кафедри та в рамках державної науково-дослідної роботи за темою «Оператори в банахових, гільбертових, функціональних просторах та квазікришталі Фур'є» (номер державної реєстрації: 0118U002036).

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ВИБІР ТЕМИ

Означення 1.1. Нехай (M_1, ρ_1), (M_2, ρ_2) – довільні метричні простори. Відображення $F\colon M_1 \to M_2$ називається *нерозтягуючим*, якщо для будь-яких елементів $x, y \in M_1$

$$\rho_2(F(x), F(y)) \leqslant \rho_1(x, y).$$

Відображення $F\colon M_1 \to M_2$ називається *нестискаючим*, якщо для будь-яких елементів $x, y \in M_1$

$$\rho_2(F(x), F(y)) \geqslant \rho_1(x, y).$$

Відображення $F\colon M_1 \to M_2$ називається *ізометрією*, якщо для будь-яких елементів $x, y \in M_1$

$$\rho_2(F(x), F(y)) = \rho_1(x, y).$$

Означення 1.2. Метричний простір (M, ρ) називається *EC-пластичним* (від англ. Expand-Contract plastic), якщо будь-яка нерозтягувальна бієкція $F\colon M \to M$ є ізометрією. Ми будемо скорочено називати EC-пластичні простори пластичними.

Нагадаємо також наступне означення.

Означення 1.3. Метричний простір називається *цілком обмеженим*, або *передкомпактом*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ у ньому існує скінченна ε-сітка.

З наступного твердження статті [9], що була опублікована у 1936 році, випливає пластичність цілком обмежених метричних просторів.

Твердження 1.4 ([9, Satz IV])**.** *Відображення цілком обмеженого простору на себе або зберігає усі відстані, або є пара точок, відстань між якими зростає, і пара точок, відстань між якими зменшується.*

У цій самій статті було поставлене наступне питання.

Питання 1.5. *Чи можна сказати щось більш точно про компенсацію розширення скороченнями, і навпаки, у твердженні 1.4?*

Дивовижно, що з того часу властивість пластичності не помічали впродовж довгої історії розвитку теорії банахових просторів. Хоча ця публікація є одним з витоків проблематики даної дисертації, термін «пластичність» там не вживався. Означення пластичності з'явилося значно пізніше, у 2006 році у [20]. У цій роботі розглядалися наступні три властивості, які може мати метричний простір X:

(A) Для будь-якої сюр'єкції $f\colon X \to X$ якщо існують $a, b \in X$, такі що $d(f(a), f(b)) > d(a, b)$, тоді знайдуться $p, q \in X$, такі що $d(f(p), f(q)) < d(p, q)$.

(B) Для будь-якої сюр'єкції $f\colon X \to X$ якщо існують $a, b \in X$, такі що $d(f(a), f(b)) < d(a, b)$, тоді знайдуться $p, q \in X$, такі що $d(f(p), f(q)) > d(p, q)$.

(C) Для будь-якої сюр'єкції $f\colon X \to X$ якщо f – нестискальне відображення, тоді f – ізометрія.

Легко побачити, що властивості (A) та (C) є еквівалентними і обидві ці властивості випливають з властивості (B). У свою чергу властивість (B) не є еквівалентною двом іншим. З цього приводу у роботі [20] наводиться наступний приклад: множина цілих чисел $\mathbb{Z}$ зі звичайною метрикою задовольняє властивість (A) [20, Theorem 3.1]. Водночас, цей метричний простір не задовольняє властивість (B). Щоб це побачити розглядається функція $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, що визначається наступним чином:

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{якщо } n < 0 \\ n, & \text{якщо} n \geqslant 0. \end{cases}$$

Помітимо, що

$$|f(-1) - f(0)| = 0 < |-1-0|.$$

Проте нерівність

$$|f(p) - f(q)| > |p-q|$$

не виконується для жодних $p, q \in X$. Оскільки нестискальне відображення автоматично є ін'єктивним, то слово "сюр'єкція" у властивості (C) можна замінити на "бієкція" і зміст властивості (C) при цьому залишиться незмінним. Саме таку модифіковану властивість у роботі [20] і було взято за основу означення розтягувально-стискально пластичного простору (англ. Expand-Contract plastic space).

Означення 1.6 ([20, Definition 2.1])**.** Метричний простір X називається *розтягувально-стискально пластичним простором* (або просто *EC-простором*), якщо кожна нестискаюча бієкція з X на себе є ізометрією. Метричні простори, що не є EC-пластичними будемо називати NEC-пластичними. Метричний простір X називається *стискально-розтягувально пластичним простором* (або просто *CE-простором*), якщо кожна нерозтягувальна сюр'єкція з X на себе є ізометрією.

Як ми бачимо, Наімпалі, Піотровскі і Вінглер у своєму означенні EC-простору говорили про нестискальне відображення, проте нам зручніше формулювати його для нерозтягуючих відображень, що несуттєво через бієктивність. Також авторами була доведена теорема, подібна до 1.4, але без умови сюр'єктивності.

Теорема 1.7 ([20, Theorem 1.1])**.** *Нехай (X, d) – цілком обмежений метричний простір, і нехай $f : X \to X$ – довільне відображення. Якщо існують точки p і q, такі що $d(f(p), f(q)) > d(p, q)$, тоді знайдуться точки r і s, такі що $d(f(r), f(s)) < d(r, s)$.*

Також у цій роботі наведено багато прикладів пластичних і NEC-пластичних (тобто без цієї властивості) просторів, з яких випливає, що ані компактність, ані обмеженість, ані повнота не є необхідними умовами пластичності.

Теорема 1.8 ([20, Theorem 3.3])**.** *Нехай (K, d) – зв'язний компактний метричний простір і нехай $\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел зі звичайною* *метрикою. Тоді* $K \times \mathbb{Z}$ *зі звичайною метрикою добутку (інакше кажучи,* ℓ_2 *- сума цих просторів) є EC-простором.*

З цієї теореми негайно отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 1.9 ([20, Theorem 3.4])**.** *Метричний простір* $[0,1] \times \mathbb{Z}$ *є EC-пластичним.*

Запитання, що звідси природно постає – чи можна послабити умову попередньої теореми шляхом заміни компактності множини K умовою цілком обмеженості? Відповідь на це запитання негативна.

Теорема 1.10 ([20, Theorem 3.5])**.** *Метричний простір* $[0,1) \times \mathbb{Z}$ *є NEC-пластичним.*

Далі викладемо ще один цікавий результат, що стосується декартових добутків.

Теорема 1.11 ([20, Theorem 3.7])**.** *Якщо* X *– NEC-пластичний простір, тоді* $X \times Y$ *– це NEC-пластичний простір для будь-якого метричного простору* Y*.*

Окремий розділ роботи [20] присвячений спадково EC-пластичним просторам.

Означення 1.12. Властивість простору є *спадковою*, якщо цю властивість мають усі підпростори цього простору.

Відповідно до означення, метричний простір є спадково EC-пластичним, якщо будь-який підпростір цього простору з тією ж метрикою є EC-пластичним. Легко бачити, що спадково NEC-пластичних просторів не існує, через те, що будь-який скінчений підпростір буде мати властивість пластичності. Проте спадково EC-пластичні простори існують. Фактично, будь-який цілком обмежений метричний простір має властивість спадкової EC-пластичності. Далі викладемо декілька результатів з цього приводу.

Для метричного простору (X, d) якщо

$$d(x, y) + d(y, z) = d(x, z),$$

то будемо говорити, що y лежить між x та z. Якщо додатково

$$d(x, y) = d(y, z),$$

тоді y будемо називати середньою точкою між x і z. Простір (X, d) називається опуклим метричним простором, якщо кожна пара точок цього простору має хоча б одну середню точку.

Твердження 1.13 ([20, Proposition 4.1]). *Нехай (X, d) – опуклий метричний простір. Якщо X є спадково EC-пластичним, тоді він обмежений.*

Наслідок 1.14 ([20, Corollary 4.2]). *Нехай X – опукла підмножина евклідового простору (R^n, d). Тоді (X, d) – спадково EC-пластичний простір тоді і тільки тоді, коли X є обмеженою множиною.*

Виявилося, що умова опуклості у попередньому твердженні є надлишковою. Достатньо лише існування точки накопичення.

Теорема 1.15 ([20, Theorem 4.3]). *Нехай (X, d) необмежений метричний простір, який містить хоча б одну точку накопичення. Тоді X містить NEC-пластичний простір.*

Наступний приклад показує, що обмеженість не гарантує ані спадкову EC-пластичність ані просто EC-пластичність метричного простору.

Приклад 1.16 ([20, Example 4.4]). *Нехай S та T – нескінченні множини, що не перетинаються і нехай метрика d визначається на $X = S \cup T$ таким чином:*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } x = y; \\ 1, & \textit{якщо } x, y \in S; \\ 2, & \textit{у інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді (X, d) *– метричний простір. Оберемо* $s_0 \in S$ *і* $t_0 \in T$. *Нехай* $g\colon S - s_0 \to S$ *і* $h\colon T \to T - t_0$ *– бієктивні відображення. Визначимо* $f\colon X \to X$ *наступним чином:*

$$f(x) = \begin{cases} t_0, & \text{якщо } x = s_0; \\ g(x), & \text{якщо } x \in S - s_0; \\ h(x), & \text{якщо } x \in T. \end{cases}$$

Легко перевірити, що f *– нестискаюча бієкція. Однак,* f *не є ізометрією, бо*

$$d(f(s_0), f(x)) = d(t_0, g(x)) = 2 > 1 = d(s_0, x)$$

для будь-якого $x \in S - s_0$. *Отже,* X *не є EC-пластичним простором.*

Авторів роботи [20] також цікавило, чи існує проста характеризація пластичних просторів.

У 2016 році Б. Каскалес, В. Кадець, Х. Оріуела та Е. Вінглер поставили питання стосовно пластичності одиничної кулі довільного банахового простору, яке досі є відкритим, і відповіли на це запитання для одиничної кулі строго опуклого банахового простору. Нагадаємо деяку необхідну термінологію. Нехай X - банахів простір.

Означення 1.17. x – *крайня точка* опуклої множини A, якщо $x \in A$ і для будь-якого $y \in X \setminus \{0\}$ або $x + y \notin A$ або $x - y \notin A$.

Множину крайніх точок опуклої множини $A \subset X$ позначатимемо $\operatorname{ext}(A)$.

Означення 1.18. Банахів простір X називається *строго опуклим*, якщо всі елементи одиничної сфери S_X є крайніми точками одиничної кулі B_X.

Інакше кажучи, одинична сфера S_X не містить нетривіальних відрізків. Строга опуклість X також означає, що нерівність трикутника є строгою для всіх неспівнапрямлених векторів, тобто $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$ для всіх $x, y \in X$, таких що $x \neq \alpha y$ для жодного скаляра $\alpha \geqslant 0$.

Теорема 1.19 ([6, Theorem 2.6]). *Нехай X – строго опуклий банахів простір. Тоді його одинична куля B_X – EC-простір.*

Авторів цікавило, чи можна у попередній теоремі відмовитися від умови строгої опуклості банахового простору. Інакше кажучи, чи справедливо, що одинична куля будь-якого банахового простору є пластичною. Хоча відповідь на це питання нам невідома, принаймні немає й жодних контрприкладів. Природнім продовженням запитання про пластичність однинчної кулі довільного банахового простору (тобто чи є кожна нерозтягувальна бієкція одиничної кулі банахового простору на себе ізометрією) є наступне запитання: для яких пар різних банахових просторів нерозтягувальна бієкція між одиничними кулями цих просторів є ізометрією?

Зауважимо, що з попередньої теореми випливає, що пластичними є одиничні кулі гільбертових просторів і просторів L_p з $1 < p < \infty$. Зазначимо також, що у скінченновимірному випадку будь-яка обмежена опукла замкнена підмножина є пластичною, завдяки твердженню 1.4 або теоремі 1.7. Приклад з тієї ж роботи доводить, що у нескінченновимірних просторах, у загальному випадку, це не так.

Приклад 1.20 ([6, Example 2.7]). *Розглянемо $H = \ell_2(\mathbb{Z})$ і*

$$A = \left\{ x = (x_n) \in H : \sum_{k=-\infty}^{0} |x_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |2x_k|^2 \leqslant 1 \right\}.$$

Визначимо лінійний оператор зсуву з вагою $T\colon H \to H$ наступним чином: $Te_n = e_{n+1}$ для $n \neq 0$ і $Te_0 = \dfrac{1}{2}e_1$. Цей оператор відображає A в A бієктивно, є нерозтягуючим і не є ізометрією.

Тому ще одним цікавим питанням, яке природно виникає, є класифікація обмежених опуклих замкнених підмножин нескінченновимірних просторів за ознакою пластичності.

Зауважимо, що поняття нерозтягуючого відображення, нестискаючого відображення, ізометрії, а також деякі пов'язані результати можна поширити на випадок рівномірного простору. Це, за порадою Бернардо Каскалеса, зробив Карлос Ангосто у [1].

Означення 1.21. *Рівномірністю* на множині X називається непорожня сім'я $\mathfrak{U}$ підмножин множини $X \times X$, що задовольняє наступні умови:

(1) кожен елемент сім'ї $\mathfrak{U}$ містить діагональ Δ, тобто множину всіх пар (x, x), де $x \in X$;

(2) якщо $U \in \mathfrak{U}$, тоді $U^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in U\} \in \mathfrak{U}$;

(3) якщо $U \in \mathfrak{U}$, тоді $V \circ V = \{(x, z) :$ знайдеться $y \in X$, такий що $(x, y) \in V, (y, z) \in V\} \subset U$ для деякого $V \in \mathfrak{U}$;

(4) якщо $U, V \in \mathfrak{U}$, тоді $U \cap V \in \mathfrak{U}$;

(5) якщо $U \in \mathfrak{U}$ і $U \subset V \subset X \times X$, тоді $V \in \mathfrak{U}$.

Пара $(X, \mathfrak{U})$ називається *рівномірним простором.*

Означення 1.22. Підсім'я $\mathfrak{B}$ рівномірності $\mathfrak{U}$ називається *базою* цієї рівномірності тоді і тільки тоді, коли кожен елемент сім'ї $\mathfrak{U}$ містить деякий елемент сім'ї $\mathfrak{B}$.

Нагадаємо також необхідні позначення з [1].

$$U[A] = \{u \in E, \text{ такі що знайдеться } v \in A, \text{ такий що } (u, v) \in U\}.$$

Рівномірний простір $(E, \mathfrak{U})$ називається цілком обмеженим, якщо для кожного $U \in \mathfrak{B}$ існує скінченна підмножина $\widetilde{E} \subset E$, така що $E = U[\widetilde{E}]$.

Означення 1.23 ([1, Definition 2.1])**.** Нехай $(E, \mathcal{U})$ – рівномірний простір, $\mathcal{B}$ – база рівномірності і $F : E \to E$ – відображення. Будемо говорити, що F – *нестискальне* для бази $\mathcal{B}$, якщо для кожного $V \in \mathcal{B}$ і довільних $x, y \in E$

$$(F(x), F(y)) \in V \Rightarrow (x, y) \in V$$

Будемо говорити, що F – *нерозтягувальне* для бази $\mathcal{B}$, якщо для кожного $V \in \mathcal{B}$ і довільних $x, y \in E$

$$(x, y) \in V \Rightarrow (F(x), F(y)) \in V.$$

Будемо говорити, що F – *ізобазизм* для бази $\mathcal{B}$, якщо для кожного $V \in \mathcal{B}$ і довільних $x, y \in E$

$$(F(x), F(y)) \in V \Leftrightarrow (x, y) \in V.$$

Наслідок 1.24 ([1, Corollary 2.5]). *Нехай $(E, \mathcal{U})$ – цілком обмежений рівномірний простір, $\mathcal{B}$ – база рівномірності і $F\colon E \to E$ нестискаюча біекція для $\mathcal{B}$. Тоді для F справедливо*

$$(x, y) \in V \Rightarrow (F(x), F(y)) \in \overline{V}$$

для будь-якого $V \in \mathcal{B}$.

Зауважимо, що пластичність цілком обмежених метричних просторів є окремим випадком цього твердження. Ми наразі розмірковуємо над питанням, чи можна в умовах попередньої теореми відмовитися від бієктивності. Інакше кажучи, чи є справедливим аналог теореми 1.7 у більш загальному випадку рівномірного простору?

Існує ще одне споріднене коло питань, яке мотивує наші дослідження. У 1972 Манкевич [18] довів, що бієктивну ізометрію між опуклими підмножинами нормованих просторів з непорожньою внутрішністю можна продовжити до бієктивної афінної ізометрії між цілими просторами.

Твердження 1.25 ([18]). *Якщо $A \subset X$ і $B \subset Y$ є опуклими множинами з непорожньою внутрішністю, тоді будь-яка бієктивна ізометрія $F : A \to B$ може бути продовжена до бієктивної афінної ізометрії $\widetilde{F} : X \to Y$.*

Зазначимо, що у випадку, коли A, B – одиничні кулі, кожна ізометрія відображає 0 у 0, отже кожна бієктивна ізометрія $F : B_X \to B_Y$ є обмеженням лінійної ізометрії між X та Y. Зокрема, метрична структура одиничної кулі у метриці, породженій нормою, задає лінійну структуру на всьому просторі. У 1987 Тінглі [25] поставив питання, чи можна стверджувати те саме про одиничну сферу.

Питання 1.26. *Нехай f – бієктивна ізометрія між одиничними сферами S_X та S_E дійсних банахових просторів X, E відповідно. Чи можна продовжити f до лінійної (бієктивної) ізометрії $F : X \to E$ між відповідними просторами?*

Зауважимо, що ця проблема еквівалентна факту, що наступне природне позитивно-однорідне продовження $F : X \to E$ функції f є лінійним [13]:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = 0, \\ \|x\| \, f\left(x/\|x\|\right), & \text{якщо } x \in X \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Завдяки результату Манкевича, проблему Тінглі можна переформулювати наступним чинном:

Питання 1.27. *Нехай $F : B_X \to B_E$ – позитивно-однорідне відображення, чиє обмеження на S_X є бієктивною ізометрією між S_X і S_E. Чи можна стверджувати, що F є ізометрією?*

Сам Тінглі у згаданій роботі довів наступний корисний результат:

Теорема 1.28 ([25]). *Якщо X та E є скінченновимірними банаховими просторами і $f\colon S_X \to S_E$ – бієктивна ізометрія, тоді $f(-x) = -f(x)$ для всіх $x \in S_X$.*

Багато публікацій, присвячених проблемі Тінглі, з'явилося останнім часом (див. [8] для ознайомлення). Скажімо, Zentralblatt Math. показує 57 статей, пов'язаних з проблемою Тінглі з 2002 по 2019 роки. Зокрема, ствердна відповідь на питання 1.26 була отримана для багатьох конкретних банахових просторів, як то $\ell_p(\Gamma)$, $C(K)$, чи простір Джеймса. У загальному ж випадку це питання, що виглядає досить безневинно, залишається нерозв'язаним навіть у двовимірному випадку. Розв'язуючи проблему Тінглі, Ченг та Донг у роботі [7] ввели наступну корисну термінологію:

Означення 1.29. Банахів простір X має *властивість Мазура-Улама*, якщо для будь-якого банахового простору E кожна сюр'єктивна ізометрія $f\colon S_X \to S_E$ є обмеженням лінійної ізометрії між X та E.

Робота Ченга та Донга присвячена доведенню цієї властивості для класу CL-просторів (тобто таких просторів, що для будь-якої максимальної опуклої множини C одиничної сфери цього простору одинична куля співпадає з множиною $\mathrm{conv}(C \cup -C)$), що допускають гладку точку а також для поліедральних просторів (тобто таких просторів, у яких одинична куля є багатогранником). На жаль, доведення для поліедральних просторів містить невиправну помилку наприкінці доведення (дивись, наприклад, вступ у [13]).

У 2012 Кадець та Мартін довели, що скінченновимірні поліедральні простори мають властивість Мазура–Улама [13].

Теорема 1.30 ([13, Theorem 4.5])**.** *Нехай X – m-вимірний поліедральний простір, а E – скінченновимірний банахів простір і $f\colon S_X \to S_E$ – бієктивна ізометрія. Тоді однорідне продовження F відображення f є лінійним оператором, і як наслідок, лінійною ізометрією.*

Кадець та Мартін також зауважили, що з проблемою Тінглі про бієктивні ізометрії сфер пов'язані два слабші запитання:

(1) Якщо така ізометрія існує, чи можна стверджувати, що відповідні простори є ізоморфними?

(2) Якщо така ізометрія існує, чи можна стверджувати, що відповідні простори є ізометричними?

Звичайно, перше запитання має місце лише у нескінченновимірному випадку. Автори також відзначають, що оскільки однорідне продовження F бієктивної ізометрії $f\colon S_X \to S_E$ є ліпшицевим гомеоморфізмом [7, Proposition 4.1], запитання (1) тісно пов'язане з таким досі відкритим питанням: чи випливає з існування ліпшицева гомеоморфізму двох сепарабельних банахових просторів існування лінійного ізоморфізму. Друге запитання є досить цікавим навіть для скінченновимірних просторів.

У 2013 році Тан, Хуан та Лю [23] довели, що цю властивість має клас локальних узагальнено-пишних просторів.

Означення 1.31. *Замкненою зрізкою одиничної кулі* B_X банахового простору X називається підмножина B_X вигляду

$$\mathcal{S}(x^*, \alpha) = \{x \in B_X : x^*(x) \geqslant 1 - \alpha\},$$

де $x^* \in S_{X^*}$ і $\alpha \in (0, 1)$.

Відзначимо, що ми в дисертаційній роботі обмежуємося розглядом дійсних просторів. В комплексному випадку в означенні зрізки замість $x^*(x) \geqslant 1 - \alpha$ має стояти $\operatorname{Re} x^*(x) \geqslant 1 - \alpha$. Схематично зрізка одиничної кулі зображена нижче на рисунку 1.1.

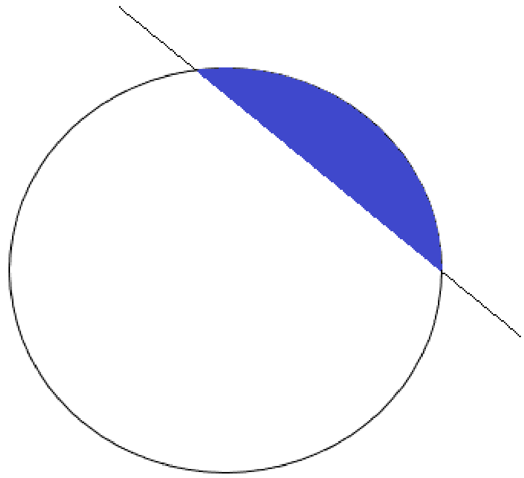

Рис.1.1 Зрізка одиничної кулі

Означення 1.32 ([23]). Банахів простір X називається *узагальнено-пишним* простором, або *GL-простором* (англ. generalized-lush) якщо для будь-якого $x \in S_X$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться зрізка $\mathcal{S}(x^*, \varepsilon)$, така що $x \in \mathcal{S}(x^*, \varepsilon)$ і

$$\operatorname{dist}(y, \mathcal{S}(x^*, \varepsilon)) + \operatorname{dist}(-y, \mathcal{S}(x^*, \varepsilon)) < 2 + \varepsilon$$

для всіх $y \in S_X$.

Означення 1.33 ([23]). Банахів простір E називається *локальним GL-простором*, якщо для кожного сепарабельного підпростору $Y \subset E$ знайдеться GL-підпростір $X \subset E$, такий що $Y \subset X \subset E$.

Попередні означення вмотивовані поняттям пишних просторів, введеним у [4] у зв'язку з теорією числового індексу операторів.

Означення 1.34. Простір X називається *пишним*, якщо для будь-яких двох точок $x, y \in S_X$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться функціонал $x^* \in S_{X^*}$ такий, що $x \in S(x^*, \varepsilon)$ і

$$\operatorname{dist}(y, \operatorname{aconv} S(x^*, \varepsilon)) < \varepsilon.$$

На рисунках 1.2, 1.3 нижче наведені одиничні кулі двовимірних узагальнено-пишних просторів ℓ_1 та ℓ_∞ відповідно.

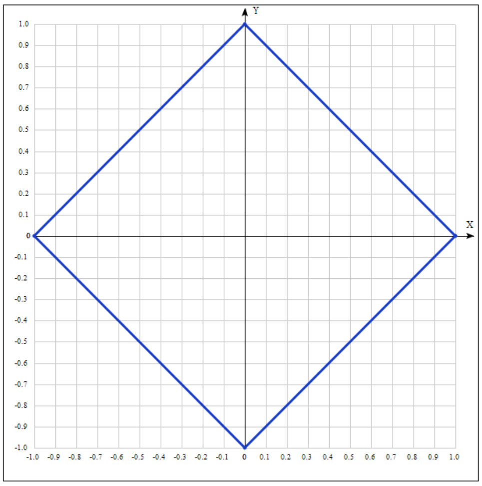

Рис.1.2 Одинична куля простору ℓ_1

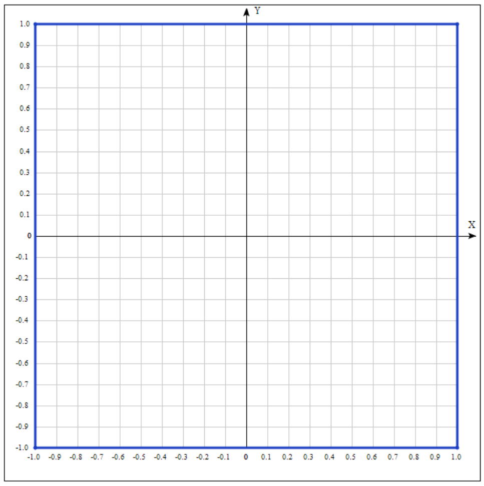

Рис.1.3 Одинична куля простору ℓ_∞

Теорема 1.35 ([23, Theorem 3.7]). *Усі локальні GL-простори мають властивість Мазура-Улама.*

Твердження 1.36 ([23]). *Пишні та узагальнено-пишні простори є локальними GL-просторами.*

Як наслідок, усі GL-простори, пишні простори і, зокрема, простори $C(K)$ та $L_1(\mu)$ мають властивість Мазура-Улама.

Зауважимо, що у роботі [24] Тан та Лю окремо показали, що властивість Мазура-Улама мають майже CL-простори (тобто такі простори, що для будь-якої максимальної опуклої множини C одиничної сфери цього простору одинична куля співпадає з множиною $\overline{\mathrm{conv}}(C \cup -C))$, одинична сфера яких допускає гладку точку. Проте, цей результат є наслідком попередніх, оскільки будь-який майже CL-простір є пишним.

У статті [23] також доведено, що c_0-, ℓ_1- і ℓ_∞-суми зберігають клас GL-просторів, і що простір $C(K, X)$ є узагальнено-пишним, для будь-якого узагальнено-пишного простору X, що надає багато прикладів просторів з властивістю Мазура-Улама.

Теорема 1.37 ([23, Theorem 2.11]). *Нехай $\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ – це сім'я банахових просторів, і нехай E – це c_0- або ℓ_1-сума цих просторів. Тоді E є узагальнено-пишним простором тоді і тільки тоді, коли кожен з просторів E_λ узагальнено-пишний.*

Теорема 1.38 ([23, Proposition 2.12]). *Нехай $\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ – це сім'я банахових GL-просторів і нехай E – це ℓ_∞-сума цих просторів. Тоді E є узагальнено-пишним простором.*

Теорема 1.39 ([23, Theorem 2.10]). *Нехай K – компактний гаусдорфів простір, і E– узагальнено-пишний простір, тоді $C(K, E)$ також є узагальнено-пишним простором.*

Також в своїй роботі Тан, Хуан та Лю довели, що наступний простір є узагальнено-пишним:

Приклад 1.40 ([23, Example 2.7]). *Простір $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ з нормою, що задається формулою:*

$$\|(x, y)\| = \max\{|y|, |x| + 1/2|y|\} \ \forall (x, y) \in E,$$

є GL-простором.

На рисунку 1.4 нижче ми наводимо одиничну кулю цього простору.

Наприкінці статті Тан, Хуан та Лю зазначають, що геометричні властивості, ізометричне продовження, та навіть числовий індекс на одиничних сферах мають гармонійний внутрішній зв'язок і можуть

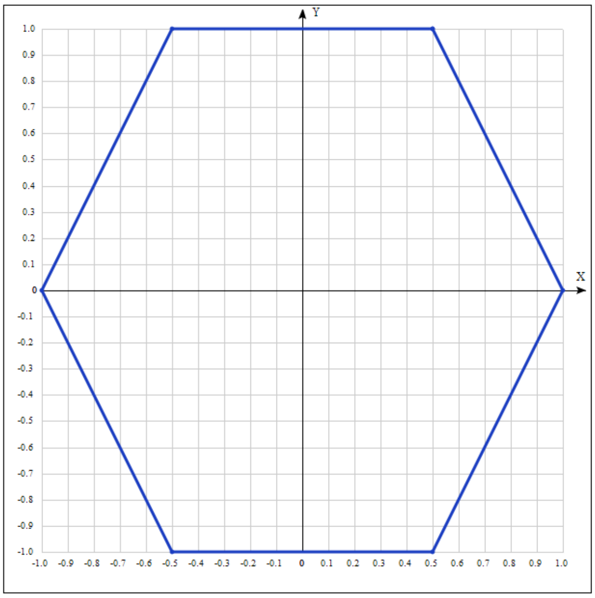

Рис.1.4 Одинична куля простору E

надати шляхи для розв'язку проблеми продовження ізометрії у більш загальному випадку. Оскільки існують приклади банахових просторів з числовим індексом 1, але при цьому не пишних, автори ставлять наступне питання: чи кожен банахів простір з числовим індексом 1 має властивість Мазура-Улама?

У тому ж ключі Хардке [10] довів, що узагальнена пишність зберігається при переході до ультрадобутків, F-ідеалів та, зокрема, M-ідеалів.

Для даного вільного ультрафільтра $\mathfrak{U}$ на множині $\mathbb{N}$, і довільної обмеженої послідовності $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дійсних чисел знайдеться (з компактності) число $a \in \mathbb{R}$, таке що для кожного $\varepsilon > 0$

$$\{n \in \mathbb{N} \colon |a_n - a| < \varepsilon\} \in \mathfrak{U}.$$

Елемент a визначається у єдиний спосіб, називається границею послідовності $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ за ультрафільтром $\mathfrak{U}$ і позначається $\lim\limits_{\mathfrak{U}} a_n$. Для даної послідовності $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ банахових просторів позначимо $\ell^\infty((X_n)_{n\in\mathbb{N}})$ простір всіх послідовностей $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у добутку $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, таких що $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$. Позначимо

$$N_U := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) : \lim_{\mathfrak{U}} \|x_n\| = 0\},$$

$$\prod_{\mathfrak{U}} X_n := \ell^\infty((X_n)_{n\in\mathbb{N}})/N_U.$$

З нормою $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \lim\limits_{\mathfrak{U}} \|x_n\|$ цей факторпростір є банаховим простором, який називається ультрадобутком сім'ї просторів $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ за ультрафільтром $\mathfrak{U}$.

Твердження 1.41 ([10, Proposition 2.2]). *Нехай $\mathfrak{U}$ – вільний ультрафільтр на $\mathbb{N}$ і $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – послідовність GL-посторів. Нехай $Z = \prod\limits_{\mathfrak{U}} X_n$. Тоді для кожного $z \in S_Z$ існує функціонал $z^* \in S_{Z^*}$, такий що $z^*(z) = 1$ і для кожного $y \in S_Z$ знайдуться $z_1, z_2 \in S_Z$, такі що $z^*(z_1) = 1 = -z^*(z_2)$ і $\|y - z_1\| + \|y - z_2\| = 2$. Зокрема, Z також є GL-простором.*

Щоб ознайомитися з наступними результатами нам знадобляться деякі додаткові означення та термінологія. Нагадаємо спочатку, що лінійний проектор $P\colon X \to X$ називається M-проектором, якщо

$$\|x\| = \max\{\|Px\|; \|x - Px\|\}$$

для всіх $x \in X$. P називається L-проектором, якщо

$$\|x\| = \|Px\| + \|x - Px\|$$

для всіх $x \in X$.

Замкнений підпростір Y у X називають M-доданком (L-доданком) у X, якщо він є образом M-проектора (L-проектора) на X. Інакше кажучи, Y є M-доданком (L-доданком) у X тоді і тільки тоді, коли існує деякий замкнений підпростір Z у X, такий що X – це ℓ_∞-сума Y і Z (X – ℓ_1-сума Y і Z). Також, Y називають M-ідеалом у X якщо $Y^\perp$ є L-доданком у X^* (де $Y^\perp := \{x^* \in X^*\colon x^*|_Y = 0\}$ – анулятор підпростору Y).

Норма F на $\mathbb{R}^2$ називається абсолютною, якщо $F(a, b) = F(|a|, |b|)$ для всіх $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ і називається нормалізованою, якщо $F(1, 0) = 1 = F(0, 1)$. Далі у цьому розділі літера F позначатиме абсолютну нормалізовану норму на $\mathbb{R}^2$. Якщо X і Y – банахові простори, їхня F-сума визначається як прямий добуток $X \times Y$ з нормою $\|(x,y)\| = F(\|x\|,\|y\|)$, що знову є банаховим простором.

Лінійний проектор $P\colon X \to X$ називається F-проектором, якщо

$$\|x\| = F(\|Px\|, \|x - Px\|)$$

для всіх $x \in X$. Звичайно, замкнений підпростір Y у X називають F-доданком у X, якщо він є образом F-проектора (інакше кажучи, X є F-сумою Y і Z для деякого замкненого підпростору Z). Нарешті, Y називається F-ідеалом, якщо $Y^{\perp}$ є F^*-доданком у X^*, де F^* – обернена спряжена до F норма, тобто

$$F^*(a,b) = \sup\{|av + bu|\colon (u,v) \in \mathbb{R}^2, F(u,v) \leqslant 1\}$$

для всіх $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Теорема 1.42 ([10, Theorem 2.4]). *Якщо F – абсолютна нормалізована норма на $\mathbb{R}^2$, така що точка $(0,1)$ є крайньою для одиничної кулі простору $(\mathbb{R}^2, F^*)$, X – GL-простір і Y – F-ідеал на X, тоді Y також є GL-простором.*

Твердження 1.43 ([10, Proposition 2.6]). *Якщо X є GL-простором і Y є L-доданком у X, тоді Y також є GL-простором.*

Як зазначалося раніше, зокрема, отримуємо, що M-ідеали у GL-просторах також є узагальнено-пишними.

Висновки до розділу 1

У цьому розділі ми зробили огляд наукової літератури за темою дисертації, ввели основні означення і поняття. Даний розділ глибше розкриває актуальність обраної теми дослідження та вмотивовує вивчення задач та питань, що постають у дисертаційній роботі.

РОЗДІЛ 2

ПЛАСТИЧНІСТЬ ОДИНИЧНИХ КУЛЬ БАНАХОВИХ ПРОСТОРІВ ТА ПОВ'ЯЗАНІ ПИТАННЯ

Нагадаємо, що метричний простір називається пластичним, якщо кожна нерозтягувальна бієкція цього простору на себе є ізометрією. Нерозтягуючі бієкції ми також скорочено будемо називати BnE-відобраденнями (від англ. bijective, non-expansive). Перше питання, що буде розглядатися у цьому розділі:

Питання 2.1. *Чи є пластичною одинична куля довільного банахового простору?*

Ми дамо ствердну відповідь на це запитання у декількох окремих випадках. Також ми будемо розглядати модифіковану задачу, яка є узагальненням попередньої.

Питання 2.2. *Для яких просторів X, Y можна стверджувати, що кожна нерозтягувальна бієкція $F\colon B_X \to B_Y$ є ізометрією?*

2.1 Узагальнена задача для одиничних куль строго опуклих просторів

Покажемо, що питання 2.2 має позитивну відповідь, коли Y – строго опуклий простір, а X – довільний банахів простір. Спершу наведемо декілька допоміжних результатів з [6].

Для $x \in S_X$ і $a \in (0,1)$ будемо використовувати позначення

$$D(x,a) := aB_X \cap (x + (1-a)B_X),$$

$$D_1(x) := (x + B_X) \cap (-x + B_X).$$

Лема 2.3 (Lemma 2.1 of [6])**.** *Для всіх $x \in S_X$ і $a \in (0,1)$*

$$D(x,a) = a\{x + y \in B_X : x - \frac{a}{1-a}y \in B_X\}. \tag{2.1}$$

Якщо $x \in \operatorname{ext}(B_X)$, *тоді* $D(x,a) = \{ax\}$. *Якщо* $x \notin \operatorname{ext}(B_X)$, *тоді* $D(x, \frac{1}{2})$ *містить більше однієї точки.*

Лема 2.4 (Lemma 2.2 of [6])**.**

$$D_1(x) = -x + \{x + y \in B_X : x - y \in B_X\}.$$

Якщо $x \in \operatorname{ext}(B_X)$, *тоді* $D_1(x) = \{0\}$.

Далі доведемо деякі важливі властивості BnE-відображень. Наступна теорема узагальнює теорему 2.3 з [6], де розглядався випадок $X = Y$. Хоча формально цей результат є новим, його обґрунтування повторює доведення згаданої теореми майже дослівно.

Теорема 2.5. *Нехай* $F\colon B_X \to B_Y$ *– BnE-відображення. Тоді справедливі наступні твердження.*

(1) $F(0) = 0$.

(2) $F^{-1}(S_Y) \subset S_X$.

(3) $F(D(x,a)) \subset D(F(x),a)$ *для всіх* $x \in F^{-1}(S_Y)$ *і* $a \in (0,1)$.

(4) Якщо $F(x)$ *– це крайня точка одиничної кулі* B_Y, *тоді* $F(ax) = aF(x)$ *для будь-якого* $a \in (0,1)$.

(5) Якщо $F(x)$ *– це крайня точка одиничної кулі* B_Y, *тоді* x *– це крайня точка одиничної кулі* B_X.

(6) Якщо $F(x)$ *– це крайня точка одиничної кулі* B_Y, *тоді* $F(-x) = -F(x)$.

Якщо Y *– строго опуклий простір, тоді*

(i) F *відображає* S_X *бієктивно на* S_Y;

(ii) $F(ax) = aF(x)$ *для всіх* $x \in S_X$ *та* $a \in (0,1)$;

(iii) $F(-x) = -F(x)$ *для всіх* $x \in S_X$.

Доведення. (1) Точка 0 – це єдина точка одиничної кулі, відстань від якої до будь-якої іншої точки одиничної кулі не перевищує 1. BnE-відображення зберігає цю властивість.

(2) З властивості (1) витікає, що якщо $\|x\|_X < 1$, тоді $\|F(x)\|_Y < 1$. Отже, F відображає внутрішні точки кулі у внутрішні. Таким чином, $F^{-1}(S_Y) \subset S_X$.

(3) $D(x,a)$ – це множина точок z, таких що $\|z\|_X \leqslant a$ і $\|x-z\|_X \leqslant 1-a$. Отже, для кожного $z \in D(x,a)$, $F(z)$ має задовольняти умови $\|F(z)\|_Y \leqslant a$ і $\|F(x)-F(z)\|_Y \leqslant 1-a$, тобто, $F(z) \in D(F(x),a)$.

(4) Нехай $F(x) \in \operatorname{ext}(B_Y)$. Тоді $D(F(x),a) = \{aF(x)\}$ за леммою 2.3. Оскільки для всіх $a \in (0,1)$ маємо, що $ax \in D(x,a)$, отримуємо $F(ax) \in D(F(x),a) = \{aF(x)\}$.

(5) Припустимо, що $F(x) \in \operatorname{ext}(B_Y)$. Тоді множина $D(F(x),1/2)$ містить лише одну точку. З твердження (3) та ін'єктивності F випливає, що $D(x,1/2)$ складається з однієї точки, тобто, $x \in \operatorname{ext}(B_X)$.

(6) Припустимо, що $F(x) \in \operatorname{ext}(B_Y)$. Оскільки F – сюр'єктивне відображення, існує елемент $y \in S_X$, такий що $F(y) = -F(x)$. Тоді

$$\|x-y\|_X \geqslant \|F(x) - (-F(x))\|_Y = 2.$$

Нехай $z = \dfrac{1}{2}(x+y) \in B_X$. Оскільки

$$\|x-z\|_X = \|x - \frac{1}{2}(x+y)\|_X = \|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y)\|_X$$
$$= \|\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x)\|_X = \|y - \frac{1}{2}(x+y)\|_X = \|y-z\|_X \leqslant 1.$$

З нерозтягуваності відображення F маємо, що $\|F(x)-F(z)\|_Y \leqslant 1$. Також маємо

$$\|F(x)+F(z)\|_Y = \|-F(y)+F(z)\|_Y = \|F(y)-F(z)\|_Y \leqslant 1.$$

Це означає, що

$$F(z) \in D_1(F(x)) = \{0\},$$

таким чином, $z = 0$ і $y = -x$. Отже, $F(-x) = -F(x)$.

Тепер розглянемо випадок, коли Y – строго опуклий простір.

(i) Будемо міркувати від супротивного. Припустимо, що $F(S_X) \neq S_Y$. Завдяки твердженню (2) це означає, що $F(y) \notin S_Y$ для деякого $y \in S_X$. Оскільки F – сюр'єктивне відобрадення, існує елемент $x \in S_X$, такий що $F(x) = F(y)/\|F(y)\|_Y$. Тоді з твердження (4) випливає, що

$$F(\|F(y)\|_Y x) = \|F(y)\|_Y F(x) = F(y),$$

що суперечить ін'єктивності F.

У випадку строгої опуклості простору Y твердження (ii) і (iii) є безпосередніми наслідками з (4) та (6) відповідно. □

Далі будемо використовувати позначення з [6]. Для всіх $u \in S_X$ і $v \in X$ позначимо через $u^*(v)$ похідну за напрямом функції $x \mapsto \|x\|_X$ у точці u за напрямом v:

$$u^*(v) = \lim_{a \to 0^+} \frac{1}{a} \left(\|u + av\|_X - \|u\|_X \right).$$

Оскільки норма – це опукла функція, похідна за напрямом існує.

Нехай $M \subset X$ – підпростір, u – точка гладкості одиничної сфери S_M і $u^*|_M$ – обмеження u^* на M. $u^*|_M$ – це опорний функціонал у точці u, тобто єдиний лінійний функціонал на M, який задовольняє умови

$$u^*|_M(u) = 1,$$
$$\|u^*|_M\| = 1.$$

Якщо u – це не точка гладкості, то відображення $u^* \colon X \to \mathbb{R}$ не є лінійним, але воно субадитивне і позитивно-однорідне:

$$u^*(y_1) + u^*(y_2) \geqslant u^*(y_1 + y_2),$$
$$u^*(ty) = tu^*(y), \text{ для } t \geqslant 0.$$

Для доведення цих фактів ми скористаємося нерівністю трикутника і виконаємо заміну змінних:

$$\begin{aligned}
u^*(y_1+y_2) &= \lim_{a\to+0}\frac{1}{a}\left(\|u+a(y_1+y_2)\|_X-\|u\|_X\right)=\\
&= \lim_{a\to+0}\frac{1}{2a}\left(2\|u+2a(y_1+y_2)\|_X-2\|u\|_X\right)=\\
&= \lim_{b\to+0}\frac{1}{b}\left(2\|u+b(y_1+y_2)\|_X-2\|u\|_X\right)\leqslant\\
&\leqslant \lim_{b\to+0}\frac{1}{b}\left(\|u+by_1\|_X-\|u\|_X\right)+\\
&+\lim_{b\to+0}\frac{1}{b}\left(\|u+by_2\|_X-\|u\|_X\right)=u^*(y_1)+u^*(y_2).\\
tu^*(y) &= \lim_{a\to+0}\frac{t}{a}\left(\|u+ay\|_X-\|u\|_X\right)=\\
&= \lim_{b\to+0}\frac{1}{b}\left(\|u+bty\|_X-\|u\|_X\right)=u^*(ty).
\end{aligned}$$

Якщо підставити в умову субадитивності $y_1 = v$ і $y_2 = -v$, можна отримати

$$u^*(v) \geqslant -u^*(-v). \tag{2.2}$$

Також u^* має ще одну властивість: для довільних $y_1, y_2 \in X$

$$u^*(y_1) - u^*(y_2) \leqslant \|y_1 - y_2\|_X. \tag{2.3}$$

Доведемо наявність останньої властивості:

$$\begin{aligned}
u^*(y_1)-u^*(y_2) &= \lim_{a\to+0}\frac{1}{a}\left(\|u+ay_1\|_X-\|u+ay_2\|_X\right)\\
&\leqslant \lim_{a\to+0}\frac{1}{a}\left(\|u+ay_1-u-ay_2\|_X\right)=\|y_1-y_2\|_X.
\end{aligned}$$

Доведення основної теореми у випадку строго опуклого простору Y спирається на наступні леми. Перша є прямим узагальненням [6, Lemma 2.4] на випадок двох різних просторів. Друга добута з доведення [6, Lemma 2.5].

Лема 2.6. *Нехай $F\colon B_X \to B_Y$ – це BnE-відображення. Припустимо, що для деяких $u \in S_X$ і $v \in B_X$ виконуються рівності $u^*(-v) = -u^*(v)$, $\|F(u)\| = \|u\|$ і $F(av) = aF(v)$ для усіх $a \in [-1, 1]$. Тоді*

$$(F(u))^*(F(v)) = u^*(v).$$

Доведення.

$$\begin{aligned}(F(u))^*(-F(v)) &= \lim_{a\to+0}\frac{1}{a}\left(\|F(u)-aF(v)\|_Y - \|F(u)\|_Y\right)\\ &= \lim_{a\to+0}\frac{1}{a}\left(\|F(u)-F(av)\|_Y - \|u\|_X\right)\\ &\leqslant \lim_{a\to+0}\frac{1}{a}\left(\|u-av\|_X - \|u\|_X\right) = u^*(-v),\end{aligned}$$

отже,

$$(F(u))^*(-F(v)) \leqslant u^*(-v).$$

Підставимо $-v$ замість v і отримаємо

$$(F(u))^*(-F(-v)) \leqslant u^*(v).$$

Застосуємо ці дві нерівності разом з (2.2)

$$\begin{aligned}(F(u))^*(F(v)) &\geqslant -(F(u))^*(-F(v)) \geqslant -u^*(-v) = u^*(v)\\ &\geqslant (F(u))^*(-F(-v)) = (F(u))^*(F(v)).\end{aligned}$$

Таким чином, усі нерівності у цьому ланцюжку перетворюються на рівності. □

Лема 2.7. *Нехай $F\colon B_X \to B_Y$ – це BnE-відображення, таке що $F(S_X) = S_Y$. Нехай $V \subset S_X$ – така підмножина, що $F(av) = aF(v)$ для всіх $a \in [-1,1]$, $v \in V$. Позначимо $A = \{tx : x \in V, t \in [-1,1]\}$, тоді $F|_A$ – це бієктивна ізометрія між A та $F(A)$.*

Доведення. Зафіксуємо довільні $y_1, y_2 \in A$. Нехай $E = \mathrm{Lin}\{y_1, y_2\}$, і нехай $W \subset S_E$ – це множина точок гладкості S_E (яка є щільною у S_E). Усі функціонали x^*, де $x \in W$, лінійні на E, тож $x^*(-y_i) = -x^*(y_i)$, для $i = 1, 2$. Також, у відповідності з нашим припущенням, $F(ay_i) = aF(y_i)$ для всіх $a \in [-1,1]$. Можна застосувати лему 2.6.

$$\begin{aligned}\|F(y_1)-F(y_2)\|_Y &\leqslant \|y_1-y_2\|_X = \sup\{x^*(y_1-y_2) : x \in W\}\\ &= \sup\{x^*(y_1) - x^*(y_2) : x \in W\}\\ &= \sup\{(F(x))^*(F(y_1)) - (F(x))^*(F(y_2)) : x \in W\}\\ &\leqslant \|F(y_1)-F(y_2)\|_Y,\end{aligned}$$

де у останній нерівності ми застосували (2.3). Отже,

$$\|F(y_1) - F(y_2)\| = \|y_1 - y_2\|.$$

$\square$

Наслідок 2.8. *Якщо $F\colon B_X \to B_Y$ – це BnE-функція, яка задовольняє умови (i), (ii), та (iii) теореми 2.5, тоді F – це ізометрія.*

Доведення. Для доведення цього факту необхідно застосувати лему 2.7 з $V = S_X$ і $A = B_X$. $\square$

Теорема 2.9. *Нехай $F\colon B_X \to B_Y$ – BnE-відображення. Якщо простір Y строго опуклий, то відображення F – це ізометрія.*

Доведення. Якщо Y – строго опуклий простір, то відображення F задовольняє умови (i), (ii) та (iii) теореми 2.5. Отже, можна застосувати наслідок 2.8 і отримати твердження теореми. $\square$

Далі викладемо результат, який хронологічно був отриманий нами значно пізніше. А саме, розглянемо задачу 2.2 для строго опуклого простору X і довільного простору Y.

Теорема 2.10 ([1, Theorem 4.2]). *Нехай X, Y – банахові простори, X – строго опуклий простір і $F : B_X \to B_Y$ – BnE-відображення. Тоді F є ізометрією.*

Для доведення теореми нам знадобиться деяка додаткова термінологія. Якщо у нормованому просторі вектори x та y мають однаковий напрям, то виконується рівність

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|. \tag{2.4}$$

У просторі, що не є строго опуклим, така рівність може виконуватися не лише для співнаправлених векторів. Цей факт мотивує наступне означення, запозичене нами з [36].

Означення 2.11. Елементи $x, y \in X$ будемо називати *квазі-співнаправленими*, якщо вони задовольняють рівність (2.4).

Завдяки нерівності трикутника, щоб продемонструвати рівність (2.4) достатньо перевірити, що $\|x+y\| \geqslant \|x\| + \|y\|$. Далі ми наведемо відому лему, доведення якої можна, наприклад, знайти в [36, стор. 47]. Ми повторюємо доведення для зручності читача.

Лема 2.12. *Якщо $x, y \in X$ – квазі-співнаправлені елементи, тоді для будь-яких $a, b > 0$ елементи ax і by також є квазі-співнаправленими.*

Доведення. Завдяки симетрії можна вважати, що $a \geqslant b$. Тоді,

$$\begin{aligned} \|ax + by\| &= \|a(x+y) - (a-b)y\| \\ &\geqslant a\|x+y\| - (a-b)\|y\| = a\|x\| + b\|y\|. \end{aligned}$$

□

З геометричної точки зору $x, y \in S_X$ є квазі-співнаправленими, якщо весь відрізок

$$[x, y] := \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\}$$

лежить на одиничній сфері. Якщо $C \subset S_X$ – опукла множна, тоді будь-які два елементи множини C є квазі-співнаправленими.

Відзначимо наступний простий факт.

Лема 2.13. *Нехай X, Y – банахові простори, $F : B_X \to B_Y$ – BnE-відображення і $y_1, y_2 \in S_Y$ – пара квазі-співнаправлених елементів. Тоді,*

(1) $F^{-1}(y_1)$ є квазі-співнаправленим з $-F^{-1}(-y_2)$, отже

(2) якщо $F^{-1}(-y_2) = -F^{-1}(y_2)$, то $F^{-1}(y_1)$ є квазі-співнаправленим з $F^{-1}(y_2)$.

(3) Зокрема, якщо y_2 – крайня точка одиничної кулі B_Y, тоді $F^{-1}(y_1)$ є квазі-співнаправленим з $F^{-1}(y_2)$.

Доведення.

$$\begin{aligned} \left\|F^{-1}(y_1) + \left(-F^{-1}(-y_2)\right)\right\| &= \left\|F^{-1}(y_1) - F^{-1}(-y_2)\right\| \\ &\geqslant \|y_1 - (-y_2)\| = \|y_1 + y_2\| = 2. \end{aligned}$$

□

Доведення теореми 2.10. Доведення витікає безпосередньо з вищезгаданої леми. Завдяки теоремі 2.9 достатньо довести, що простір Y є строго опуклим. Припустимо супротивне, тобто що одинична сфера S_Y містить нетривіальний відрізок $[y_0, y_1] := \{ty_1 + (1-t)y_0 : t \in [0,1]\}$. Оскільки X – строго опуклий простір, єдиний елемент на сфері S_X, квазі-співнаправлений з $F^{-1}(y_1)$, це $F^{-1}(y_1)$. Згідно пункту (1) леми 2.13, усі елементи $-F^{-1}(-y_t)$, де $y_t := ty_1 + (1-t)y_0$, $t \in [0,1]$, є квазі-співнаправленими з $F^{-1}(y_1)$. Ця суперечність завершує доведення теореми. □

2.2 Узагальнена задача для одиничних куль скінченновимірних просторів

У цьому розділі ми відповімо на питання 2.2 у випадку двох різних скінченновимірних просторів. Зазначимо, що питання 2.1 для одиничної кулі скінченновимірного простору вже має ствердну відповідь завдяки, наприклад, теоремі 1.7. Зауважимо також, що підхід, який використовувався для доведення вищезгаданої теореми 1.7 не підходить у випадку двох різних просторів, бо цей підхід ґрунтується на ітераціях відображення. Тож нам довелося шукати новий шлях для розв'язку.

Перш ніж перейти до основного результату розділу, нагадаємо означення та властивості тотальних та нормуючих підмножин спряженого простору, що використовуються у доведенні.

Означення 2.14. Підмножина $V \subset S_{X^*}$ називається *тотальною*, якщо для будь-якого $x \neq 0$ існує $f \in V$, такий що $f(x) \neq 0$.

Означення 2.15. Підмножина $V \subset S_{X^*}$ називається *нормуючою*, якщо $\sup |f(x)|_{f \in V} = \|x\|$ для всіх $x \in X$.

Лема 2.16 ([12], Exercise 9, p. 538). *Нехай $A \subset S_X$ – щільна підмножина в S_X, і для кожного $a \in A$ нехай f_a – деякий опорний* *функціонал у точці a. Тоді $V = \{f_a : a \in A\}$ – нормуюча підмножина (а отже і тотальна).*

Далі сформулюємо простий наслідок з теореми про біполяру.

Лема 2.17. *Нехай X – рефлексивний простір. Тоді $V \subset S_{X^*}$ – нормуюча підмножина тоді і тільки тоді, коли $\overline{\mathrm{aconv}}(V) = B_{X^*}$.*

Також нам знадобиться наступне твердження.

Твердження 2.18 (Brower's invariance of domain principle [2]). *Нехай U – відкрита множина у $\mathbb{R}^n$ і $f : U \to \mathbb{R}^n$ – ін'єктивне неперервне відображення, тоді $f(U)$ відкрита в $\mathbb{R}^n$.*

Наслідок 2.19. *Якщо $\mathbb{R}^m$ містить гомеоморфну копію кулі простору $\mathbb{R}^n$, то $m \geqslant n$.*

Зараз ми можемо сформулювати основний результат підрозділу.

Теорема 2.20. *Нехай X, Y – банахові простори, Y має скінченну вимірність, $F : B_X \to B_Y$ – BnE - відображення. Тоді F є ізометрією.*

Доведення. Розглянемо довільний скінченновимірний підпростір $Z \subset X$. Тоді звуження F на B_Z є бієктивним неперервним відображенням між двома компактними множинами – B_Z і $F(B_Z)$, тож B_Z гомеоморфна $F(B_Z)$. Таким чином, з наслідку 2.19 випливає, що $\dim Z \leqslant \dim Y$. Оскільки підмножина $Z \subset X$ довільна, можна стверджувати, що $\dim X \leqslant \dim Y$. Отже, F – це бієктивне неперервне відображення між компактними множинами B_X і B_Y, тобто F є гомеоморфізмом. Застосування твердження 2.18 дозволяє стверджувати, що $\dim X = \dim Y$, F відображає внутрішні точки у внутрішні і $F(S_X) = S_Y$.

Нехай G – це множна всіх $x \in S_X$, таких що норма диференційовна у x та $F(x)$. Відповідно до [21, Theorem 25.5], доповнення до множини точок, у яких норма диференційовна, є множиною першої категорії. Отже, множина G щільна у S_X, як перетин двох множин, доповнення до яких є множинами першої категорії. Нагадаємо, що F є гомеоморфізмом, отже

$F(G)$ – щільна множина у S_Y. Таким чином, з леми 2.16 випливає, що

$$A := \{x^* : x \in G\}$$

і

$$B := \{F(x)^* : x \in G\} = \{y^* : y \in F(G)\}$$

є нормуючими підмножинами у X^* та Y^* відповідно. Як наслідок, за лемою 2.17

$$\overline{\mathrm{aconv}}(A) = B_{X^*}, \quad \overline{\mathrm{aconv}}(B) = B_{Y^*}. \tag{2.5}$$

Позначимо

$$K = F^{-1}(\mathrm{ext}\, B_Y) \subset \mathrm{ext}\, B_X.$$

Помітимо, що для всіх $x \in G$ функціонали $(F(x))^*$ і x^* є лінійними, тож з леми 2.6 випливає, що для всіх $x \in G$ і $z \in K$ виконується наступна рівність:

$$(F(x))^*(F(z)) = x^*(z).$$

Задамо відображення $H : A \to B$ таким чином:

$$H(x^*) = (F(x))^*.$$

Щоб впевнитися у коректності цього означення необхідно перевірити, що для всіх $x_1, x_2 \in G$ виконується імплікація:

$$({x_1}^* = {x_2}^*) \Longrightarrow (F(x_1)^* = F(x_2)^*).$$

Припустимо для фіксованих $x_1, x_2 \in G$, що ${x_1}^* = {x_2}^*$. Для перевірки рівності $F(x_1)^* = F(x_2)^*$ достатньо перевірити, що $F(x_1)^* y = F(x_2)^* y$ для $y \in \mathrm{ext}\, B_Y$, тобто для y вигляду $y = F(x)$ з $x \in K$. Насправді,

$$F(x_1)^*(F(x)) = {x_1}^*(x) = {x_2}^*(x) = F(x_2)^*(F(x)).$$

Продовжимо H за лінійністю до $\widetilde{H} : X^* = \mathrm{Lin}(x^*, x \in G) \to Y^*$. Для

$$x^* = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k {x_k}^*, x_k \in G$$

нехай
$$\widetilde{H}(x^*) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k H({x_k}^*).$$
Щоб перевірити коректність такого продовження ми доведемо, що
$$\left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k {x_k}^* = \sum_{k=1}^{M} \mu_k {y_k}^*\right) \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k H({x_k}^*) = \sum_{k=1}^{M} \mu_k H({y_k}^*)\right).$$
Знову, будемо доводити рівність функціоналів
$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k H({x_k}^*) = \sum_{k=1}^{M} \mu_k H({y_k}^*)$$
лише на елементах вигляду $y = F(x)$ з $x \in K$.
$$\left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k H({x_k}^*)\right) F(x) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k F(x_k)^*(F(x)) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k {x_k}^*(x)$$
$$= \sum_{k=1}^{M} \mu_k {y_k}^*(x) = \sum_{k=1}^{M} \mu_k F(y_k)^*(F(x)) = \left(\sum_{k=1}^{M} \mu_k H({y_k}^*)\right) F(x).$$
Відмітимо, що відповідно до (2.5),
$$\widetilde{H}(X^*) = \mathrm{Lin} H(A) = \mathrm{Lin} B = Y^*,$$
таким чином $\widetilde{H}$ сюр'єктивне, а отже, через рівність відповідних вимірностей, бієктивне. Нагадаємо, що
$$\widetilde{H}(A) = H(A) = B,$$
отже $\widetilde{H}$ відображає A на B бієктивно. Застосовуючи знову (2.5) отримуємо, що
$$\widetilde{H}(B_{X^*}) = B_{Y^*}$$
і X^* та Y^* ізометричні. Перейдемо до спряжених просторів і побачимо, що Y^{**} ізометричний X^{**} (де $\widetilde{H}^*$ – відповідна ізометрія). Це означає, що X і Y ізометричні. Таким чином, B_X і B_Y є двома копіями одного і того самого компактного метричного простору. Застосування теореми 1.7 про ЕС-пластичність компактів завершує доведення. □

2.3 Узагальнена задача для одиничної кулі простору ℓ_1

У даному розділі задача 2.2 буде роз'язана у випадку, коли X – довільний простір, а Y – це простір ℓ_1. У доведенні ми знову будемо використовувати принцип інваріантності області Брауера, а також наступні відомі результати.

Твердження 2.21 (P. Mankiewicz's [18]). *Якщо $A \subset X$ і $B \subset Y$ є опуклими множинами з непорожньою внутрішністю, тоді будь-яка бієктивна ізометрія $F : A \to B$ може бути продовжена до бієктивної афінної ізометрії $\widetilde{F} : X \to Y$.*

Зазначимо, що у випадку, коли A, B – одиничні кулі, кожна ізометрія відображає 0 у 0, отже кожна бієктивна ізометрія $F : B_X \to B_Y$ є обмеженням лінійної ізометрії між X та Y.

Ми впевнені, що наступний результат не є новим, але ми не змогли знайти його у науковій літературі, тому викладаємо його з доведенням.

Твердження 2.22. *Нехай X – скінченновимірний нормований простір і V – підмножина B_X, що має наступні дві властивості: V гомеоморфна B_X і $V \supset S_X$. Тоді $V = B_X$.*

Доведення. За означенням, топологічний простір E має FP-властивість (англ. fixed-point property), якщо будь-яке неперервне відображення $f : E \to E$ має нерухому точку. Відповідно до теореми Брауера про нерухому точку, B_X має FP-властивість, отже, V також має FP-властивість. Будемо розмірковувати від супротивного. Припустимо, що $V \neq B_X$. Тоді знайдеться точка $x_0 \in B_X \setminus V$. Для кожної точки $x \in V$ розглянемо піввісь

$$L_x = \{x_0 + tx : t \in [0, +\infty)\}$$

і позначимо $P(x)$ точку, де L_x перетинає S_X. Тоді P є неперервною ретракцією з V на S_X, отже S_X – ретракт V. Це призводить до протиріччя, тому що ретракт множини з FP-властивістю повинен також мати FP-властивість, але S_X не має цієї властивості (можна розглянути відображення $x \mapsto -x$). $\square$

Викладемо обіцяну теорему.

Теорема 2.23. *Нехай X – банахів простір, $F : B_X \to B_{\ell_1}$ – BnE-відображення. Тоді F – ізометрія.*

Доведення. Позначимо

$$e_n = (\delta_{i,n})_{i \in \mathbb{N}}, n = 1, 2, \dots$$

елементи канонічного базису у ℓ_1 (як зазвичай, $\delta_{i,n} = 0$ для $n \neq i$ і $\delta_{n,n} = 1$). Легко побачити, що

$$ext(B_{\ell_1}) = \{\pm e_n, i = 1, 2, ...\}.$$

Позначимо $g_n = F^{-1} e_n$. З твердження (5) теореми 2.5 випливає, що всі g_n є крайніми точками одиничної кулі B_X.

Для всіх $N \in \mathbb{N}$ позначимо

$$X_N = \mathrm{Lin}\{g_k\}_{k \leqslant N}$$

і через U_N і ∂U_N позначимо одиничну кулю і одиничну сферу X_N відповідно. Аналогічно, для

$$Y_N = \mathrm{Lin}\{e_k\}_{k \leqslant N}$$

позначимо через V_N і ∂V_N одиничну кулю і одиничну сферу Y_N відповідно.

Твердження. *Для будь-якого $N \in \mathbb{N}$ і будь-якого набору $\{a_k\}_{k \leqslant N}$ дійсних чисел з $\| \sum_{n \leqslant N} a_n g_n \| \leqslant 1$*

$$F\left(\sum_{n \leqslant N} a_n g_n\right) = \sum_{n \leqslant N} a_n e_n.$$

Доведення Твердження. Скористаємося індукцією за N. Для $N = 1$ Твердження виконується завдяки пунктам (4) і (6) теореми 2.5. Припустимо, що воно виконується для $N - 1$ і доведемо, що воно справджується для N. Покажемо спершу, що для всіх

$$x = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i g_i$$

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i|. \tag{2.6}$$

Відзначимо, що через позитивну однорідність норми достатньо розглядати

$$x = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i g_i,$$

де коефіцієнти задовольняють умову

$$\sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| \leqslant 1.$$

У цьому випадку $x \in U_N$. Таким чином,

$$\left\|\sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i g_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{N-1} \|\alpha_i g_i\| = \sum_{i=1}^{N-1} |\alpha_i| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| \leqslant 1,$$

і

$$\sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i g_i \in U_N.$$

З одного боку,

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{N} \alpha_i g_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i|.$$

З іншого боку, з індуктивного припущення маємо

$$F(\sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i g_i) = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i e_i,$$

а з пунктів (4) і (6) теореми 2.5 отримуємо $F(-\alpha_N g_N) = -\alpha_N e_N$. Отже,

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\|\sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i g_i + \alpha_N g_N\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i g_i - (-\alpha_N g_N)\right\| \\ &\geqslant \left\|F(\sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i g_i) - F(-\alpha_N g_N)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i e_i + \alpha_N e_N\right\| = \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i|, \end{aligned}$$

і рівність (2.6) доведена. Це означає, що

$$U_N = \left\{\sum_{n\leqslant N} a_n g_n : \sum_{n\leqslant N} |a_n| \leqslant 1\right\},$$

$$\partial U_N = \left\{\sum_{n\leqslant N} a_n g_n : \sum_{n\leqslant N} |a_n| = 1\right\}.$$

Далі покажемо, що

$$F(U_N) \subset V_N. \tag{2.7}$$

Для цього розглянемо $x \in U_N$. Якщо x має вигляд αg_N, Твердження випливає з теореми 2.5. Таким чином, ми маємо розглядати

$$x = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i g_i,$$

де

$$\sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| \leqslant 1 \text{ і } \sum_{i=1}^{N-1} |\alpha_i| \neq 0.$$

Позначимо розклад $F(x)$ таким чином:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i.$$

Для елемента

$$x_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i g_i}{\sum_{i=1}^{N-1} |\alpha_i|}$$

за індуктивним припущенням

$$F(x_1) = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i e_i}{\sum_{i=1}^{N-1} |\alpha_i|}.$$

Отже, можна записати наступні нерівності:

$$\begin{aligned}
2 &= \left\| F(x_1) - \frac{\alpha_N}{|\alpha_N|} e_N \right\| \leqslant \left\| F(x_1) - \sum_{i=1}^{N} y_i e_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{N} y_i e_i - \frac{\alpha_N}{|\alpha_N|} e_N \right\| \\
&= \|F(x_1) - F(x)\| + \left\| F(x) - \frac{\alpha_N}{|\alpha_N|} e_N \right\| - 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} |y_i| \\
&\leqslant \|F(x_1) - F(x)\| + \left\| F(x) - F\left(\frac{\alpha_N}{|\alpha_N|} g_N \right) \right\| \leqslant \|x_1 - x\| + \left\| x - \frac{\alpha_N}{|\alpha_N|} g_N \right\| \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \left| \alpha_j - \frac{\alpha_j}{\sum_{i=1}^{N-1} |\alpha_i|} \right| + |\alpha_N| + \sum_{j=1}^{N-1} |\alpha_j| + \left| \alpha_N - \frac{\alpha_N}{|\alpha_N|} \right| \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} |\alpha_j| \left(1 + \left| 1 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{N-1} |\alpha_i|} \right| \right) + |\alpha_N| \left(1 + \left| 1 - \frac{1}{|\alpha_N|} \right| \right) = 2.
\end{aligned}$$

Отримуємо, що всі нерівності у ланцюгу насправді виявляються рівностями, зокрема

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |y_i| = 0.$$

Тобто

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} y_i e_i \in V_N$$

і включення (2.7) доведене.

Тепер покажемо, що

$$F(U_N) \supset \partial V_N. \tag{2.8}$$

Припустимо, що навпаки існує елемент $y \in \partial V_N \setminus F(U_N)$. Позначимо $x = F^{-1}(y)$. Тоді $\|x\| = 1$ (пункт (2) теореми 2.5) і $x \notin U_N$, тобто $x \notin X_N$. Для кожного $t \in [0,1]$ розглянемо $F(tx)$. Нехай відповідний розклад наступний:

$$F(tx) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n e_n.$$

Тоді

$$\begin{aligned} 1 &= \|0 - tx\| + \|tx - x\| \geqslant \|0 - F(tx)\| + \|F(tx) - y\| \\ &= 2\sum_{n>N} |b_n| + \left\|\sum_{n\leqslant N} b_n e_n\right\| + \left\|y - \sum_{n\leqslant N} b_n e_n\right\| \geqslant 2\sum_{n>N} |b_n| + 1, \end{aligned}$$

отже,

$$\sum_{n>N} |b_n| = 0.$$

Це означає, що $F(tx) \in V_N$ для всіх $t \in [0,1]$. З іншого боку, $F(U_N)$ містить відносний окіл 0 у V_N (тут ми використовуємо факт, що $F(0) = 0$ і твердження 2.18), отже неперервна крива $\{F(tx) : t \in [0,1]\}$ у V_N, яка з'єднує 0 і y має нетривіальний перетин з $F(U_N)$. Отже існує $t \in (0,1)$, таке що $F(tx) \in F(U_N)$. Оскільки $tx \notin U_N$, це суперечить умові ін'єктивності F. Включення (2.8) доведене.

Тепер з включень (2.7) та (2.8) і твердження 2.22 випливає, що $F(U_N) = V_N$. Зазначимо, що завдяки (2.6) U_N і V_N ізометричні, отже, через скінченновимірність, U_N і V_N є компактами. Таким чином, U_N і

V_N можуть розглядатися як дві копії одного і того самого компактного метричного простору, і теорема 1.7 дозволяє стверджувати, що будь-яке BnE-відображення з U_N на V_N є ізометрією. Зокрема, F відображає U_N на V_N ізометрично. Нарешті, з твердження 2.21 випливає, що обмеження F на U_N продовжується до лінійного відображення з X_N на Y_N, *що завершує доведення Твердження.*

Тепер ми можемо закінчити доведення теореми. Спочатку перейдемо до границі при $N \to \infty$ у (2.6) і отримаємо

$$\|z\| = \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|$$

для будь-якого

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n g_n$$

такого, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty.$$

З неперервності F і доведеного Твердження випливає, що для будь-якого

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in B_{\ell_1}$$

виконуються такі рівності

$$F\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n,$$
$$F^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n.$$

Отже, для всіх $x, y \in B_{\ell_1}$ вигляду

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n,$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n$$

справедливі наступні рівності:

$$\|x-y\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)e_n\right\| = \sum_{n=1}^{\infty}|(x_n - y_n)| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)g_n\right\|$$
$$= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n - \sum_{n=1}^{\infty} y_n g_n\right\| = \left\|F^{-1}(x) - F^{-1}(y)\right\|.$$

Таким чином, F^{-1} є ізометрією, так само як і F. □

2.4 Узагальнена задача для одиничної кулі суми строго опуклих просторів по ℓ_1

У цьому розділі ми розглянемо питання 2.2 для довільного простору X та простору Y, який є сумою строго опуклих просторів по ℓ_1. Ми будемо використовувати деякі ідеї з попередніх підрозділів, але їх доведеться суттєво розвинути і доповнити, щоб обійти складнощі, що виникають у цьому більш загальному випадку. Формально кажучи, можна було б не записувати окремо результати параграфів 2.1 і 2.3, бо вони «перекриті» опублікованими пізніше результатами, що ми починаємо розглядати зараз. Але, беручи до уваги технічну складність цього «об'єднаного» результату, ми вважаємо за доцільне мати спочатку детальний запис складових частин, а вже потім переходити до головного результату.

Нехай I – множина індексів, а $Z_i, i \in I$ – фіксований набір строго опуклих банахових просторів. Ми будемо розглядати суму Z_i по ℓ_1, яку позначимо через Z. Відповідно до означення, Z – це множина всіх точок $z = (z_i)_{i \in I}$, де $z_i \in Z_i, i \in I$ з не більш ніж зліченним носієм $\mathrm{supp}(z) := \{i : z_i \neq 0\}$, таких що $\sum_{i \in I} \|z_i\|_{Z_i} < \infty$. Простір Z наділений природною нормою

$$||z|| = \|(z_i)_{i \in I}\| = \sum_{i \in I} \|z_i\|_{Z_i}. \tag{2.9}$$

Зазначимо, що навіть якщо I є незліченною множиною, сумма у (2.9) зводиться до звичайної не більш ніж зліченної суми $\sum_{i \in \mathrm{supp}(z)} \|z_i\|_{Z_i}$, яка не залежить від порядку доданків. Таким чином, немає необхідності вводити порядок на I і звертатися до незліченних сум, коли мова йде про Z.

У цьому підрозділі кожен простір Z_i ми будемо розглядати як підпростір у Z:

$$Z_i = \{z \in Z \colon \mathrm{supp}(z) \subset \{i\}\}.$$

Легко бачити, що

$$\mathrm{ext}(B_Z) = \bigcup_{i \in I} S_{Z_i}.$$

Відмітимо також, що у таких позначеннях кожен елемент $z \in Z$ може бути єдиним чином записаний як сума $z = \sum_{i \in I} z_i$, $z_i \in Z_i$ з не більш ніж зліченною кількістю ненульових доданків. До того ж такі ряди збігаються абсолютно.

Означення 2.24. Нехай E – банахів простір, $H \subset E$ – його підпростір. Будемо говорити, що лінійний проектор $P \colon E \to H$ є строгим, якщо $\|P\| = 1$ і для будь-якого $x \in E \setminus H$ виконується нерівність

$$\|P(x)\| < \|x\|.$$

Лема 2.25. *Кожен строгий проектор $P \colon E \to H$ має наступну властивість: для будь-якого $x \in E \setminus H$ і будь-якого $y \in H$ виконується нерівність*

$$\|P(x - y)\| < \|x - y\|.$$

Доведення. Якщо $x \notin H$, тоді $x - y \notin H$. Оскільки проектор P є строгим, отримуємо $\|P(x - y)\| < \|x - y\|$. □

Розглянемо скінченну підмножину $J \subset I$ і довільний набір $z = (z_i)_{i \in J}$, $z_i \in S_{Z_i}, i \in J$. Для кожного з цих z_i виберемо опорний функціонал $z_i^* \in S_{Z_i^*}$, тобто такий, що має одиничну норму, і для якого виконується умова $z_i^*(z_i) = 1$. Зі строгої опуклості Z_i випливає, що $z_i^*(x) < 1$ для всіх $x \in B_{Z_i} \setminus \{z_i\}$, $i \in J$. Позначимо $z^* = (z_i^*)_{i \in J}$ і визначимо відображення $P_{z,z^*} \colon Z \to \mathrm{Lin}\{z_i, i \in J\}$,

$$P_{z,z^*}((y_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in J} z_i^*(y_i) z_i.$$

Лема 2.26. *Відображення P_{z,z^*} є строгим проектором на* $\mathrm{Lin}\{z_i, i \in J\}$.

Доведення. Відповідно до означення ми маємо перевірити, що

(1) P_{z,z^*} є проектором на $\mathrm{Lin}\{z_i, i \in J\}$.

(2) $\|P_{z,z^*}\| = 1$.

(3) Якщо $(y_i)_{i\in I} \notin \mathrm{Lin}\{z_i, i \in J\}$, тоді $\|P_{z,z^*}((y_i)_{i\in I})\| < \|(y_i)_{i\in I}\|$.

Перевірка (1). Справді,

$$\begin{aligned} P^2_{z,z^*}((y_i)_{i\in I}) &= P_{z,z^*}\left(\sum_{i\in J} z_i^*(y_i)z_i\right) = \sum_{i\in J} z_i^*\left(z_i^*(y_i)z_i\right) z_i \\ &= \sum_{i\in J} z_i^*(y_i)z_i^*(z_i)z_i = \sum_{i\in J} z_i^*(y_i)z_i = P_{z,z^*}((y_i)_{i\in I}). \end{aligned}$$

Перевірка (2). Можна записати

$$\begin{aligned} \|P_{z,z^*}((y_i)_{i\in I})\| &= \left\|\sum_{i\in J} z_i^*(y_i)z_i\right\| = \sum_{i\in J} |z_i^*(y_i)| \\ &\leqslant \sum_{i\in J} \|y_i\| \leqslant \sum_{i\in I} \|y_i\| = \|(y_i)_{i\in I}\|. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Перевірка (3). Якщо існує $N \in I \setminus J$, таке що $y_N \neq 0$, тоді твердження, очевидно, випливає з другого рядка у (2.10). Якщо $y_N = 0$ для всіх $N \in I \setminus J$, тоді, оскільки

$$y = \sum_{i\in J} y_i \notin \mathrm{Lin}\{z_i, i \in J\},$$

існує $j \in J$, такий що $y_j \notin \mathrm{Lin}\{z_j\}$. Як наслідок, $|z_j^*(y_j)| < \|y_j\|$ для цього j. Таким чином, нерівність (2.10) стає строгою, коли переходимо від першого рядка до другого. □

Лема 2.27. *Нехай X, Y – дійсні банахові простори, $F : B_X \to B_Y$ – BnE-відображення, таке що для кожного $v \in F^{-1}(S_Y)$ і кожного $t \in [-1, 1]$ виконується умова $F(tv) = tF(v)$. Тоді F – ізометрія.*

Доведення. З теореми 2.5 відомо, що $F(0) = 0$ і $F^{-1}(S_Y) \subset S_X$. Спершу покажемо, що $F(S_X) \subset S_Y$, тобто $F(S_X) = S_Y$.

Для довільного $x \in S_X$ розглянемо точку $y = \dfrac{F(x)}{\|F(x)\|} \in S_Y$ і визначимо $\hat{x} = F^{-1}(y)$. Позначимо $t = \|F(x)\|$ і отримаємо

$$F(x) = ty = tF(\hat{x}) = F(t\hat{x}).$$

Завдяки ін'єктивності це означає, що $x = t\hat{x}$. Оскільки $\|\hat{x}\| = 1 = \|x\|$, ми маємо, що $\|F(x)\| = t = 1$, тобто $F(x) \in S_Y$.

Тепер можна застосувати лему 2.7 з $V = F^{-1}(S_Y) = S_X$ і $A = \{tx : x \in S_X, t \in [-1, 1]\} = B_X$. Тоді $F(A) = B_Y$, і лема 2.7 гарантує, що F є ізометрією. □

Теорема 2.28. *Нехай X – банахів простір, $Z_i, i \in I$ – фіксований набір строго опуклих банахових просторів, Z – ℓ_1-сума набору $Z_i, i \in I$ і $F\colon B_X \to B_Z$ – BnE-відображення. Тоді F – ізометрія.*

Доведення буде базуватися на лемі 2.29, яка описує поведінку F на деяких типових скінченновимірних частинах одиничної кулі.

В умовах теореми 2.28 розглянемо скінченну підмножину $J \subset I$, $|J| = n$ і оберемо набори $z = (z_i)_{i\in J}$, $z_i \in S_{Z_i}, i \in J$, $z^* = (z_i^*)_{i\in J}$, де кожен $z_i^* \in S_{Z_i^*}$ є опорним функціоналом для відповідного z_i. Позначимо через $x_i = F^{-1}(z_i) \in S_X$. Позначимо також через U_n і ∂U_n одиничну кулю і одиничну сферу $\mathrm{Lin}\{x_i\}_{i\in J}$ відповідно. Нехай V_n і ∂V_n позначають одиничну кулю і одиничну сферу $\mathrm{Lin}\{z_i\}_{i\in J}$.

Лема 2.29. *Для кожного набору $(a_i)_{i\in J}$ дійсних чисел, таких що $\sum_{i\in J} a_i x_i \in U_n$*

$$\left\| \sum_{i\in J} a_i x_i \right\| = \sum_{i\in J} |a_i|, \tag{2.11}$$

(що означає, зокрема, що U_n ізометрична одиничній кулі n-вимірного ℓ_1), і

$$F\left(\sum_{i\in J} a_i x_i \right) = \sum_{i\in J} a_i z_i. \tag{2.12}$$

Доведення. Скористаємося індукцією за n. Нагадаємо, що $z_i \in \operatorname{ext} B_Z$. Це означає, що для $n = 1$ твердження леми випливає з пункту (4) теореми

2.5. Припустимо, що твердження нашої леми справедливе для множини індексів з $n-1$ елементів і доведемо його, коли $|J| = n$. Зафіксуємо $m \in J$ і позначимо $J_{n-1} = J \setminus \{m\}$. Спочатку доведемо, що

$$F(U_n) \subset V_n. \tag{2.13}$$

Для цього розглянемо $r \in U_n$. Якщо r має вигляд $a_m x_m$, твердження витікає з пункту (4) теореми 2.5. Отже, ми повинні розглядати

$$r = \sum_{i\in J} a_i x_i,$$

де

$$\sum_{i\in J} |a_i| \leqslant 1 \text{ і } \sum_{i\in J_{n-1}} |a_i| \neq 0.$$

Запишемо $F(r)$ у вигляді $F(r) = (v_i)_{i\in I}$. Для елемента

$$r_1 = \sum_{i\in J_{n-1}} \frac{a_i}{\sum_{j\in J_{n-1}} |a_j|} x_i$$

за індуктивним припущенням

$$F(r_1) = \sum_{i\in J_{n-1}} \frac{a_i}{\sum_{j\in J_{n-1}} |a_j|} z_i.$$

Більше того, з одного боку,

$$\left\| \sum_{i\in J} a_i x_i \right\| \leqslant \sum_{i\in J} |a_i|.$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i\in J} a_i x_i \right\| &= \left\| \sum_{i\in J_{n-1}} a_i x_i - (-a_m x_m) \right\| \\ &\geqslant \left\| F\left(\sum_{i\in J_{n-1}} a_i x_i \right) - F(-a_m x_m) \right\| \\ &= \left\| \sum_{i\in J_{n-1}} a_i z_i - a_m z_m \right\| = \sum_{i\in J} |a_i|. \end{aligned}$$

Таким чином, рівність (2.11) доведена, і можна записати наступні нерівності:

$$
\begin{aligned}
2 &= \|F(r_1) - \frac{a_m}{|a_m|} z_m\| \\
&\leqslant \left\| F(r_1) - \sum_{i \in J} v_i \right\| + \left\| \sum_{i \in J} v_i - F\left(\frac{a_m}{|a_m|} x_m \right) \right\| \\
&= \|F(r_1) - F(r)\| + \left\| F(r) - F\left(\frac{a_m}{|a_m|} x_m \right) \right\| - 2 \left\| \sum_{i \in I \setminus J} v_i \right\| \\
&\leqslant \|F(r_1) - F(r)\| + \left\| F(r) - F\left(\frac{a_m}{|a_m|} x_m \right) \right\| \\
&\leqslant \left\| \sum_{i \in J_{n-1}} \frac{a_i}{\sum_{j \in J_{n-1}} |a_j|} x_i - \sum_{i \in J} a_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i \in J} a_i x_i - \frac{a_m}{|a_m|} x_m \right\| \\
&\leqslant \sum_{i \in J_{n-1}} \left| a_i - \frac{a_i}{\sum_{j \in J_{n-1}} |a_j|} \right| + |a_m| + \sum_{i \in J_{n-1}} |a_i| + \left| a_m - \frac{a_m}{|a_m|} \right| \\
&= \sum_{i \in J_{n-1}} |a_i| \left(1 + \left| 1 - \frac{1}{\sum_{j \in J_{n-1}} |a_j|} \right| \right) + |a_m| \left(1 + \left| 1 - \frac{1}{|a_m|} \right| \right) = 2.
\end{aligned}
$$

Отже, всі нерівності перетворюються на рівності, звідки випливає, що

$$F(r) = \sum_{i \in J} v_i$$

і

$$\|F(r_1) - F(r)\| + \left\| F(r) - F\left(\frac{a_m}{|a_m|} x_m \right) \right\| = 2.$$

Нагадаємо, що наша мета – перевірити, що

$$F(r) \in V_n.$$

Припустимо протилежне, що

$$F(r) = \sum_{i \in J} v_i \notin V_n$$

і для зручності позначимо

$$s = \sum_{j \in J_{n-1}} |z_j^*(v_j)|.$$

Тоді, використовуючи позначення леми 2.26, отримаємо

$$
\begin{aligned}
2 &= \left\| F\left(\sum_{i\in J_{n-1}} \frac{z_i^*(v_i)}{s} x_i\right) - F(r)\right\| + \left\| F(r) - F\left(\frac{z_m^*(v_m)}{|z_m^*(v_m)|} x_m\right)\right\| \\
&= \left\| \sum_{i\in J_{n-1}} \left(\frac{z_i^*(v_i)}{s} z_i - v_i\right) - v_m\right\| + \left\| \sum_{i\in J_{n-1}} v_i + v_m - \frac{z_m^*(v_m)}{|z_m^*(v_m)|} z_m\right\| \\
&> \left\| P_{z,z^*}\left(\sum_{i\in J_{n-1}} \left(\frac{z_i^*(v_i)}{s} z_i - v_i\right) - v_m\right)\right\| \\
&+ \left\| P_{z,z^*}\left(\sum_{i\in J_{n-1}} v_i + v_m - \frac{z_m^*(v_m)}{|z_m^*(v_m)|} z_m\right)\right\| \\
&= \left\| \sum_{i\in J_{n-1}} \left(\frac{z_i^*(v_i)}{s} - z_i^*(v_i) z_i\right) - z_m^*(v_m) z_m\right\|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left\| \sum_{i\in J_{n-1}} z_i^*(v_i) z_i + x_m^*(v_m) - \frac{z_m^*(v_m)}{|z_m^*(v_m)|} z_m\right\| \\
&= \sum_{i\in J_{n-1}} \left| z_i^*(v_i) - \frac{z_i^*(v_i)}{s}\right| + |z_m^*(v_m)| \\
&+ \sum_{i\in J_{n-1}} |z_i^*(v_i)| + \left| z_m^*(v_m) - \frac{z_m^*(v_m)}{|z_m^*(v_m)|}\right| \\
&= \sum_{i\in J_{n-1}} |z_i^*(v_i)| \left(1 + \left|1 - \frac{1}{s}\right|\right) \\
&+ |z_m^*(v_m)| \left(1 + \left|1 - \frac{1}{|z_m^*(v_m)|}\right|\right) = 2.
\end{aligned}
$$

Зауважимо, що ми мали змогу написати строгу нерівність завдяки лемам 2.26 та 2.25. Суперечність, що ми отримали, означає, що наше припущення було хибним і включення 2.13 насправді має місце. Далі доведемо включення

$$\partial V_n \subset F(U_n). \tag{2.14}$$

Знову будемо розмірковувати від супротивного. Нехай існує точка

$$\sum_{i\in J} t_i \in \partial V_n \setminus F(U_n).$$

Позначимо

$$\tau = F^{-1}(\sum_{i\in J} t_i).$$

Тоді

$$|| \sum_{i\in J} t_i|| = 1 \text{ і } \tau \notin U_N.$$

Перепишемо

$$\sum_{i\in J} t_i = \sum_{i\in J} \|t_i\|\hat{t}_i, \quad \hat{t}_i \in S_{Z_i}.$$

Оберемо опорні функціонали ${t_i}^*$ у точках $\hat{t}_i$, $i \in J$ і позначимо $t = (\hat{t}_i)_{i\in J}$ і $t^* = ({t_i}^*)_{i\in J}$. Ми збираємося показати, що $F(\alpha\tau) \in V_n$ для всіх $\alpha \in [0,1]$. Насправді, якщо $F(\alpha\tau) \notin V_n$ для деякого α, позначимо

$$F(\alpha\tau) = \sum_{i\in I} w_i.$$

Тоді з лем 2.26 і 2.25 ми отримаємо наступне протиріччя

$$\begin{aligned}
1 &= \|0-\alpha\tau\| + \|\alpha\tau - \tau\| \\
&\geqslant \left\|0 - \sum_{i\in I} w_i\right\| + \left\|\sum_{i\in I} w_i - \sum_{i\in J} t_i\right\| \\
&= 2\left\|\sum_{i\in I\setminus J} w_i\right\| + \left\|\sum_{i\in J} w_i\right\| + \left\|\sum_{i\in J} w_i - \sum_{i\in J} t_i\right\| \\
&> \left\|P_{t,t^*}\left(\sum_{i\in J} w_i\right)\right\| + \left\|P_{t,t^*}\left(\sum_{i\in J} w_i\right) - \sum_{i\in J} t_i\right\| \\
&= \left\|\sum_{i\in J} t_i^*(w_i)\hat{t}_i\right\| + \left\|\sum_{i\in J} t_i^*(w_i)\hat{t}_i - \sum_{i\in J} t_i\right\| \\
&= \sum_{i\in J} |t_i^*(w_i)| + \sum_{i\in J} |\|t_i\| - t_i^*(w_i)| \geqslant \sum_{i\in J} \|t_i\| = 1.
\end{aligned}$$

Помітимо, що $F(U_n)$ містить відносний окіл точки 0 у V_n (тут ми користуємося пунктом (1) з теореми 2.5 і твердженням 2.18), отже неперервна крива $\{F(\alpha\tau)\colon \alpha \in [0,1]\}$, яка з'єднує 0 з $\sum_{i\in J} t_i$ у V_n має нетривіальний перетин з $F(U_n)$. Звідси слідує, що існує $a \in [0,1]$, таке що $F(a\tau) \in F(U_n)$. Оскільки $a\tau \notin U_n$, це суперечить ін'єктивності F. Отже, включення (2.14) доведене. Тепер включення (2.13) і (2.14) разом з лемою 2.22 дозволяють стверджувати, що $F(U_n) = V_n$. Помітимо, що U_n і V_n ізометричні одиничній кулі n-вимірного ℓ_1, тобто вони можуть розглядатися як дві копії одного і того самого компактного метричного простору. Отже, EC-пластичність передкомпактних метричних просторів (теорема 1.7) дозволяє зробити висновок, що будь-яке BnE-відображення з U_n на V_n є ізометрією. Зокрема, F відображає U_n на V_n ізометрично. Нарешті, маємо змогу застосувати лему 2.21 і отримати, що обмеження відображення F на U_n продовжується до лінійного відображення з $\mathrm{Lin}\{x_i, i \in J\}$ до $\mathrm{Lin}\{z_i,\, i \in J\}$, звідки, очевидно, випливає рівність (2.12). □

Доведення [теореми 2.28]. Застосуємо лему 2.27. Щоб задовольнити умови леми, для кожного $z \in S_Z$ маємо розглянути $y = F^{-1}(z)$ і перевірити, що для кожного $t \in [-1,1]$

$$F(ty) = tz. \tag{2.15}$$

Для цього введемо позначення

$$J_z = \mathrm{supp}(z)$$

і запишемо

$$z = \sum_{i\in J_z} z_i = \sum_{i\in J_z} \|z_i\| \widetilde{z}_i,$$

де $\widetilde{z}_i \in S_{Z_i}$. Позначимо також для кожного $i \in J_z$

$$x_i := F^{-1}(\widetilde{z}_i) \in S_X.$$

Для скінченного J_z з формули (2.12) леми 2.29 випливає, що

$$y = F^{-1}(z) = F^{-1}\left(\sum_{i\in J_z} \|z_i\| \widetilde{z}_i\right) = \sum_{i\in J_z} \|z_i\| x_i,$$

і

$$F(ty) = F\left(\sum_{i\in J_z} t\|z_i\|x_i\right) = \sum_{i\in J_z} t\|z_i\|\widetilde{z}_i = tz,$$

що у данному випадку демонструє (2.15). Залишилося довести (2.15) у випадку зліченності J_z. У цьому випадку можемо записати $J_z = \{i_1, i_2, \ldots\}$ і розглянути скінченні підмножини $J_n = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$. Для цих скінченних підмножин

$$\sum_{i\in J_n} \|z_i\| \leqslant 1.$$

Таким чином,

$$\sum_{i\in J_n} \|z_i\|x_i \in U_n := B_{\mathrm{Lin}\{x_i\}_{i\in J_n}},$$

і ми можемо зробити висновок з леми 2.29, що

$$F\left(\sum_{i\in J_n} \|z_i\|x_i\right) = \sum_{i\in J_n} \|z_i\|\widetilde{z}_i.$$

Перейдемо до границі при $n \to \infty$ і отримаємо

$$F\left(\sum_{i\in J_z} \|z_i\|x_i\right) = \sum_{i\in J_z} \|z_i\|\widetilde{z}_i = z,$$

тобто

$$y = F^{-1}(z) = \sum_{i\in J_z} \|z_i\|x_i.$$

Ще одне застосування формули (2.12) з леми 2.29 дає

$$F\left(\sum_{i\in J_n} t\|z_i\|x_i\right) = \sum_{i\in J_n} t\|z_i\|\widetilde{z}_i,$$

звідки після переходу до границі випливає (2.15):

$$F(ty) = F\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in J_n} t\|z_i\|x_i\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i\in J_n} t\|z_i\|\widetilde{z}_i = \sum_{i\in J_z} t\|z_i\|\widetilde{z}_i = tz.$$

Отже, можна застосувати лему 2.27 до F і таким чином завершити доведення теореми. $\square$

2.5 Узагальнена задача для одиничної кулі банахового простору, одинична сфера якого є об'єднанням усіх своїх скінченновимірних поліедральних крайніх підмножин

Попередні результати розділу спираються на властивості BnE-відображень, пов'язані з крайніми точками. У цьому підрозділі ми будемо вивчати, як BnE-відображення діють на крайні множини і дамо відповідь на питання 2.2 для довільного банахового простору X і такого банахового простору Y, що його одинична сфера є об'єднанням усіх своїх скінченновимірних поліедральних крайніх підмножин. У цьому підрозділі нам знову знадобиться поняття квазі-співнаправленості, яке розглядалося у підрозділі 2.1, а також деяка інша термінологія.

- *Крайньою підмножиною* множини $B \subset X$ називається підмножина $C \subset B$, що має таку властивість

$$\forall_{y_1, y_2 \in B}\, \forall_{\alpha \in (0,1)}\, (\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \in C) \Longrightarrow (y_1, y_2 \in C).$$

- Для підмножини C визначимо її *різницеву множину* $C - C$ як суму Мінковського множин C і $-C$:

$$C - C = \{x - y \colon x, y \in C\}.$$

- *Породжуючий підпростір* опуклої множини C – це підпростір $\mathrm{Lin}(C - C)$.

- *Вимірністю опуклої множини* C будемо вважати вимірність її породжуючого підпростору.

- Для опуклої множини $B \subset X$ будемо називати точку $x \in B$ *n-крайньою*, якщо для будь-якого $(n+1)$-вимірного підпростору $E \subset X$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує елемент $e \in S_E$, такий що $x + \varepsilon e \notin B$.

- Для $n \in \mathbb{N}$ точку x опуклої множини B будемо називати *строго n-крайньою у B*, якщо вона n-крайня і не є $(n-1)$-крайньою.

Зауважимо, що в означенні ми не вимагаємо опуклості крайньої множини. Завдяки цьому ми отримуємо таку очевидну властивість: об'єднання будь-якого набору крайніх підмножин кулі B є її крайньою підмножиною. Тим не менш, зазвичай ми будемо мати справу з опуклими крайніми підмножинами. Зазначимо також, що означення 0-крайньої точки еквівалентне означенню крайньої точки одиничної кулі B у звичайному сенсі. Кожна n-крайня точка у B є також і $(n+1)$-крайньою точкою у B. Кожна n-вимірна опукла крайня підмножина C опуклої множини B складається з n-крайніх точок B і містить строго n-крайні точки. Якщо E – породжуючий підпростір n-вимірної опуклої крайньої підмножини $C \subset B$, тоді $x \in C$ є строго n-крайньою точкою множини B тоді і тільки тоді, якщо x належить до відносної внутрішності множини C в афінному підпросторі $x + E = C + E$. Для опуклої множини $C \subset X$ з породжуючим підпростором E через ∂C ми позначаємо відповідну межу C у $C + E$.

Нехай Y – банахів простір, $y_1, y_2 \in S_Y$ є квазі-співнаправленими. Позначимо

$$\begin{aligned} D_1(y_1, y_2) &:= (y_1 + B_Y) \cap (-y_2 + B_Y) \\ &= \{y \in Y \colon \|y_1 - y\| \leqslant 1 \quad \|y_2 + y\| \leqslant 1\} \\ &= \big\{y \in Y \colon \|y_1 - y\| = \|y_2 + y\| = 1\big\}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що $D_1(y_1, y_2)$ пов'язане з позначенням $D_1(y_1)$, яке ми використовували на початку підрозділу 2.1, а саме:

$$D_1(y_1) = D_1(y_1, y_1).$$

Перелічимо деякі очевидні властивості $D_1(y_1, y_2)$ без доведення.

Лема 2.30. *Нехай Y – банахів простір, $y_1, y_2 \in S_Y$ є квазі-співнаправленими. Тоді*

- $D_1(y_1, y_2)$ *– опукла замкнена підмножина у Y.*
- $0 \in D_1(y_1, y_2)$.

- $tD_1(y_1, y_2) \subset D_1(y_1, y_2)$ *для всіх* $t \in [0, 1]$.
- $D_1(y_1, y_2) \subset 2B_Y$, *отже*
- $\dfrac{1}{2}D_1(y_1, y_2) \subset D_1(y_1, y_2) \cap B_Y$.

Лема 2.31. *Нехай* Y *– банахів простір,* $y_1, y_2 \in S_Y$ *є квазі-співнаправленими і* $h \in Y$ *такий, що* $y_1 \pm h \in S_Y$. *Тоді*

$$\left\{\frac{1}{2}(y_1 - y_2) \pm \frac{1}{2}h\right\} \subset D_1(y_1, y_2). \tag{2.16}$$

Зокрема, якщо підставити $y_2 = y_1$, *отримаємо*

$$\pm\frac{1}{2}h \in D_1(y_1, y_1).$$

Якщо підставити $h = 0$, *ми отримаємо*

$$\frac{1}{2}(y_1 - y_2) \in D_1(y_1, y_2),$$

звідки випливає, що для всіх $t \in [0, 1/2]$

$$t(y_1 - y_2) \in D_1(y_1, y_2). \tag{2.17}$$

Доведення. Ми маємо перевірити наступні дві нерівності:

$$\left\|\frac{1}{2}(y_1 - y_2) \pm \frac{1}{2}h + y_2\right\| \leqslant 1$$

$$\left\|\frac{1}{2}(y_1 - y_2) \pm \frac{1}{2}h - y_1\right\| \leqslant 1.$$

Кожна з них зводиться до однієї й тієї самої нерівності

$$\left\|\frac{1}{2}(y_1 + y_2) \pm \frac{1}{2}h\right\| \leqslant 1.$$

Давайте це покажемо:

$$\|(y_1 + y_2) \pm h\| = \|y_2 + (y_1 \pm h)\| \leqslant \|y_2\| + \|y_1 \pm h\| = 2$$

. □

Лема 2.32. *Нехай* Y *– банахів простір,* $C \subset S_Y$ *– опукла крайня підмножина,* E *– породжуючий підпростір множини* C. *Тоді* $D_1(y_1, y_2) \subset E$ *для будь-яких* $y_1, y_2 \in C$.

Доведення. Нехай $y \in D_1(y_1, y_2)$. Тоді, $y_1 - y, y_2 + y \in B_Y$ і

$$\frac{1}{2}\big((y_1 - y) + (y_2 + y)\big) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \in C.$$

Таким чином, за означенням крайньої підмножини отримуємо, що $y_2 + y \in C$, а отже,

$$y = (y_2 + y) - y_2 \in C - C \subset E.$$

□

Лема 2.33. *Нехай X, Y – банахові простори, $F : B_X \to B_Y$ – BnE-відображення, $y_1, y_2 \in S_Y$ є квазі-співнаправленими, $x_1 = F^{-1}(y_1) \in S_X$, $x_2 = -F^{-1}(-y_2) \in S_X$. Тоді*

$$F\left(D_1(x_1, x_2) \cap B_X\right) \subset D_1(y_1, y_2) \cap B_Y.$$

Зокрема,

$$F\left(\frac{1}{2} D_1(x_1, x_2)\right) \subset D_1(y_1, y_2) \cap B_Y.$$

Доведення. Відповідно до пункту (1) леми 2.13, x_1 і x_2 є квазі-співнаправленими, отже множина $D_1(x_1, x_2)$ означена коректно. Розглянемо довільний елемент $x \in D_1(x_1, x_2) \cap B_X$. Ми маємо

$$\|x_1 - x\| \leqslant 1 \text{ і } \|(-x_2) - x\| = \|x_2 + x\| \leqslant 1,$$

отже,

$$\|F(x_1) - F(x)\| \leqslant 1 \text{ і } \|F(-x_2) - F(x)\| \leqslant 1.$$

Інакше кажучи,

$$\|y_1 - F(x)\| \leqslant 1 \text{ і } \|(-y_2) - F(x)\| = \|y_2 + F(x)\| \leqslant 1,$$

що означає $F(x) \in D_1(y_1, y_2)$. □

Лема 2.34. *Нехай X, Y – банахові простори, $F : B_X \to B_Y$ – BnE-відображення, $n \in \mathbb{N}$, $C \subset S_Y$ – n-вимірна опукла крайня підмножина. Тоді для будь-якого $y_1 \in C$ його прообраз $x_1 = F^{-1}(y_1) \in S_X$ є n-крайньою точкою у B_X.*

Доведення. Позначимо $x_2 = -F^{-1}(-y_1) \in S_X$. Припустимо, що x_1 не є n-крайньою точкою у B_X. Тоді, за означенням, існує $(n+1)$-вимірний підпростір $E \subset X$ і $\varepsilon > 0$, такі що $x_1 + \varepsilon B_E \subset S_X$. Згідно з лемою 2.31

$$\frac{1}{2}(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}\varepsilon B_E \subset D_1(x_1, x_2).$$

З вищезазначеного включення випливає, що множина $\frac{1}{2}D_1(x_1, x_2)$ містить $(n+1)$-вимірну кулю. Тоді з леми 2.33 отримуємо, що множина $D_1(y_1, y_1)$ містить гомеоморфну копію $(n+1)$-вимірної кулі, що неможливо через лему 2.32. □

Зазначимо, що в умовах попередньої леми x_1 може бути також m-крайньою точкою для деякого $m < n$.

Тепер ми переходимо до центрального за значенням результату. На жаль, нам не вдалося розбити його доведення на менші змістовні блоки, отже доведення буде відносно громіздким і займатиме 5 сторінок.

Теорема 2.35. *Нехай X, Y – банахові простори, $F : B_X \to B_Y$ – BnE-відображення, тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ прообраз будь-якої n-вимірної опуклої поліедральної крайньої підмножини $C \subset S_Y$ є n-вимірною опуклою поліедральною крайньою підмножиною сфери S_X. Більше того, має місце рівність*

$$-F^{-1}(-C) = F^{-1}(C).$$

Доведення. Скористаємося індукцію за n. База індукції $n = 0$ (тобто випадок крайньої точки) вичерпується пунктами (4) і (5) теореми 2.5. Припустимо, що твердження теореми виконане для крайніх підмножин, що мають вимірність меншу, ніж n, і доведемо його для n-вимірних поліедральних крайніх підмножин $C \subset S_Y$. Позначимо через E породжуючий підпростір множини C, $\dim E = n$. Межа ∂C багатогранника C складається зі скінченного об'єднання власних опуклих $(n-1)$-вимірних поліедральних крайніх підмножин, отже, за індуктивним припущенням,

$$A := F^{-1}(\partial C)$$

також складається зі скінченного об'єднання деяких опуклих (n–1)-вимірних поліедральних крайніх підмножин сфери S_X. Таким чином, A є крайньою підмножиною B_X. Також A є компактом, і $F|_A$ здійснює гомеоморфізм між A і $F(A) = \partial C$. Нехай $y_1 \in C \setminus \partial C$ – довільна точка. Позначимо $x_1 = F^{-1}(y_1)$. Оскільки y_1 є квазі-співнаправленим з будь-яким $y_2 \in \partial C$, x_1 є квазі-співнаправленим з відповідним $x_2 = -F^{-1}(-y_2) \in S_X$. Завдяки включенню (2.17) і лемам 2.33 та 2.32

$$F\left(t(x_1 - x_2)\right) \in F\left(\frac{1}{2}D_1(x_1, x_2)\right) \subset D_1(y_1, y_2) \subset E$$

для всіх $t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$. За індуктивним припущенням, коли y_2 пробігає ∂C відповідний x_2 пробігає всю множину A. Таким чином, позначивши

$$\widetilde{A} = \left[0, \frac{1}{4}\right](x_1 - A) = \left\{t(x_1 - x_2) \colon t \in \left[0, \frac{1}{4}\right], x_2 \in A\right\},$$

ми отримуємо

$$F\big(\widetilde{A}\big) \subset E. \tag{2.18}$$

Давайте покажемо, що відрізки $\left(0, \frac{1}{4}\right](x_1 - x_2)$ з різними $x_2 \in A$ попарно не перетинаються. Будемо міркувати від супротивного. Нехай два відрізки вигляду

$$\left(0, \frac{1}{4}\right](x_1 - \widehat{x}_2) \text{ і } \left(0, \frac{1}{4}\right](x_1 - \widetilde{x}_2)$$

з $\widehat{x}_2, \widetilde{x}_2 \in A$, $\widehat{x}_2 \neq \widetilde{x}_2$ перетинаються у деякій точці y. Тоді відповідні замкнені відрізки

$$\left[0, \frac{1}{4}\right](x_1 - \widehat{x}_2), \left[0, \frac{1}{4}\right](x_1 - \widetilde{x}_2)$$

перетинаються у двох точках (0 і y), отже, або вони співпадають, або один з них міститься в іншому. Тобто $(x_1 - \widehat{x}_2)$ і $(x_1 - \widetilde{x}_2)$ є співнаправленими. Розглянемо два можливі випадки:

$$(x_1 - \widehat{x}_2) = \lambda(x_1 - \widetilde{x}_2)$$

або

$$(x_1 - \widetilde{x}_2) = \lambda(x_1 - \widehat{x}_2)$$

для деякого $0 < \lambda < 1$. Обговоримо лише перший випадок, оскільки другий є аналогічним. Маємо

$$\widehat{x}_2 = \lambda\widetilde{x}_2 + (1-\lambda)x_1,$$

отже ці три точки розташовані на одному і тому ж відрізку і $\widehat{x}_2$ лежить між x_1 і $\widetilde{x}_2$. Оскільки A є крайньою множиною, отримуємо $x_1 \in A$, що суперечить факту, що $y_1 \notin \partial C$.

Множина $(x_1 - A)$ гомеоморфна одиничній сфері $\mathbb{R}^n$. Покажемо, що $\widetilde{A}$ гомеоморфна одиничній кулі $\mathbb{R}^n$, причому 0 відображається у 0. S^n і B^n позначатимуть одиничну сферу і одиничну кулю $\mathbb{R}^n$ відповідно, і $h\colon S^n \to (x_1 - A)$ – гомеоморфізм. Можна ввести відображення $H\colon B^n \to \widetilde{A}$ таким чином:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x = 0 \\ \dfrac{1}{4}\|x\| h\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right), & \text{коли } x \in B^n \backslash \{0\}. \end{cases}$$

Легко бачити, що це відображення бієктивне і неперервне у точці 0. Покажемо, що H неперервне в усіх точках. Розглянемо деяку послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ у B^n, що збігається до $x \in B^n \setminus \{0\}$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} H(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\|x_n\| h\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\|x_n\| \lim_{n\to\infty} h\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) \\ &= \frac{1}{4}\|x\| h\left(\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) = \frac{1}{4}\|x\| h\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = H(x). \end{aligned}$$

Таким чином, H – це бієктивне неперервне відображення з компакта B^n на гаусдорфів простір, отже H – гомеоморфізм.

Як наслідок, $F\big(\widetilde{A}\big) \subset E$ гомеоморфна одиничній кулі $\mathbb{R}^n$, причому 0 – відносна (у E) внутрішня точка множини $F\big(\widetilde{A}\big)$.

Розглянемо тепер довільну точку $\widetilde{y}_2 \in C \setminus \partial C$, $\widetilde{y}_2 \neq y_1$, таку що відповідний $\widetilde{x}_2 = -F^{-1}\big(-\widetilde{y}_2\big)$ не дорівнює x_1. З тієї ж причини, відрізок

$$F\left(\left[0, \frac{1}{4}\right](x_1 - \widetilde{x}_2)\right) \subset D_1(y_1, \widetilde{y}_2) \subset E.$$

Множина $F\left(\left[0,\dfrac{1}{4}\right](x_1-\widetilde{x}_2)\right)$ є неперервною кривою у E, що з'єднує $F(\dfrac{1}{4}(x_1-\widetilde{x}_2))$ з 0, який є внутрішньою точкою $F\big(\widetilde{A}\big)$. Отже, існує $t_0 \in \left(0,\dfrac{1}{4}\right]$, таке що $F\big(t_0(x_1-\widetilde{x}_2)\big) \in F\big(\widetilde{A}\big)$, тобто $t_0(x_1-\widetilde{x}_2) \in \widetilde{A}$. Це означає, що для деякого $t_1 \in \left(0,\dfrac{1}{4}\right]$ і деякого $x_2 \in A$ ми маємо

$$t_0(x_1-\widetilde{x}_2) = t_1(x_1-x_2).$$

Інакше кажучи, існує $\alpha > 0$, таке що

$$x_1-\widetilde{x}_2 = \alpha(x_1-x_2). \tag{2.19}$$

Покажемо, що $\alpha < 1$. Насправді, якщо $\alpha \geqslant 1$, вищезгадана формула давала б наступне представлення

$$x_2 = \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)x_1 + \frac{1}{\alpha}\widetilde{x}_2$$

елемента $x_2 \in A$ як опуклої комбінації $x_1, \widetilde{x}_2 \in S_X \setminus A$, що суперечить умові, що A є крайньою у S_X.

Оскільки $\alpha < 1$, формула (2.19) дає представлення

$$\widetilde{x}_2 = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$$

елемента $\widetilde{x}_2$ як опуклої комбінації x_1 і деякого $x_2 \in A$.

Якщо розглядати BnE-відображення $G : B_X \to B_Y$, означене як

$$G(x) = -F(-x),$$

усю попередню аргументацію можна застосувати і для G, тому що за індуктивним припущенням

$$G^{-1}(\partial C) = F^{-1}(\partial C) = A.$$

Оскільки

$$\widetilde{x}_2 = G^{-1}\big(\widetilde{y}_2\big) \text{ і } x_1 = -G^{-1}(-y_1),$$

ролі цих елементів для G міняються місцями, і ми отримуємо, що x_1 також є опуклою комбінацією $\widetilde{x}_2$ і деякого $x_3 \in A$. Таким чином, ми отримали наступні властивості множин $F^{-1}(C \setminus \partial C)$ і $G^{-1}(C \setminus \partial C)$:

Властивості.

(i) Для будь-якого $u \in F^{-1}(C \setminus \partial C)$

$$G^{-1}(C \setminus \partial C) \subset \{tx + (1-t)u \colon t \in [0,1]\,, x \in A\}\,.$$

(ii) Для будь-якого $v \in G^{-1}(C \setminus \partial C)$

$$F^{-1}(C \setminus \partial C) \subset \{tx + (1-t)v \colon t \in [0,1]\,, x \in A\}\,.$$

(iii) Для будь-якого $u \in F^{-1}(C \setminus \partial C)$ і будь-якого $v \in G^{-1}(C \setminus \partial C)$, $u \neq v$ знайдуться (єдині) елементи $w, z \in A$, такі що $[u, v] \subset [w, z]$.

З властивостей (i) та (ii) випливає, що $F^{-1}(C)$ і $G^{-1}(C)$ містяться у деякому скінченновимірному підпросторі простору X. Оскільки обидві ці множини є обмеженими і замкненими, вони є компактами. Неперервні відображення F і G відображають відповідні компакти $F^{-1}(C)$ і $G^{-1}(C)$ у C бієктивно, отже, $F^{-1}(C)$ і $G^{-1}(C)$ є гомеоморфними C, тобто гомеоморфними одиничній кулі $\mathbb{R}^n$. Оскільки множина $\{tx + (1-t)u \colon t \in [0,1]\,, x \in A\}$ при фіксованому u також гомеоморфна одиничній кулі $\mathbb{R}^n$ і A відповідає одиничній сфері і належить до $\{tx + (1-t)u \colon t \in [0,1]\,, x \in A\}$ і $G^{-1}(C)$, включення (i) разом з твердженням 2.22 дають

(i)' для будь-якого $u \in F^{-1}(C \setminus \partial C)$

$$G^{-1}(C) = \{tx + (1-t)u \colon t \in [0,1]\,, x \in A\}\,,$$

і з тих самих причин

(ii)' для будь-якого $v \in G^{-1}(C \setminus \partial C)$

$$F^{-1}(C) = \{tx + (1-t)v \colon t \in [0,1]\,, x \in A\}\,.$$

Зокрема, з (i)' випливає, що будь-яке $u \in F^{-1}(C \setminus \partial C)$ належить до $G^{-1}(C)$, отже $F^{-1}(C) \subset G^{-1}(C)$, і з (ii)' випливає обернене включення $G^{-1}(C) \subset F^{-1}(C)$. Таким чином,

$$G^{-1}(C) = F^{-1}(C).$$

Повертаючись до включення (2.17) і лем 2.33 і 2.32, ми отримуємо, що для всіх $x_1, x_2 \in F^{-1}(C)$

$$F\left(\frac{1}{4}(x_1 - x_2)\right) \in E,$$

інакше кажучи,

$$F\left(\frac{1}{4}(F^{-1}(C) - F^{-1}(C))\right) \subset E. \tag{2.20}$$

Нагадаємо, що за індуктивним припущенням, $A = F^{-1}(\partial C)$ складається зі скінченного об'єднання деяких опуклих $(n-1)$-вимірних поліедральних крайніх підмножин $\widetilde{W_i}$, $i = 1, \ldots, N$, які є прообразами відповідних частин ∂C. Зафіксуємо деяке $v \in F^{-1}(C \setminus \partial C)$. Позначимо

$$W_i = \left\{tx + (1-t)v \colon t \in [0,1]\,, x \in \widetilde{W_i}\right\}.$$

Ці W_i є n-вимірними багатогранниками, і відповідно до (ii)',

$$F^{-1}(C) = \bigcup_{i=1}^{N} W_i.$$

Ми стверджуємо, що всі багатогранники W_i (а також їхнє об'єднання $F^{-1}(C)$) знаходяться в одному і тому самому n-вимірному афінному підпросторі $\widetilde{E}$.

Щоб це довести, ми розглянемо породжуючі підпростори

$$Z_i = \mathrm{Lin}(W_i - W_i)$$

множин W_i і покажемо, що всі Z_i дорівнюють один одному, тобто усі вони дорівнюють деякому n-вимірному лінійному підпростору Z. Тоді

$$\widetilde{E} = v + Z$$

буде n-вимірним афінним підпростором, який ми шукаємо.

Знову будемо міркувати від супротивного. Припустимо, що $Z_i \neq Z_j$ для деякого $i \neq j$. Тоді вимірність $Z_i + Z_j$ строго більше за n, і

$$\dim(W_i - W_j) = \dim(\mathrm{Lin}((W_i - W_j) - (W_i - W_j))) = \dim(Z_i + Z_j) > n.$$

Приймаючи до уваги, що

$$W_i - W_j \subset (F^{-1}(C) - F^{-1}(C)),$$

вимірність $F^{-1}(C) - F^{-1}(C)$ строго більше за n, що робить включення (2.20) неможливим.

Залишилося показати, що $F^{-1}(C)$ є опуклою крайньою підмножиною. Для доведення опуклості покажемо, що

$$F^{-1}(C) = B_X \cap \widetilde{E}.$$

Ми вже знаємо, що

$$F^{-1}(C) \subset B_X \cap \widetilde{E}.$$

Покажемо, що має місце обернене включення. Знову міркуємо від супротивного. Припустимо, що існує точка $z \in (B_X \cap \widetilde{E}) \setminus F^{-1}(C)$. Зафіксуємо деяке $v \in F^{-1}(C \setminus \partial C)$ і розглянемо відрізок $[z, v]$. Як ми зазначали раніше, $F^{-1}(C)$ гомеоморфна C і, як наслідок, B^n, тобто v лежить у відповідній внутрішності $F^{-1}(C)$ у $\widetilde{E}$. Таким чином, відрізок $[z, v]$ має перетинати $A = F^{-1}(\partial C)$ у деякій точці. Інакше кажучи, знайдеться $\lambda \in (0, 1)$, таке що $\lambda z + (1 - \lambda)v \in A$, що суперечить тому, що A є крайньою підмножиною у B_X. □

Теорема 2.36. *Нехай X, Y – банахові простори, $F : B_X \to B_Y$ – BnE-відображення, тоді для будь-якої n-вимірної опуклої поліедральної крайньої підмножини $C \subset S_Y$ справедлива наступна рівність:* $F(\operatorname{conv}(0, F^{-1}(C))) = \operatorname{conv}(0, C)$.

Доведення. Проведемо доведення індукцією за n. Для $n = 0$ (тобто коли C – крайня точка) потрібну рівність можна отримати з пунктів (4) і (5) теореми 2.5. Припустимо, що наша теорема доведена для всіх крайніх підмножин вимірності менше за n, і доведемо те саме для довільної n-вимірної поліедральної крайньої підмножини $C \subset S_Y$. Розглянемо $x \in F^{-1}(C \setminus \partial C)$ і $\alpha \in (0, 1)$. Оскільки F нерозтягувальне, маємо

$$\|F(\alpha x)\| \leqslant \|\alpha x\|, \text{ і } \|F(x) - F(\alpha x)\| \leqslant \|x - \alpha x\|. \tag{2.21}$$

Також

$$1 = \|F(x)\| \leqslant \|F(\alpha x)\| + \|F(x) - F(\alpha x)\|$$
$$\leqslant \|\alpha x\| + \|x - \alpha x\| = 1. \tag{2.22}$$

Тому

$$\|F(\alpha x)\| + \|F(x) - F(\alpha x)\| = 1.$$

Таким чином, можна записати $F(x)$ як опуклу комбінацію

$$F(x) = \|F(\alpha x)\| \frac{F(\alpha x)}{\|F(\alpha x)\|} + \|F(x) - F(\alpha x)\| \frac{F(x) - F(\alpha x)}{\|F(x) - F(\alpha x)\|}.$$

Оскільки $F(x) \in C$ і C є крайньою підмножиною одиничної кулі B_X, отримуємо

$$\frac{F(\alpha x)}{\|F(\alpha x)\|} \in C \text{ і } \frac{F(x) - F(\alpha x)}{\|F(x) - F(\alpha x)\|} \in C.$$

Отже,

$$F(\alpha x) = \|F(\alpha x)\| \frac{F(\alpha x)}{\|F(\alpha x)\|} \in \mathrm{conv}(\frac{F(\alpha x)}{\|F(\alpha x)\|}, 0) \subset \mathrm{conv}(0, C)$$

і, як наслідок,

$$F(\mathrm{conv}(0, F^{-1}(C))) \subset \mathrm{conv}(0, C).$$

За індуктивним припущенням

$$F(\mathrm{conv}(0, F^{-1}(\partial C))) = \mathrm{conv}(0, \partial C),$$

тобто

$$\partial \mathrm{conv}(0, C) \subset F(\mathrm{conv}(0, F^{-1}(C))).$$

Крім того, $\mathrm{conv}(0, F^{-1}(C))$ гомеоморфна кулі B^{n+1} і $\partial\mathrm{conv}(0, C)$ гомеоморфна сфері S^{n+1}. Таким чином, застосування твердження 2.22 завершує доведення. □

Лема 2.37. *Нехай X, Y – банахові простори, $F : B_X \to B_Y$ – BnE-відображення, тоді $\|F(\alpha x)\| = \|\alpha x\| = \alpha$ для всіх $x \in F^{-1}(S_Y)$, $\alpha \in [0, 1]$.*

Доведення. Оскільки F нерозтягувальне, можемо застосувати нерівності (2.21) і (2.22). З нерівності (2.22) випливає

$$\|F(\alpha x)\| + \|F(x) - F(\alpha x)\| = \|\alpha x\| + \|x - \alpha x\|,$$

і застосування (2.21) завершує доведення. $\square$

Теорема 2.38. *Нехай X, Y – банахові простори, $F : B_X \to B_Y$ – BnE-відображення і S_Y є об'єднанням усіх своїх скінченновимірних поліедральних крайніх підмножин. Тоді F – ізометрія.*

Доведення. Покажемо спершу, що $F(S_X) = S_Y$. Оскільки

$$S_Y = \bigcup_{i \in I} C_i, \tag{2.23}$$

де C_i – це скінченновимірні поліедральні крайні підмножини у S_Y і I – деяка індексна множина, можна зробити висновок, що

$$B_Y = \bigcup_{i \in I} \operatorname{conv}(0, C_i).$$

З бієктивності F і теореми 2.36 випливає

$$B_X = \bigcup_{i \in I} \operatorname{conv}(0, F^{-1}(C_i)).$$

Таким чином, у B_X немає інших точок з одиничною нормою, окрім точок з $F^{-1}(C_i)$, і ми отримуємо

$$S_X = \bigcup_{i \in I} F^{-1}(C_i) = F^{-1}(S_Y).$$

Щоб довести, що F є ізометрією, застосуємо леми 2.27 і 2.7. Покажемо для множини V з леми 2.7, що

$$F^{-1}(C) \subset V \tag{2.24}$$

для будь-якої n-вимірної поліедральної крайньої підмножини C у S_Y. Для цього скористаємося індукцією за вимірністю. Для 0-вимірних множин, тобто крайніх точок, твердження випливає з пунктів (4) і (5) теореми 2.5. Тепер припустимо, що включення доведене для всіх $(n-1)$-вимірних поліедральних крайніх підмножин і доведемо його для вимірності n. Розглянемо деяку n-вимірну крайню підмножину C у S_Y. Для будь-якої пари $x, y \in F^{-1}(C)$, $x \neq y$, продовжимо відрізок $[x, y]$ в обидва боки до перетину з відносною межею $F^{-1}(\partial C)$ багатогранника $F^{-1}(C)$. Позначимо

u, v відповідні точки перетину. Тоді

$$x = \lambda u + (1 - \lambda)v,$$

$$y = \mu u + (1 - \mu)v,$$

де $\lambda, \mu \in [0, 1]$, $\lambda \neq \mu$. Будемо вважати, що $\lambda > \mu$. Оскільки ∂C складається з $(n-1)$-вимірних поліедральних крайніх підмножин, індуктивне припущення і лема 2.7 дозволяють стверджувати, що

$$\|u - v\| = \|F(u) - F(v)\|.$$

Оскільки F нерозтягувальне,

$$\begin{aligned} \|u - v\| = \|F(u) - F(v)\| &\leqslant \|F(u) - F(x)\| + \|F(x) - F(y)\| \\ &+ \|F(y) - F(v)\| \leqslant \|u - x\| + \|x - y\| + \|y - v\| \\ &= (1 - \lambda)\|u - v\| + (\lambda - \mu)\|u - v\| + \mu\|u - v\| = \|u - v\|. \end{aligned}$$

Таким чином, ми отримуємо

$$\|F(u) - F(x)\| = \|u - x\|,$$

$$\|F(y) - F(v)\| = \|y - v\|,$$

$$\|F(x) - F(y)\| = \|x - y\|.$$

Отже, F – бієктивна ізометрія між $F^{-1}(C)$ і C, і з твердження 2.21 випливає, що F афінне на $F^{-1}(C)$. лема 2.37 разом з теоремою 2.36 дають рівність

$$F(\alpha F^{-1}(C)) = \alpha C$$

для $\alpha \in [0, 1]$, і застосування другої частини теореми 2.35 продовжує цей результат для $\alpha \in [-1, 1]$. Так само як і раніше, з індуктивного припущення і леми 2.7 витікає, що F – бієктивна ізометрія між $\alpha F^{-1}(C)$ і αC, отже F афінне на $\alpha F^{-1}(C)$. Покажемо, що

$$F(\alpha x) = \alpha F(x)$$

для всіх $x \in F^{-1}(C)$, $\alpha \in [-1, 1]$. Кожен $x \in F^{-1}(C)$ має вигляд

$$x = \lambda u + (1 - \lambda)v,$$

де $u, v \in F^{-1}(\partial C)$ і $\lambda \in [0,1]$. Отримуємо

$$F(\alpha x) = F(\lambda\alpha u + (1-\lambda)\alpha v) = \lambda F(\alpha u) + (1-\lambda)F(\alpha v),$$

оскільки F афінне на $\alpha F^{-1}(C)$. За індуктивною гіпотезою

$$F(\alpha u) = \alpha F(u),$$

$$F(\alpha v) = \alpha F(v),$$

отже

$$F(\alpha x) = \lambda\alpha F(u) + (1-\lambda)\alpha F(v) = \alpha(\lambda F(u) + (1-\lambda)F(v)).$$

Залишилося скористатися тим фактом, що F афінне на $F^{-1}(C)$ і зробити висновок, що

$$F(\alpha x) = \alpha F(\lambda u + (1-\lambda)v) = \alpha F(x).$$

Таким чином, бажане включення (2.24) доведене. Нарешті, з (2.23) і вищесказаного випливає, що для кожного $v \in F^{-1}(S_Y)$ і кожного $t \in [-1,1]$ маємо $F(tv) = tF(v)$. Отже, застосування леми 2.27 завершує доведення теореми. $\square$

Висновки до розділу 2

У цьому розділі ми дали ствердну відповідь на питання 2.2 для просторів, де відповідь «так» на питання 2.1 вже була отримана (скінченновимірні та строго опуклі банахові простори), а також для деяких конкретних банахових просторів, де відповідь на питання 2.1 була невідомою (ℓ_1, ℓ_1-сума строго опуклих банахових просторів та простір, одинична сфера якого є об'єднанням усіх своїх скінченновимірних поліедральних крайніх множин). Тим самим для другої групи просторів ми дали ствердну відповідь на питання 2.1, тобто довели їхню пластичність. Перелічимо основні результати розділу.

– Теорема 2.5, яка узагальнює теорему 2.3 з [6] на випадок двох різних банахових просторів.

– Теорема 2.9, де отримано відповідь на питання 2.2 для довільного простору X і строго опуклого простору Y.

– Теорема 2.10, де отримано відповідь на питання 2.2 для довільного простору Y і строго опуклого простору X.

– Теорема 2.20, де відповідь на питання 2.2 отримана для двох різних скінченновимірних просторів.

– Теорема 2.23, яка дає ствердну відповідь на питання 2.2 для довільного банахового простору X та простору ℓ_1. Зокрема, з цієї теореми випливає пластичність одиничної кулі простору ℓ_1, що також є новим результатом, який хронологічно був отриманий нами раніше [16].

– Теорема 2.28, яка дає відповідь на питання 2.2 для довільного простору X і простору Z, який є ℓ_1-сумою набору строго опуклих просторів. Як висновок, одинична куля простору Z також є пластичною.

– Теорема 2.35. З теореми 2.5 відомо, що прообраз крайньої точки під дією BnE-відображення також є крайньою точкою. Також було відомо, що знак мінус у випадку крайньої точки і BnE-відображення можна виносити за знак функції. Ми довели подібне твердження для скінченновимірних поліедральних крайніх множин.

– Теорема 2.38, де ствердна відповідь на питання 2.2 отримана для довільного простору X і простору Y, одинична сфера якого є об'єднанням усіх своїх скінченновимірних поліедральних крайніх підмножин.

Зауважимо, що питання 2.1 та 2.2 залишаються відкритими у загальному випадку. Результати розділу викладені у публікаціях [16], [33], [15], [1].

РОЗДІЛ 3

ПЛАСТИЧНІСТЬ ЕЛІПСОЇДІВ

3.1 Постановка задачі

Підмножина банахового простору називається *обмеженою*, якщо вона міститься у кулі скінченного радіуса, підмножина називається *тілесною*, якщо вона містить кулю ненульового радіуса. Під еліпсоїдом у гільбертовому просторі ми будемо розуміти множину, що має вигляд

$$\left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n : \sum_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{x_n}{a_n} \right|^2 \leqslant 1 \right\},$$

де e_n – елементи ортонормованого базису і $a_n > 0$. У скінченновимірних просторах з пластичністю еліпсоїдів, як і з пластичністю куль, питання вирішене завдяки компактності. Для тілесних обмежених підмножин нормованого простору ситуація з пластичністю доволі складна. Незважаючи на певну кількість прикладів пластичності куль, які ми зустрічали у попередніх розділах, питання 2.1 і 2.2 є відкритими у загальному випадку. Якщо ж розглядати гільбертові простори, з одного боку у статті [6] доведена пластичність одиничних куль строго опуклих банаховий просторів, і як наслідок, гільбертових просторів. З іншого боку, у цій самій статті був наведений приклад непластичного еліпсоїда у гільбертовому просторі (Приклад 1.20). Зазначимо, що оператор T у цьому прикладі лінійний, отже у нескінченновимірних просторах навіть лінійне BnE-відображення не обов'язково є ізометрією. Саме це спостереженні вмотивувало нас ввести наступне означення:

Означення 3.1. Нехай M – підмножина нормованого простору X. Будемо казати, що M – *лінійно пластична або LEC-пластична* множина (англ. linearly expand-contract plastic), якщо будь-який лінійний оператор $T : X \to X$, чиє обмеження на M є BnE-відображенням з M на M, є ізометрією на M.

Метою цього розділу є пошук необхідних і достатніх умов лінійної пластичності тілесного обмеженого еліпсоїда у гільбертовому просторі.

Будемо використовувати позначення з [12]. Літерою H позначатимемо фіксований сепарабельний нескінченновимірний гільбертів простір (дійсний чи комплексний), символ $\langle x, y\rangle$ позначатиме скалярний добуток елементів $x, y \in H$. $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – фіксований ортонормований базис у H. Будь-який $x \in H$ допускає розклад

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n,$$

де x_n – відповідні коефіцієнти Фур'є. Як і раніше, позначення Lin ми будемо використовувати для позначення лінійної оболонки, а $\overline{\operatorname{Lin}}$ – для замкненої лінійної оболонки. Як зазначалося раніше, еліпсоїди, що розглядаються, є прямим узагальненням скінченновимірних. А саме, еліпсоїд у H – це множина вигляду

$$E = \left\{x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n \in H : \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{x_n}{a(n)}\right|^2 \leqslant 1\right\},$$

де додатні числа $a(n) > 0$ називаються *півосями* E. Також у подальшому ми будемо вважати, що відповідна функція $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ обмежена зверху і знизу, тобто

$$\inf_n a(n) > 0,$$
$$\sup_n a(n) < +\infty,$$

що забезпечує обмеженість еліпсоїда E і робить його тілесним. Позначимо через $A = a(\mathbb{N})$ множину півосей E. Зазначимо, що деякі півосі можуть мати однакову довжину. Для кожного $t \in A$ будемо називати *кратністю* кількість елементів у множині $a^{-1}(t)$ (яка може бути як скінченною так і нескінченною) і позначимо також

$$H_t = \operatorname{Lin}\{e_k\}_{k\in a^{-1}(t)}.$$

Для межі еліпсоїда E будемо використовувати позначення

$$S = \left\{x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n \in H : \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{x_n}{a(n)}\right|^2 = 1\right\}.$$

3.2 Лінійна пластичність еліпсоїдів у сепарабельному гільбертовому просторі

Ми почнемо з непластичних еліпсоїдів. Легко бачити, що Приклад 1.20 можна узагальнити.

Твердження 3.2. *Нехай множина A півосей еліпсоїда E містить підмножину B, яка має такі властивості:*

1. *B містить принаймні два елементи;*

2. *або у B немає мінімуму, або кратність мінімуму нескінченна;*

3. *або у B немає максимуму, або кратність максимуму нескінченна.*

Тоді E не є LEC-пластичним.

Доведення. Позначимо $r = \inf B$, $R = \sup B$; відповідно до пункту (1) $r < R$. З властивості (2) випливає існування різних $n_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots$, таких що $a(n_k) \in B$, $a(n_k) < \frac{1}{2}(r + R)$ і

$$a(n_1) \geqslant a(n_2) \geqslant a(n_3) \geqslant \ldots,$$

$$\lim_{k\to\infty} a(n_k) = r.$$

Аналогічно, з властивості (3) випливає існування різних $n_k \in \mathbb{N}$, $k = 0, -1, -2, \ldots$, таких що $a(n_k) \in B$ і

$$a(n_1) < a(n_0) \leqslant a(n_{-1}) \leqslant a(n_{-2}) \leqslant \ldots,$$

$$\lim_{k\to-\infty} a(n_k) = R.$$

Визначимо лінійний оператор T таким чином:

$$Te_n = e_n$$

для $n \in \mathbb{N} \setminus \{n_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, і

$$Te_{n_k} = \frac{a(n_{k+1})}{a(n_k)} e_{n_{k+1}}$$

для $k \in \mathbb{Z}$. Лінійний нерозтягуючий оператор T відображає E на себе бієктивно, проте не ізометрично. $\square$

Далі ми розглянемо LEC-пластичні еліпсоїди в H і доведемо, що заперечення умов твердження 3.2 є не лише необхідною, але й достатньою умовою LEC-пластичності. Спершу доведемо наступні леми.

Лема 3.3. *Нехай $T\colon H \to H$ – лінійний оператор, що відображає E на себе бієктивно. Тоді T відображає весь простір H на себе бієктивно і $T(S) = S$. Якщо, до того ж, T є нерозтягуючим на E, тоді $\|T\| \leqslant 1$.*

Доведення. Помітимо спочатку, що E – поглинаюча множина, отже

$$H = \cup_{t>0} tE.$$

Завдяки лінійності, оператор T ін'єктивний на кожній множині tE, таким чином, він ін'єктивний на всьому H. Також,

$$T(H) = \cup_{t>0} T(tE) = \cup_{t>0} tE = H,$$

звідки випливає сюр'єктивність на H. Нарешті,

$$S = E \setminus \cup_{t\in(0,1)} tE,$$

отже,

$$T(S) = T(E) \setminus \cup_{t\in(0,1)} T(tE) = E \setminus \cup_{t\in(0,1)} tE = S.$$

Якщо ж T є нерозтягуючим на E, тоді для кожного $x \in H$ знайдеться $t > 0$, таке що $tx \in E$, і ми отримуємо

$$\|T(tx)\| = \rho(T(0), T(tx)) \leqslant \rho(0, tx) = \|tx\|.$$

Залишилося тільки поділити на t і отримати нерівність $\|Tx\| \leqslant \|x\|$ для всіх $x \in H$. □

Лема 3.4. *Нехай множина A півосей еліпсоїда E містить мінімальний елемент r, і нехай r має скінченну кратність. Нехай $T\colon H \to H$ – лінійний оператор, що відображає E бієктивно на себе, і чиє обмеження на E нерозтягувальне. Тоді*

$$T(H_r) = H_r,$$

$$T(H_r \cap E) = H_r \cap E$$

і обмеження T на H_r є бієктивною ізометрією.

Доведення. Оскільки оператор T нерозтягуючий, усі елементи S мінімальної норми r можуть бути відображені лише в ті елементи S, чия норма дорівнює r. Інакше кажучи,

$$T(H_r) \subset H_r.$$

Для скінченновимірного лінійного простору H_r ін'єктивність лінійного відображення $T|_{H_r}\colon H_r \to H_r$ дає бієктивність, отже,

$$T(H_r) = H_r,$$

$$T\left(H_r \cap E\right) = H_r \cap E.$$

Зазначимо, що $H_r \cap E$ є замкненою кулею радіуса r з центром у 0 підпростору H_r. Завдяки лінійності отримуємо, що $T|_{H_r}$ бієктивно відображає одиничну кулю на одиничну кулю, таким чином, $T|_{H_r}$ є бієктивною ізометрією. □

Лема 3.5. *Нехай множина A півосей еліпсоїда E містить максимальний елемент R, і нехай R має скінченну кратність. Нехай $T\colon H \to H$ – лінійний оператор, що відображає E бієктивно на себе, і чиє обмеження на E нерозтягувальне. Тоді*

$$T(H_R) = H_R,$$

$$T\left(H_R \cap E\right) = H_R \cap E$$

і обмеження T на H_R є бієктивною ізометрією.

Доведення. Твердження аналогічне попередньому, тому доведення також буде схожим. Оскільки T нерозтягуючий, прообразами усіх елементів S максимальної норми R можуть бути лише ті елементи S, чия норма дорівнює R. Інакше кажучи,

$$T^{-1}(H_R) \subset H_R.$$

Для скінченновимірного лінійного простору H_R ін'єктивність лінійного відображення $T^{-1}|_{H_R}\colon H_R \to H_R$ дає бієктивність, отже,

$$T^{-1}(H_R) = H_R,$$

$$T(H_R) = H_R.$$

Закінчується доведення так само, як у попередній лемі. $\square$

Тепер можемо викласти обіцяну теорему, яка є основним результатом розділу.

Теорема 3.6. *Еліпсоїд E є LEC-пластичним тоді і тільки тоді, коли кожна підмножина B множини A півосей E, що складається більш ніж з одного елемента, має принаймні одну з наступних властивостей:*

1. *B має максимум скінченної кратності;*
2. *B має мінімум скінченної кратності.*

Доведення. Необхідність умов теореми вже продемонстрована у твердженні 3.2. Залишилося довести достатність. Зауважимо спочатку, що A не може містити більше, ніж один елемент нескінченної кратності. Справді, якщо $b_1, b_2 \in A$ – два різних елементи з нескінченною кратністю, тоді $B = \{b_1, b_2\} \subset A$ не задовольняє ані умову (1) ані умову (2) нашої теореми.

Твердження 1. *Знайдеться $\tau > 0$, таке що $A^+ = A \cap (\tau, +\infty)$ є цілком упорядкованою множиною з порядком $\geqslant$ (тобто кожна непорожня підмножина у A^+ має максимальний елемент), $A^- = A \cap (0, \tau)$ є цілком упорядкованою множиною з порядком $\leqslant$ (тобто кожна непорожня підмножина у A^- має мінімальний елемент), і ані A^+ ані A^- не містять елементів нескінченної кратності.*

Насправді, якщо існує елемент $a_\infty \in A$ з нескінченною кратністю, давайте оберемо $\tau = a_\infty$. Покажемо, що $(A^+, \geqslant)$ є цілком впорядкованою. Якщо $A^+ = \emptyset$ твердження очевидне. В іншому випадку для кожної непорожньої підмножини D у A^+ розглянемо $B = \{\tau\} \cup D$. Тоді мінімальний елемент у B – це τ, який має нескінченну кратність, отже множина B повинна мати максимум скінченної кратності. Цей максимум буде також максимальним елементом у D. Для множини $(A^-, \leqslant)$ цілком впорядкованість демонструється подібним чином.

Тепер розглянемо випадок, коли A містить лише елементи скінченної кратності. Розглянемо множину U всіх таких $t \in (0,+\infty)$, що $A \cap (t,+\infty)$ є непорожньою цілком впорядкованою множиною з порядком $\geqslant$. Якщо U непорожня, візьмемо $\tau = \inf U$, якщо $U = \emptyset$, візьмемо $\tau = \sup A$. Покажемо, що це τ саме таке, як нам потрібно. У першому випадку $A^+ = A \cap (\tau, +\infty)$, і для кожного $t > \tau$ ми отримуємо, що $A \cap (t,+\infty)$ – непорожня цілком впорядкована множина з порядком $\geqslant$. Звідси випливає, що $(A^+, \geqslant)$ цілком впорядкована. У другому випадку $A^+ = \emptyset$, тобто також цілком впорядкована. Таким чином, залишилося показати, що $A^- = A \cap (0,\tau)$ є цілком впорядкованою з порядком $\leqslant$. Припустимо супротивне. Тоді знайдеться непорожня підмножина $B \subset A^-$, у якій відсутній мінімальний елемент. Відповідно до умов нашої теореми B має максимальний елемент b. Оскільки $b < \tau$, і за означенням τ множина $A \cap (b,+\infty)$ не є цілком впорядкованою з порядком $\geqslant$. Як наслідок, знайдеться непорожня множина $D \subset A \cap (b,+\infty)$, у якій немає максимального елемента. Тоді, $B \cup D$ не задовольняє ані умову (1) ані умову (2) нашої теореми. Це протиріччя завершує доведення Твердження 1.

Введемо у розгляд наступні підпростори:

$$H^- = \overline{\mathrm{Lin}}\{e_k\}_{k \in a^{-1}(A^-)},$$
$$H_\tau = \overline{\mathrm{Lin}}\{e_k\}_{k \in a^{-1}(\tau)},$$
$$H^+ = \overline{\mathrm{Lin}}\{e_k\}_{k \in a^{-1}(A^+)}.$$

Очевидно, що ці замкнені лінійні підпростори в H є взаємно ортогональними і

$$H = H^- \oplus H_\tau \oplus H^+.$$

Зауважимо, що деякі з доданків у попередньому виразі можуть бути тривіальними. Нехай $T\colon H \to H$ – лінійний оператор, який відображає E на себе бієктивно, і чиє обмеження на E нерозтягувальне.

Твердження 2. *$T(H^-) = H^-$, $T(H^+) = H^+$, і обмеження T на H^- та H^+ є бієктивними ізометріями.*

Ми доведемо це твердження лише для H^+: аргументація для H^- буде відрізнятися лише застосуванням леми 3.4 замість леми 3.5.

Якщо $A^+ = \emptyset$, то доводити нічого. У випадку, коли $A^+ \neq \emptyset$, ми покажемо за допомогою трансфінітної індукції по $t \in (A^+, \geqslant)$ справедливість для всіх $t \in A^+$ наступного твердження $\mathfrak{U}(t)$: підпростір

$$H(t) := \overline{\mathrm{Lin}}\{e_k \colon a(k) \geqslant t\}$$

є T-інваріантним і T відображає $H(t)$ на $H(t)$ ізометрично. Оскільки набір підпросторів $H(t)$, $t \in A^+$, є ланцюгом, чиє об'єднання є щільним у H^+, з неперервності T випливатиме бажане Твердження 2.

Базою індукції є твердження $\mathfrak{U}(t)$ для $t = \max A$. Це є змістом леми 3.5. У якості індуктивного припущення вважатимемо, що $\mathfrak{U}(t)$ справджується для всіх $t > t_0 \in A^+$, і наша мета – довести твердження $\mathfrak{U}(t_0)$.

Для будь-яких x, y у H введемо модифікований скалярний добуток $\langle\langle x, y\rangle\rangle$ наступним чином:

$$\langle\langle x, y\rangle\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n \overline{y_n}}{a(n)^2}.$$

Тоді існує норма на H, породжена цим скалярним добутком

$$|||x||| = \left(\sum_{i\in I} \left|\frac{x_i}{a_i}\right|^2\right)^{1/2}.$$

Еліпсоїд E є одиничною кулею у цій новій нормі, і оскільки T лінійний і відображає E на E бієктивно, T – це бієктивна ізометрія $(H, |||\cdot|||)$ на себе.

Завдяки [12, Theorem 2, p. 353], T – унітарний оператор у просторі з модифікованим скалярним добутком і, таким чином, T зберігає цей модифікований скалярний добуток. Зокрема, він зберігає ортогональність у просторі з новим скалярним добутком.

Позначимо

$$X = \bigcup_{t>t_0} H(t) = \mathrm{Lin}\{e_k \colon a(k) > t_0\}.$$

Ортогональне доповнення до X у просторі з модифікованим скалярним добутком це

$$X^\perp = \overline{\mathrm{Lin}}\{e_k \colon a(k) \leqslant t_0\}.$$

Зазначимо, що ортогональне доповнення до X у просторі з початковим скалярним добутком таке ж саме. З індуктивного припущення випливає, що

$$T(X) = X,$$

отже,

$$T(X^{\perp}) = X^{\perp},$$

$$T(X^{\perp} \cap E) = X^{\perp} \cap E.$$

$X^{\perp}$ з вихідним скалярним добутком є гільбертовим простором, $X^{\perp} \cap E$ – еліпсоїд у $X^{\perp}$, t_0 – максимальна піввісь цього еліпсоїда і кратність t_0 скінченна, бо $t_0 \in A^{+}$. Застосовуючи лему 3.5 отримуємо, що

$$T(H_{t_0}) = H_{t_0}$$

і обмеження T на H_{t_0} – бієктивна ізометрія у просторі з вихідною нормою. Таким чином, T відображає X на X і H_{t_0} на H_{t_0} ізометрично і $H(t_0)$ є ортогональною прямою сумою підпросторів H_{t_0} і замикання X. Звідси випливає, що T відображає $H(t_0)$ на $H(t_0)$ ізометрично, отже індуктивний перехід здійснений. Доведення Твердження 2 завершене.

З Твердження 2 і взаємної ортогональності H^{-} і H^{+} випливає, що

$$T(H^{-} \oplus H^{+}) = H^{-} \oplus H^{+}$$

і T є ізометрією на $Z = H^{-} \oplus H^{+}$. Оскільки T зберігає модифікований скалярний добуток і оскільки ортогональне доповнення до Z у просторі з модифікованим скалярним добутком – це H_{τ}, ми отримуємо, що

$$T(H_{\tau}) = H_{\tau}$$

і, як наслідок,

$$T(H_{\tau} \cap E) = H_{\tau} \cap E.$$

Оскільки $H_{\tau} \cap E$ є замкненою кулею радіуса τ (у вихідній нормі) з центром у точці 0, з рівності $T(H_{\tau} \cap E) = H_{\tau} \cap E$ і лінійності T випливає, що T є ізометрією на H_{τ}. Нарешті, як вже відомо, $H = H^{-} \oplus H_{\tau} \oplus H^{+}$, отже T є ізометрією на всьому H. $\square$

Зазначимо, що ми були зацікавлені у класифікації замкнених обмежених тілесних множин. Тому ми ввели обмеження

$$\inf_n a(n) > 0,$$

$$\sup_n a(n) < +\infty$$

на півосі еліпсоїда. Тим не менш, питання лінійної пластичності змістовне і для еліпсоїдів з довільними півосями і для них описання незмінне. Єдиною складністю є те, що у загальному випадку E може не бути поглинаючою множиною, і з умови нерозтягуваності оператора T на E випливає неперервність T на $\mathrm{Lin}E$, але не на всьому H. Тому в загальному випадку всі леми і твердження мають формулюватися для лінійної оболонки еліпсоїда E, а не для всього простору H. У цьому випадку підпростір $\mathrm{Lin}E$ може бути незамкненим і відповідні простори зі скалярним добутком $(\mathrm{Lin}E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ і $(\mathrm{Lin}E, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$ можуть бути неповними, що викликає складнощі, оскільки у більшості підручників ортонормований базис і унітарні оператори визначені лише для гільбертових, тобто повних, просторів. На щастя, ці труднощі суто термінологічного характеру.

Висновки до розділу 3

У цьому розділі ми ввели поняття лінійної пластичності та знайшли необхідні і, водночас, достатні умови лінійної пластичності еліпсоїдів у сепарабельному гільбертовому просторі. Перелічимо оновні результати розділу.

– Твердження 3.2, де доводиться необхідність встановлених умов.

– Теорема 3.6, яка стверджує достатність встановлених умов.

Відкритим залишається цікаве питання опису пластичних (а не лінійно пластичних) еліпсоїдів. Зрозуміло, якщо еліпсоїд є пластичним, він буде і лінійно пластичним, тобто твердження 3.2 також надає достатню умову для непластичності. Чи буде ця умова необхідною – нам невідомо. Результати розділу містяться у роботі [30].

РОЗДІЛ 4

GL-ПРОСТОРИ

Як вже говорилося раніше, одним з цікавих питань, пов'язаних з ізометріями, є проблема Тінглі 1.26. Нагадаємо також, що ця проблема має позитивну відповідь для так званих GL-просторів, що і зумовлює нашу до них цікавість.

Відстань від точки x нормованого простору X до непорожньої підмножини $A \subset X$ визначається як інфімум відстаней від x до елементів A:

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Нагадаємо деякі означення.

Означення 4.1. *Замкненою зрізкою одиничної кулі* B_X банахового простору X називається підмножина B_X вигляду

$$\mathcal{S}(x^*, \alpha) = \{x \in B_X : x^*(x) \geqslant 1 - \alpha\},$$

де $x^* \in S_{X^*}$ і $\alpha \in (0, 1)$.

Означення 4.2 ([23]). Банахів простір X називається *узагальнено-пишним*, або *GL-простором* (англ. generalized-lush), якщо для будь-якого $x \in S_X$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться зрізка $\mathcal{S}(x^*, \varepsilon)$, така що $x \in \mathcal{S}(x^*, \varepsilon)$ і

$$\operatorname{dist}(y, \mathcal{S}(x^*, \varepsilon)) + \operatorname{dist}(-y, \mathcal{S}(x^*, \varepsilon)) < 2 + \varepsilon$$

для всіх $y \in S_X$. Банахів простір E називається *локальним GL-простором*, якщо для кожного сепарабельного підпростору $Y \subset E$ знайдеться GL-підпростір $X \subset E$, такий що $Y \subset X \subset E$.

У цьому розділі ми покажемо, що кожен скінченновимірний GL-простір є поліедральним (теорема 4.10), що у двовимірному випадку є лише два, з точністю до ізометрії, GL-простори, а саме, простір, чия одинична сфера є квадратом (як ℓ_∞^2 чи ℓ_1^2), і простір, чия одинична сфера є рівностороннім шестикутником (теорема 4.13). Також ми надамо опис просторів $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ з абсолютною нормою, таких що для будь-якого набору $X_1, \dots, X_n$ GL-просторів їхня E-сума є GL-простором, і як наслідок, отримаємо, що у двовимірному випадку такими просторами є лише ℓ_∞^2 та ℓ_1^2.

4.1 Поліедральність скінченновимірних GL-просторів

Нагадаємо, що відстанню Гаусдорфа між двома непорожніми замкненими підмножинами A і B метричного простору X називається

$$\operatorname{dist}_{\mathrm{H}}(A, B) = \max\left\{\sup_{b\in B} \operatorname{dist}(b, A),\ \sup_{a\in A} \operatorname{dist}(a, B)\right\}.$$

Відповідно до теореми вибору Бляшке [26, Theorem 2.5.14], набір непорожніх замкнених опуклих підмножин заданої обмеженої підмножини скінченновимірного нормованого простору формує компакт у метриці Гаусдорфа.

Означення 4.3. *Гранню одиничної кулі* банахового простору X будемо називати непорожню множину вигляду

$$\mathcal{F}(x^*) = \{x \in B_X : x^*(x) = 1\},$$

де $x^* \in S_{X^*}$.

Означення 4.4. Підмножину $A \subset B_X$ називатимемо *пухкою*, якщо для будь-якого $y \in S_X$ знайдуться $a_1, a_2 \in A$, такі що

$$\|y - a_1\| + \|y + a_2\| \leqslant 2.$$

Відзначимо, що у випадку компактності A відстані досягаються, отже, з нерівності

$$\operatorname{dist}(y, A) + \operatorname{dist}(-y, A) \leqslant 2$$

автоматично витікає існування відповідних $a_1, a_2 \in A$. Якщо

$$A \subset B \subset B_X$$

і A є пухкою, тоді B також пухка. Якщо для кожного $\varepsilon > 0$ будь-яке $x \in S_X$ міститься у пухкій зрізці $\mathcal{S}(x^*, \varepsilon)$, тоді X – GL-простір.

Наступне означення мотивоване твердженням [10, Proposition 2.2] і аналогічними поняттями ультра-пишних просторів з [5], а також жорстко вузькими операторами відносно підмножини з [3].

Означення 4.5. Нормований простір X називається *ультра-GL відносно підпростору* $W \subset X^*$ (ультра-GL(W)-простір), якщо для будь-якого $x \in S_X$ знайдеться $x^* \in S_W$, такий що $x \in \mathcal{F}(x^*)$ і $\mathcal{F}(x^*)$ пухка. У випадку, коли $W = X^*$, простір X будемо називати *ультра-GL*.

Лема 4.6. *Нехай X – скінченновимірний нормований простір. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(1) X – GL-простір;

(2) X – ультра-GL простір.

(3) для будь-якого $x \in S_X$ знайдеться опукла пухка підмножина $B \subset S_X$, така що $x \in B$.

Доведення. (**3**) $\Rightarrow$ (**2**) Нехай виконується третя умова. Тоді для фіксованого $x \in S_X$ знайдеться опукла пухка підмножина $B \subset S_X$, що містить x. Множину B можна відділити від відкритої одиничної кулі функціоналом одиничної норми (теорема Гана-Банаха), тобто існує функціонал $x^* \in S_{X^*}$, такий що $B \subset \mathcal{F}(x^*)$. Тоді $x \in \mathcal{F}(x^*)$ і $\mathcal{F}(x^*)$ пухка.

(**2**) $\Rightarrow$ (**1**) Візьмемо для фіксованого $x \in S_X$ відповідний $x^* \in S_{X^*}$, що породжує пухку грань, яка містить x. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ розглянемо зрізку $\mathcal{S}(x^*, \varepsilon)$. Очевидно, що

$$\mathcal{F}(x^*) \subset \mathcal{S}(x^*, \varepsilon) \subset B_X,$$

отже, $\mathcal{S}(x^*, \varepsilon)$ пухка.

(**1**) $\Rightarrow$ (**3**) Відзначимо, що (1) означає, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $x_n^* \in S_{X^*}$, такий що $x \in \mathcal{S}(x_n^*, \dfrac{1}{n}) = S_n$ і

$$\operatorname{dist}(y, S_n) + \operatorname{dist}(y, -S_n) < 2 + \frac{1}{n} \tag{4.1}$$

для кожного $y \in S_X$. З теореми вибору Бляшке випливає існування підпослідовності S_{n_k}, що збігається у метриці Гаусдорфа до замкненої опуклої множини

$$B = \lim_{k\to\infty} S_{n_k} \subset B_X.$$

Очевидно, з включення

$$S_n \subset \{x \in B_X \colon \|x\| \geqslant 1 - \frac{1}{n}\}$$

витікає, що гранична множина B лежить на одиничній сфері. Оскільки для фіксованого $y \in S_X$ відстань $\operatorname{dist}(y, S)$ неперервно у Гаусдорфовій метриці залежить від змінної S, з (4.1) випливає бажана нерівність

$$\operatorname{dist}(y, B) + \operatorname{dist}(y, -B) \leqslant 2.$$

□

Зазначимо наступний очевидний наслідок.

Наслідок 4.7. *Нехай X – скінченновимірний GL-простір. Тоді S_X є об'єднанням своїх пухких граней.*

Лема 4.8. *Нехай X – нормований простір, $x^* \in S_{X^*}$. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(1) $\mathcal{F}(x^*)$ *пухка;*

(2) $\operatorname{dist}(y, \mathcal{F}(x^*)) + \operatorname{dist}(-y, \mathcal{F}(x^*)) \leqslant 2$ *для будь-якого* $y \in B_X$, *і відстань досягається, тобто існують* $u, v \in \mathcal{F}(x^*)$, *такі що* $\|u - y\| + \|v + y\| \leqslant 2$.

(3) $\operatorname{dist}(y, \mathcal{F}(x^*)) = 1 - x^*(y)$ *для будь-якого* $y \in B_X$, *і відстань досягається.*

(4) $\operatorname{dist}(y, \mathcal{F}(x^*)) = 1 - x^*(y)$ *для будь-якого* $y \in S_X$, *і відстань досягається.*

Доведення. Імплікації (2) $\Rightarrow$ (1) і (3) $\Rightarrow$ (4) очевидні, отже, залишається довести імплікації (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3) і (4) $\Rightarrow$ (1).

$(\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{2})$. Для даного $y \in B_X$ позначимо $\hat{y} = \dfrac{y}{\|y\|}$. Скористаємося фактом, що $\mathcal{F}(x^*)$ пухка, і виберемо $u, v \in \mathcal{F}(x^*)$, такі що

$$\|u - \hat{y}\| + \|v + \hat{y}\| \leqslant 2.$$

Позначимо $\lambda = \|y\|$. Тоді маємо

$$\begin{aligned} \|u - y\| + \|v + y\| &= \|\lambda(u - \hat{y}) + (1 - \lambda)u\| + \|\lambda(v + \hat{y}) + (1 - \lambda)v\| \\ &\leqslant \lambda\|(u - \hat{y})\| + (1 - \lambda)\|u\| + \lambda\|(v + \hat{y})\| + (1 - \lambda)\|v\| \\ &= \lambda\left(\|(u - \hat{y})\| + \|(v + \hat{y})\|\right) + (1 - \lambda) + (1 - \lambda) \leqslant 2. \end{aligned}$$

$(\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{3})$. Тепер для даного $y \in B_X$ оберемо $u, v \in \mathcal{F}(x^*)$, такі що

$$\|u - y\| = \operatorname{dist}(y, \mathcal{F}(x^*)),$$

$$\|v + y\| = \operatorname{dist}(-y, \mathcal{F}(x^*)).$$

Тоді

$$\|u - y\| + \|v + y\| \leqslant 2,$$

$$\|u - y\| \geqslant x^*(u - y) = 1 - x^*(y),$$

$$\|v + y\| \geqslant x^*(v + y) = 1 + x^*(y).$$

Об'єднаємо ці три нерівності і отримаємо, що

$$2 \geqslant \|u - y\| + \|v + y\| \geqslant 1 - x^*(y) + 1 + x^*(y) = 2.$$

Це можливо лише за умов

$$\|u - y\| = 1 - x^*(y),$$

$$\|v + y\| = 1 + x^*(y)$$

.

$(\mathbf{4}) \Rightarrow (\mathbf{1})$. Нехай $y \in S_X$, тоді $-y \in S_X$, отже, з умови (4) випливає

$$\operatorname{dist}(y, \mathcal{F}(x^*)) = 1 - x^*(y),$$

$$\operatorname{dist}(-y, \mathcal{F}(x^*)) = 1 + x^*(y).$$

Таким чином,

$$\operatorname{dist}(y, \mathcal{F}(x^*)) + \operatorname{dist}(-y, \mathcal{F}(x^*)) = 2.$$

□

Нагадаємо, що для підмножини $A \subset X$ її різницева множина $A - A$ визначається наступним чином:

$$A - A = \{x - y \colon x, y \in A\}.$$

Лема 4.9. *Нехай $x^* \in S_{X^*}$ і $\mathcal{F}(x^*)$ пухка. Тоді*

$$\mathcal{F}(x^*) - \mathcal{F}(x^*) \supset B_X \cap \ker x^*.$$

Доведення. Зафіксуємо $y \in B_X \cap \ker x^*$. Ми маємо на меті показати, що $y \in \mathcal{F}(x^*) - \mathcal{F}(x^*)$. Насправді, оберемо $v \in \mathcal{F}(x^*)$, таке що

$$\|v + y\| = \operatorname{dist}(-y, \mathcal{F}(x^*)).$$

Відповідно до пункту (3) леми 4.8,

$$\|v + y\| = x^*(v + y) = 1.$$

Отже,

$$v + y \in \mathcal{F}(x^*),$$
$$y = (v + y) - v \in \mathcal{F}(x^*) - \mathcal{F}(x^*).$$

□

Теорема 4.10. *Одинична куля будь-якого скінченновимірного GL-простору є багатогранником з пухкими гранями.*

Доведення. Нехай $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ – GL-простір і нехай $r > 0$ – мінімальний $(n-1)$-вимірний об'єм перетинів B_X з $(n-1)$-вимірними лінійними підпросторами у X. Зафіксуємо пухку грань $\mathcal{F}(x^*)$ і $x \in \mathcal{F}(x^*)$. Тоді

$$\mathcal{F}(x^*) - x \subset \ker x^*.$$

Зауважимо, що завдяки попередній лемі

$$(\mathcal{F}(x^*) - x) - (\mathcal{F}(x^*) - x) = \mathcal{F}(x^*) - \mathcal{F}(x^*) \supset B_X \cap \ker x^*.$$

Відповідно до теореми Роджерса-Шепарда [22, Theorem 1], для будь-якого опуклого тіла K у m-вимірному просторі E

$$\operatorname{vol}_m(K - K) \leqslant \binom{2m}{m} \operatorname{vol}_m(K).$$

Застосовуючи цю теорему до $K = \mathcal{F}(x^*) - x \subset E := \ker x^*$, отримуємо

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_{n-1}(\mathcal{F}(x^*)) &= \mathrm{vol}_{n-1}(\mathcal{F}(x^*) - x)\\ &\geqslant \binom{2m}{m}^{-1} \mathrm{vol}_{n-1}\left((\mathcal{F}(x^*) - x) - (\mathcal{F}(x^*) - x)\right)\\ &\geqslant \binom{2m}{m}^{-1} \mathrm{vol}_{n-1}\left(B_X \cap \ker x^*\right) \geqslant \binom{2m}{m}^{-1} r.\end{aligned}$$

Отже, $(n-1)$-вимірні об'єми пухких граней обмежені знизу додатнім числом, таким чином, множина пухких граней B_X скінченна. Занумеруємо $\{\mathcal{F}(x_k^*)\}_{k=1}^N$, $x_k^* \in S_{X^*}$, усі пухкі грані. З наслідку 4.7 випливає, що

$$S_X = \bigcup_{k=1}^{N} \mathcal{F}(x_k^*),$$

що означає

$$B_X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x_k^*(x)| \leqslant 1 \text{ для всіх } k = 1, 2, \ldots, N\}.$$

□

Наслідок 4.11. *Довжина кожного ребра дійсного двовимірного GL-простору не менша за 1.*

Доведення. Цей факт випливає з теореми 4.10 і леми 4.9. □

4.2 Опис двовимірних GL-просторів

Цей розділ ми також розпочнемо з викладення необхідного нам відомого результату.

Твердження 4.12 ([19, Proposition 20]). *Одинична сфера площини Мінковського має не більш ніж три пари відрізків, довжина яких не менша від 1. Якщо вона має три пари відрізків, довжина яких не менша від 1, тоді одиничний диск – це шестикутник з вершинами $\pm x_1, \pm x_2, \pm\lambda(x_1 + x_2)$ для деякого $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1]$, і довжина принаймні двох пар відрізків дорівнює 1.*

Відомо [23], що двовимірні простори $\mathbb{R}^2$ з нормою

$$\|(a_1, a_2)\|_\infty = \max\{|a_1|, |a_2|\}$$

або

$$\|(a_1, a_2)\|_1 = |a_1| + |a_2|$$

(простори ℓ_∞^2 і ℓ_1^2 відповідно), та $\mathbb{R}^2$ з нормою

$$\|(a_1, a_2)\| = \max\{|a_2|, |a_1| + \frac{1}{2}|a_2|\}$$

(позначимо його $\widetilde{E}$) є GL-просторами. Перші два простори є ізометричними (їхні одиничні сфери – паралелограми), тож як банахові простори їх можна не розрізняти. Одинична сфера простору $\widetilde{E}$ у метриці $\widetilde{E}$ є рівностороннім шестикутником. Виявилося, що інших (з точністю до ізометрії) двовимірних GL-просторів немає.

Теорема 4.13. *Нехай X – дійсний двовимірний GL-простір. Тоді X ізометричний або простору $\widetilde{E}$ або* $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\ell_1})$.

Доведення. Відповідно до теореми 4.10, одинична куля простору X – це багатокутник з пухкими ребрами. Відповідно до наслідку 4.11, довжина кожного ребра не менше 1. Застосуємо твердження 4.12 і отримаємо, що одинична куля простору X є або паралелограмом (і тоді простір ізометричний двовимірному просторові ℓ_1^2), або шестикутником з вершинами $\pm x_1, \pm x_2, \pm\lambda(x_1 + x_2)$ для деякого $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1]$. Залишилося розглянути випадок шестикутника.

Оберемо базисні вектори $e_1 = x_1, e_2 = x_2$. Координати вершин у цьому базисі: $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ і $\pm(\lambda, \lambda)$. Отже X можна розглядати як $\mathbb{R}^2$ з нормою $\|(u, v)\| = \|ue_1 + ve_2\|$. Вираз для норми у цьому просторі можна виписати явно. Для кожного $x = (u, v) \in (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$

$$\|x\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 3}\{|f_i(x)|\},$$

де $f_i(x), 1 \leqslant i \leqslant 3$ є лінійними функціоналами вигляду

$$f_1(x) = u + \frac{1 - \lambda}{\lambda}v,$$

$$f_2(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda}u + v,$$
$$f_3(x) = -u + v.$$

Тепер розглянемо ребро $[\lambda(x_1+x_2), x_2] = \mathcal{F}(f_2)$ і підрахуємо $\operatorname{dist}(x_1, \mathcal{F}(f_2))$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(x_1, \mathcal{F}(f_2)) &= \inf_{\alpha\in[0,1]} \operatorname{dist}(x_1, \alpha\lambda x_1 + \alpha\lambda x_2 + (1-\alpha)x_2) \\
&= \inf_{\alpha\in[0,1]} \|(1-\alpha\lambda)x_1 + (\alpha - 1 - \alpha\lambda)x_2\| \\
&= \inf_{\alpha\in[0,1]} \max_{1\leqslant i\leqslant 3}\{|f_i(1-\alpha\lambda, \alpha-1-\alpha\lambda)|\} \\
&= \inf_{\alpha\in[0,1]} f_3(1-\alpha\lambda, \alpha-1-\alpha\lambda) \\
&= \inf_{\alpha\in[0,1]} (2-\alpha) = 1.
\end{aligned}$$

З іншого боку, оскільки $\mathcal{F}(f_2)$ пухка,

$$\operatorname{dist}(x_1, \mathcal{F}(f_2)) = 1 - f_2(x_1) = 1 - \frac{1-\lambda}{\lambda},$$

отже, $\lambda = 1$. Як висновок, у випадку шестикутника наш простір ізометричний $\mathbb{R}^2$ з нормою

$$\|x\| = \|(u,v)\| = \max\{|u|, |v|, |u-v|\}.$$

Цей простір ізометричний $\widetilde{E}$. □

Наступна властивість простору $\widetilde{E}$ знадобиться у наступному підрозділі.

Твердження 4.14. *Нехай $\widetilde{E} = \mathbb{R}^2$ з нормою*

$$\|(a_1, a_2)\| = \max\{|a_2|, |a_1| + \frac{1}{2}|a_2|\},$$

$\widetilde{e}_1 = (1,0)$, $\widetilde{e}_2 = (\frac{1}{2}, 1)$, $\widetilde{e}_3 = (-\frac{1}{2}, 1)$, $\widetilde{e}_2^* \in S_{\widetilde{E}^*}$ – другий координатний функціонал на $\mathbb{R}^2$: $\widetilde{e}_2^*(a,b) = b$. Тоді $\mathcal{F}(\widetilde{e}_2^*)$ є ребром шестикутника $B_{\widetilde{E}}$, що з'єднує $\widetilde{e}_2$ і $\widetilde{e}_3$, і вершина $\widetilde{e}_1$ належить ядру $\widetilde{e}_2^*$.

Нехай $t \in [0,1]$ і нехай $\widetilde{y} = t\widetilde{e}_2 + (1-t)\widetilde{e}_1$ – такий елемент ребра, яке з'єднує $\widetilde{e}_2$ і $\widetilde{e}_1$, що $\widetilde{e}_2^*(\widetilde{y}) = t$. Тоді, якщо для даного $\alpha > 0$ знайдеться $\widetilde{x} \in \mathcal{F}(\widetilde{e}_2^*)$, такий що

$$\|\widetilde{x} - \alpha\widetilde{y}\| = 1 - \alpha t, \tag{4.2}$$

тоді $\alpha \leqslant 1$.

Доведення. Справді, припустимо, що $\alpha > 1$. Запишемо $\alpha\widetilde{y}$ у координатній формі $\alpha\widetilde{y} = (a_1, a_2)$, $a_1, a_2 \geqslant 0$. Зазначимо, що з (4.2) випливає, що

$$a_2 = \widetilde{e}_2^*(\alpha\widetilde{y}) = \alpha t \leqslant 1,$$

отже,

$$1 < \alpha = \|\alpha\widetilde{y}\| = a_1 + \frac{1}{2}a_2 = a_1 + \frac{1}{2}\alpha t,$$

зокрема

$$a_1 > 1 - \frac{1}{2}\alpha t \geqslant \frac{1}{2}.$$

Вектор $\widetilde{x}$ має вигляд $\widetilde{x} = (b_1, 1)$ з $|b_1| \leqslant \frac{1}{2}$. Отже,

$$\widetilde{x} - \alpha\widetilde{y} = (b_1 - a_1, 1 - \alpha t)$$

і

$$\begin{aligned}\|\widetilde{x} - \alpha\widetilde{y}\| &\geqslant |b_1 - a_1| + \frac{1}{2}(1 - \alpha t) = a_1 - b_1 + \frac{1}{2}(1 - \alpha t) \\ &\geqslant a_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \alpha t) = a_1 - \frac{1}{2}\alpha t > 1 - \alpha t.\end{aligned}$$

$\square$

4.3 GLR-простори

Нехай $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ – нормований простір. Позначимо e_k, $k = 1, \ldots, n$, елементи канонічного базису: координата з номером k вектора e_k дорівнює 1, усі інші – нулю. Норму $\|\cdot\|_E$ будемо називати абсолютною, якщо вона задовольняє наступні умови:

(i) $\|e_k\|_E = 1$, $k = 1, \ldots, n$;

(ii) для будь-якого $a = (a_1, ..., a_n)$ вектор

$$|a| := (|a_1|, ..., |a_n|)$$

має таку ж норму, як a:

$$\|(a_1, ..., a_n)\|_E = \|(|a_1|, ..., |a_n|)\|_E.$$

З вищезазначених властивостей випливає, що *норма є монотонною* у наступному сенсі: якщо $a = (a_1, ..., a_n)$ і $b = (b_1, ..., b_n)$ задовольняють

$$0 \leqslant a_k \leqslant b_k, k = 1, \ldots, n,$$

тоді

$$\|a\|_E \leqslant \|b\|_E.$$

Спряжений простір E^* до E ми стандартним чином ототожнюємо з $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{E^*})$, де функціонал $b = (b_1, ..., b_n) \in E^*$ діє на $a = (a_1, ..., a_n) \in E$ за формулою

$$b(a) = b_1 a_1 + \ldots + b_n a_n.$$

Зазначимо, що норма $\|\cdot\|_{E^*}$ також абсолютна.

Нехай $X_1, \ldots, X_n$ – нормовані простори, і $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ – простір з абсолютною нормою. E-сума просторів X_k (позначимо її $E(X_k)_1^n$) – це векторний простір усіх $x = (x_1, ..., x_n)$, $x_k \in X_k$, $k = 1, \ldots, n$, з нормою

$$\|x\| = (\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|)_E. \tag{4.3}$$

Нагадаємо, що умова (ii) з означення абсолютної норми гарантує, що вираз (4.3) задовольняє нерівність трикутника. Вона також дає наступну природну властивість: якщо $X_k = \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$, тоді $E(X_k)_1^n = E$. Умова (i) не настільки суттєва, оскільки її виконання можна легко досягти нормуванням, але вона, зазвичай, включається в означення для зручності. Для $x = (x_1, ..., x_n) \in E(X_k)_1^n$ ми позначимо

$$N(x) = (\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|).$$

Тоді

$$\|x\| = \|N(x)\|_E.$$

Спряженим до $E(X_k)_1^n$ є простір $E^*(X_k^*)_1^n$, де $f = (f_1, ..., f_n) \in E^*(X_k^*)_1^n$ діє на $x = (x_1, ..., x_n) \in E(X_k)_1^n$ за правилом

$$f(x) = f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n).$$

Означення 4.15. Простір $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ з абсолютною нормою називається *GL-зберігаючим* (скорочено – *GLR-простором*, від англ. GL-respecting), якщо для кожного набору $X_1, \ldots, X_n$ GL-просторів відповідна E-сума $E(X_k)_1^n$ є GL-простором.

Відомо [23, Theorem 2.11], що простори ℓ_1^n і ℓ_∞^n є GL-зберігаючими (формально кажучи, відповідна теорема має справу з нескінченними сумами, але вона справедлива і для скінченних сум). Мета цього підрозділу – з'ясувати, чи існують інші приклади GLR-просторів. Почнемо з очевидного зауваження.

Твердження 4.16. *Кожен GLR-простір є GL-простором.*

Доведення. Підставимо в означення GLR-простору $X_k = \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$. $\square$

Перш ніж формулювати ще одну необхідну умову GLR-простору, зробимо декілька зауважень. З твердження 4.16 і теореми 4.10 випливає, що одинична куля будь-якого GLR-простору E – багатогранник. Тоді одинична куля E^* також є багатогранником. Як і раніше, $\operatorname{ext}(B_{E^*})$ позначатиме множину крайніх точок B_{E^*}. Множина $\operatorname{ext}(B_{E^*})$ є скінченною, кількість елементів у $\operatorname{ext}(B_{E^*})$ співпадає з кількістю максимальних граней B_E, і кожен $d \in \operatorname{ext}(B_{E^*})$ відповідає грані $\mathcal{F}(d)$ кулі B_E. Оскільки норма $\|\cdot\|_{E^*}$ є абсолютною, множина $\operatorname{ext}(B_{E^*})$ дзеркально симетрична відносно кожної координатної гіперплощини, тобто $d \in \operatorname{ext}(B_{E^*})$ тоді і тільки тоді, коли $|d| \in \operatorname{ext}(B_{E^*})$.

Означення 4.17. Нехай $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ – простір з абсолютною нормою,

$$d^* = (d_1, ..., d_n) \in \operatorname{ext}(B_{E^*})$$

з $d_k \geqslant 0$. Грань $\mathcal{F}(d^*) \subset S_E$ будемо називати *монотонно пухкою*, якщо, позначивши

$$D = \{k : d_k \neq 0\},$$

для будь-якого $a = (a_1, ..., a_n) \in S_E$ з $a_k \geqslant 0$ і будь-якого $z = (z_1, ..., z_n) \in B_E$, такого що

$$0 \leqslant z_k \leqslant a_k \text{ для } k \in D \tag{4.4}$$

знайдеться $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathcal{F}(d^*)$, такий що

$$\|b - z\| = 1 - d^*(z)$$

і

$$b_k \geqslant a_k \text{ для } k \in D.$$

Простір E будемо називати *GL-монотонним (GLM-простором)*, якщо для будь-якого $d^* \in \text{ext}(B_{E^*})$ з $d_k \geqslant 0$ відповідна грань $\mathcal{F}(d^*) \subset S_E$ є монотонно пухкою.

Твердження 4.18. *Нехай, використовуючи попередні позначення, $d^* = (d_1, ..., d_n) \in \text{ext}(B_{E^*})$, $d_k \geqslant 0$ породжує монотонно пухку грань. Тоді*

(1) усі координати d_k належать множині $\{0, 1\}$;

(2) властивість з означення 4.17 залишається справедливою для будь-якого $z = (z_1, ..., z_n) \in B_E$, що задовольняє наступну слабшу версію (4.4): $|z_k| \leqslant a_k$ для $k \in D$.

Доведення. Оскільки $\mathcal{F}(d^*)$ є $(n-1)$-вимірною афінною підмножиною сфери, вона не може міститися у ядрі координатного функціоналу. Отже, множина

$$\{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{F}(d^*) \colon \exists_{k \in \{1,...,n\}} \, x_k = 0\}$$

є ніде не щільною у $\mathcal{F}(d^*)$. Візьмемо $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{F}(d^*)$ з усіма ненульовими координатами і розглянемо $a = (a_1, ..., a_n) \in S_E$ з $a_k = |x_k| > 0$, $k = 1, \ldots, n$. Тоді

$$1 = d^*(x) \leqslant d^*(a) \leqslant \|a\| = \|x\| = 1,$$

що означає, що $a \in \mathcal{F}(d^*)$. Зафіксуємо $j \in D$. Ми намагаємося показати, що $d_j = 1$. Застосуємо означення 4.17 до такого $z = (z_1, ..., z_n) \in B_E$, що

$z_j = 0$, і $z_k = a_k$ для $k \neq j$. Ми отримуємо $b = (b_1, ..., b_n) \in S_E$ з $d^*(b) = 1$, $\|b - z\| = 1 - d^*(z)$ і $b_k \geqslant a_k$ для $k \in D$. Зауважимо, що

$$1 = d^*(a) = \sum_{k \in D} d_k a_k \leqslant \sum_{k \in D} d_k b_k = d^*(b) = 1,$$

звідки випливає, що $b_k = a_k$ для $k \in D$, і, зокрема, координата з номером j елемента $b - z$ дорівнює a_j. Нарешті,

$$a_j \geqslant d_j a_j = \sum_{k \in D} d_k(a_k - z_k) = \sum_{k \in D} d_k(b_k - z_k) = 1 - d^*(z) = \|b - z\| \geqslant a_j.$$

Таким чином, $d_j = 1$ і доведення твердження (1) завершене.

Щоб довести (2), помітимо спочатку, що для кожного $u = (u_1, ..., u_n)$, такого що $u_k \geqslant 0$ для $k \in D$ і $u_k = 0$ для $k \notin D$, виконується наступна рівність:

$$d^*(u) = \|u\|.$$

Справді, дякуючи (1), маємо

$$\|u\| \geqslant d^*(u) = \sum_{k \in D} u_k = \sum_{k \in D} u_k \|e_k\| \geqslant \|u\|.$$

Тепер розглянемо $a = (a_1, ..., a_n) \in S_E$ з $a_k \geqslant 0$, $z = (z_1, ..., z_n) \in B_E$ з $|z_k| \leqslant a_k$, $k \in D$. Визначимо $w = (w_1, ..., w_n) \in S_E$ з $w_k = |z_k|$ для $k \in D$ і $w_k = z_k$ для інших значень k. Знайдемо $b = (b_1, ..., b_n) \in S_E$, яке послуговується в означенні 4.17 для w, тобто таке, що $d^*(b) = 1$, $\|b - w\| = 1 - d^*(w)$ і $b_k \geqslant a_k$ для $k \in D$. Покажемо, що теж саме b підходить для z:

$$\begin{aligned}\|b - z\| &\leqslant \|b - w\| + \|w - z\| = 1 - d^*(w) + d^*(w - z) \\ &= 1 - d^*(z) = d^*(b - z) \leqslant \|b - z\|.\end{aligned}$$

□

Твердження 4.19. *Нехай $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ – GL-зберігаючий простір. Тоді E – GL-монотонний.*

Доведення. Розглянемо $d^* = (d_1, ..., d_n) \in \operatorname{ext}(B_{E^*})$ з $d_k \geqslant 0$ і покажемо, що $\mathcal{F}(d^*) \subset S_E$ монотонно пухка. Як і раніше, позначимо $D = \{k : d_k \neq 0\}$. Підставимо в означення GLR-простору n ізометричних копій гексагонального простору $\widetilde{E}$. Позначимо ці копії X_k, $k = 1, \dots, n$. Нехай a і z з означення 4.17, ми маємо знайти b з того ж означення щоб показати GL-монотонність. Зафіксуємо $t_k \in [0,1]$, таке що $t_k a_k = z_k$ і для кожного $k = 1, \dots, n$ візьмемо функціонал $x_k^* \in \operatorname{ext}(B_{X_k^*})$ – копію другого координатного функціоналу на $\widetilde{E}$, і візьмемо елемент $y_k \in S_{X_k}$, що належить копії ребра, що з'єднує $\widetilde{e}_2$ і $\widetilde{e}_1$ у $\widetilde{E}$, такий що $x_k^*(y_k) = t_k$ (як $\widetilde{y}$ з твердження 4.14). Наступна **Властивість A**, яку ми будемо використовувати пізніше, є прямим наслідком твердження 4.14: якщо для даного $\alpha > 0$ знайдеться $x_k \in \mathcal{F}(x_k^*)$, такий що $\|x_k - \alpha y_k\| = 1 - \alpha t_k$, тоді $\alpha \leqslant 1$.

За означенням GLR-простору, простір $X = E(X_k)_1^n$ узагальнено-пишний. Розглянемо $x^* = (d_1 x_1^*, ..., d_n x_n^*) \in \operatorname{ext}(B_{X^*})$. Оскільки X скінченновимірний, відповідна грань $\mathcal{F}(x^*)$ кулі B_X має бути пухкою. Застосовуючи переформулювання пухкості, наведене у пункті (4) леми 4.8, до $y = (a_1 y_1, ..., a_n y_n) \in S_X$ з довільним $a = (a_1, ..., a_n) \in S_E$, $a_k \geqslant 0$, ми знаходимо $x = (b_1 x_1, ..., b_n x_n) \in \mathcal{F}(x^*)$ з $x_k \in S_{X_k}$, $b_k \geqslant 0$, $b = (b_1, ..., b_n) \in S_E$, такий що $\|x - y\| = 1 - x^*(y)$. З умови $x \in \mathcal{F}(x^*)$ випливає

$$1 \geqslant \textstyle\sum_{k=1}^n d_k b_k \geqslant \sum_{k=1}^n d_k b_k x_k^*(x_k) = x^*(x) = 1.$$

Це означає, що $\sum_{k=1}^n d_k b_k = 1$, і для кожного $k \in D$ ми маємо $b_k x_k^*(x_k) = b_k$. Використовуючи властивості, перелічені вище, ми отримуємо наступний ланцюжок нерівностей

$$\begin{aligned} 1 - x^*(y) &= \sum_{k=1}^n d_k x_k^*(b_k x_k - a_k y_k) \leqslant \sum_{k=1}^n d_k \|b_k x_k - a_k y_k\| \\ &\leqslant \|(\|b_1 x_1 - a_1 y_1\|, \dots, \|b_n x_n - a_n y_n\|)\|_E = \|x - y\| = 1 - x^*(y). \end{aligned}$$

З вищезазначеного і з факту, що перша нерівність виконується на кожному доданку, ми робимо висновок, що для кожного $k \in D$ виконується рівність

$$\|b_k x_k - a_k y_k\| = x_k^*(b_k x_k - a_k y_k).$$

Властивість A гексагональної норми дозволяє стверджувати, що $a_k \leqslant b_k$

для кожного $k \in D$. З іншого боку,

$$\begin{aligned} 1 \;-\; x^*(y) &= \sum_{k=1}^{n} d_k(x_k^*(b_k x_k) - x_k^*(a_k y_k)) \\ &\leqslant \|(|x_1^*(b_1x_1) - x_1^*(a_1y_1)|, \ldots, |x_n^*(b_nx_n) - x_n^*(a_ny_n)|)\|_E \\ &\leqslant \|(\|b_1x_1 - a_1y_1\|, \ldots, \|b_nx_n - a_ny_n\|)\|_E = \|x-y\| = 1 - x^*(y), \end{aligned}$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{n} d_k(x_k^*(b_k x_k) - x_k^*(a_k y_k))$$
$$= \|(|x_1^*(b_1x_1) - x_1^*(a_1y_1)|, \ldots, |x_n^*(b_nx_n) - x_n^*(a_ny_n)|)\|_E \,.$$

Підставимо $x_k^*(x_k) = 1$, $x_k^*(y_k) = t_k$ і отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n} d_k(b_k - t_k a_k) = \|(|b_1 - t_k a_1|, \ldots, |b_n - t_k a_n|)\|_E \,,$$

тобто

$$d^*(b-z) = \|b-z\|.$$

$\square$

Наслідок 4.20. *Єдиними двовимірними GLR-просторами є простори ℓ_1^2 і ℓ_∞^2.*

Доведення. З твердження 4.16 і теореми 4.13 випливає, що у двовимірниму випадку кандидатами у GLR-простори є тільки ті простори, чиї одиничні кулі є або паралелограмом або шестикутником. Нехай $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ – GLR-простір. Оскільки за означенням норма у X абсолютна, для кожної крайньої точки (x,y) кулі B_{X^*} точка $(|x|,|y|)$ також є крайньою. З Тверджень 4.18 і 4.19 випливає, що єдині можливі $(x,y) \in \mathrm{ext}(B_{X^*})$ з невід'ємними координатами – це $(0,1)$, $(1,1)$ і $(1,0)$. Розглянемо два випадки.

Випадок 1. $(1,1) \in \mathrm{ext}(B_{X^*})$. Тоді за симетрією усі чотири точки $(\pm 1, \pm 1) \in \mathrm{ext}(B_{X^*})$, тобто $X^* = \ell_\infty^2$ і отже, $X = \ell_1^2$.

Випадок 2. $(1,1) \notin \mathrm{ext}(B_{X^*})$. Тоді $(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1) \in \mathrm{ext}(B_{X^*})$ є єдиними крайніми точками, тобто $X^* = \ell_1^2$ і як наслідок, $X = \ell_\infty^2$. $\square$

Тепер підготуємо підґрунтя для твердження, оберненого до твердження 4.19.

Твердження 4.21. *Нехай $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ – GL-монотонний простір. Тоді для кожного набору $X_1, \dots, X_n$, такого що кожен X_k є ультра-GL відносно деякого підпростору $W_k \subset X_k^*$, відповідна E-сума $X = E(X_k)_1^n$ є ультра-GL відносно відповідного підпростору $W = E^*(W_k)_1^n \subset X^*$. Зокрема, якщо $X_1, \dots, X_n$ є ультра-GL, то X також ультра-GL.*

Доведення. Відповідно до означення 4.5, для даного $x = (x_1, ..., x_n) \in S_X$ ми мусимо знайти $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*) \in S_W$, такий що $x \in \mathcal{F}(x^*)$ і $\mathcal{F}(x^*)$ – пухка грань. Для кожного $k = 1, \dots, n$, оскільки X_k є ультра-GL відносно W_k, можна взяти $w_k^* \in S_{W_k}$, таке що $\mathcal{F}(w_k^*) \subset S_{X_k}$ пухка у X_k і $x_k \in \|x_k\| \mathcal{F}(w_k^*)$, тобто

$$w_k^*(x_k) = \|x_k\|. \tag{4.5}$$

Також, з GL-монотонності E, застосованої до $N(x) = (\|x_1\|, \|x_2\|, ..., \|x_n\|)$, отримуємо $d^* = (d_1, ..., d_n) \in \mathrm{ext}(B_{E^*})$, $d_k \geqslant 0$, таке що $N(x) \in \mathcal{F}(d^*) \subset S_E$,

$$\sum_{k=1}^{n} d_k \|x_k\| = 1 \tag{4.6}$$

і $\mathcal{F}(d^*)$ монотонно пухка у E. Покажемо, що $x_k^* := d_k w_k^*$, $k = 1, \dots, n$, породжує функціонал $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*) \in S_W$, який ми шукаємо. Насправді, з умов (4.5) і (4.6) випливає, що $x \in \mathcal{F}(x^*)$, тож залишається показати, що $\mathcal{F}(x^*)$ пухка. Як і раніше, позначимо $D = \{k : d_k \neq 0\}$. Розглянемо довільний $y = (a_1 y_1, ..., a_n y_n) \in S_X$, $y_k \in S_{X_k}$, $a_k \geqslant 0$. Для $z = (z_1, ..., z_n) = (a_1 w_1^*(y_1), ..., a_n w_n^*(y_n)) \in B_E$ знайдеться елемент $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathcal{F}(d^*)$, такий що $\|b - z\|_E = 1 - d^*(z)$ і $b_k \geqslant a_k$ для всіх $k \in D$.

Відповідно до пункту (3) леми 4.8, для будь-якого $k \in D$, такого що $b_k \neq 0$, знайдеться $w_k \in \mathcal{F}(w_k^*)$, такий що

$$\left\|w_k - \frac{a_k y_k}{b_k}\right\| = |1 - a_k w_k^* \left(\frac{y_k}{b_k}\right)|.$$

Якщо $k \in D$ і $b_k = a_k = 0$, оберемо $w_k \in \mathcal{F}(w_k^*)$ довільним чином. З таким вибором, для кожного $k \in D$ маємо

$$\left\|b_k w_k - a_k y_k\right\| = |b_k - a_k w_k^*(y_k)|. \tag{4.7}$$

Для $k \notin D$ вибір w_k^* не впливає на значення $x_k^* = d_k w_k^* = 0$. Отже, для $k \notin D$ ми можемо взяти в якості w_k^* опорний функціонал у y_k і взяти $w_k = y_k$. Тоді

$$\left\|b_k w_k - a_k y_k\right\| = |b_k - a_k| = |b_k - a_k w_k^*(y_k)|,$$

отже, (4.7) лишається справедливим для всіх k. Нехай $\widetilde{x} = (b_1 w_1, ..., b_n w_n)$. Тоді $\widetilde{x} \in \mathcal{F}(x^*)$ і

$$\begin{aligned} 1 - x^*(y) &= \sum_{k=1}^{n} d_k(b_k - a_k w_k^*(y_k)) = 1 - d^*(z) = \|b - z\|_E \\ &= \|(|b_1 - a_1 w_1^*(y_1)|, \ldots, |b_n - a_n w_n^*(y_n)|)\|_E \\ &= \|(\|b_1 w_1 - a_1 y_1\|, \ldots, \|b_1 w_1 - a_1 y_1\|)\|_E = \|\widetilde{x} - y\|. \end{aligned}$$

□

Для завершення підрозділу ми скористаємося стандартною технікою ультрадобутків. Ми нагадаємо базові означення. Для більш детальної інформації щодо властивостей фільтрів і ультрафільтрів ми посилаємося, наприклад, на [12, Ch. 16]. Ознайомитися з ультрадобутками банахових просторів можна у класичній статті [11].

Означення 4.22. Сім'я $\mathfrak{F}$ підмножин множини $\mathbb{N}$ називається *фільтром* на $\mathbb{N}$ якщо вона задовольняє наступні аксіоми:

(I) $\mathfrak{F}$ непорожня;

(II) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$;

(III) якщо $A, B \in \mathfrak{F}$, тоді $A \cap B \in \mathfrak{F}$;

(IV) якщо $A \in \mathfrak{F}$ і $A \subset B \subset \mathbb{N}$, тоді $B \in \mathfrak{F}$.

Означення 4.23. Нехай Y – топологічний простір і $\mathfrak{F}$ – фільтр на $\mathbb{N}$. Точка y у Y називається *границею послідовності* $y_n \in Y$, $n = 1, 2, \ldots$ *за* *фільтром* $\mathfrak{F}$ (позначається $y = \lim\limits_{\mathfrak{F}} y_n$), якщо для будь-якого околу U точки y знайдеться елемент $A \in \mathfrak{F}$, такий що $y_n \in U$ для всіх $n \in A$.

Означення 4.24. *Ультрафільтр* на $\mathbb{N}$ – це максимальний за включенням фільтр на $\mathbb{N}$. Ультрафільтр *нетривіальний*, якщо всі його елементи нескінченні.

Зауважимо, що існування нетривіального ультрафільтра гарантоване лемою Цорна, і що границя за ультрафільтром існує для будь-якої обмеженої послідовності дійсних чисел.

Нехай $\mathfrak{U}$ – нетривіальний ультрафільтр на $\mathbb{N}$, X – банахів простір. Ультрастепінь $X^{\mathfrak{U}}$ – це факторпростір $\ell_\infty(X)$ за підпростором таких $x = (x_n) \in \ell_\infty(X)$, для котрих $\lim\limits_{\mathfrak{U}} \|x_n\| = 0$. Ультрастепінь $X^{\mathfrak{U}}$ ми будемо розглядати як простір обмежених послідовностей $x = (x_n)$ з $x_n \in X$, наділений нормою

$$\|x\| = \lim_{\mathfrak{U}} \|x_n\|,$$

і вважатимемо, що $x = (x_n)$ і $y = (y_n)$ є одним і тим самим елементом ультрастепеня, якщо $\lim\limits_{\mathfrak{U}} \|x_n - y_n\| = 0$. Ультрастепінь $(X^*)^{\mathfrak{U}}$ може бути ототожнена з підпростором у $(X^{\mathfrak{U}})^*$ наступним чином: кожен $x^* = (x_n^*)$, $x_n^* \in X^*$, $\sup_n \|x_n^*\| < \infty$ є лінійним функціоналом на $X^{\mathfrak{U}}$, який діє на кожен $x = (x_n)$ за правилом

$$x^*(x) = \lim_{\mathfrak{U}} x_n^*(x_n).$$

Для функціонала $x^* = (x_n^*)$ його норма співпадає з його нормою, як елемента ультрастепеня $(X^*)^{\mathfrak{U}}$:

$$\|x^*\| = \lim_{\mathfrak{U}} \|x_n^*\|.$$

Теорема, що наведена нижче, була змодельована за зразком схожого результату про вузькі оператори [3, Lemma 2.6]. Аналогічний результат для пишних просторів був доведений у [5, Corollary 4.4]. Імплікація (**1**) $\Rightarrow$ (**2**) майже повністю міститься у доведенні [10, Proposition 2.2].

Теорема 4.25. *Нехай* X *– банахів простір, і* $\mathfrak{U}$ *– нетривіальний ультрафільтр на* $\mathbb{N}$*. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

(1) X – GL-простір,

(2) $X^{\mathfrak{U}}$ – ультра-GL відносно підпростору $W = (X^*)^{\mathfrak{U}}$.

Доведення. $(\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{2})$. Ми маємо на меті показати, що для кожного $x = (x_n) \in S_{X^{\mathfrak{U}}}$, $x_n \in X$, знайдеться $x^* = (x_n^*) \in S_W$, такий що $x \in \mathcal{F}(x^*)$ і $\mathcal{F}(x^*)$ пухка. Зазначимо, що

$$\|x\| = \lim_{\mathfrak{U}} \|x_n\| = 1,$$

отже,

$$\lim_{\mathfrak{U}} \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - x_n \right\| = 0,$$

таким чином,

$$(x_n) = \left(\frac{x_n}{\|x_n\|} \right)$$

як елементи ультрастепеня. Заміняючи, при необхідності, x_n на $\dfrac{x_n}{\|x_n\|}$, можемо вважати, що $x_n \in S_X$, $n \in \mathbb{N}$. Оскільки через (1) X – GL-простір, для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $x_n^* \in S_{X^*}$, такий що $x_n \in \mathcal{S}(x_n^*, \dfrac{1}{n})$, і (4.1) справедлива для будь-якого $y \in S_X$. Позначимо $x^* = (x_n^*)$. За нашою побудовою,

$$\|x^*\| = \lim_{\mathfrak{U}} \|x_n^*\| = 1 = \lim_{\mathfrak{U}} x_n^*(x_n) = x^*(x).$$

Це означає, що $x^* \in S_W$ і $x \in \mathcal{F}(x^*)$. Залишилося показати, що відповідна грань $\mathcal{F}(x^*)$ пухка. Нехай $y = (y_n) \in S_{X^{\mathfrak{U}}}$, $y_n \in S_X$. Для всіх $n \in \mathbb{N}$, використовуючи (4.1), оберемо $u_n^1, u_n^2 \in \mathcal{S}(x_n^*, \dfrac{1}{n})$ таким чином, що

$$\|y_n - u_n^1\| + \|y_n + u_n^2\| \leqslant 2 + \frac{1}{n}.$$

Позначимо

$$u_i = (u_n^i) \in S_{X^{\mathfrak{U}}}, i = 1, 2.$$

Ми маємо $u_i \in \mathcal{F}(x^*)$ і

$$\|y - u_1\| + \|y + u_2\| \leqslant 2,$$

звідки за означенням 4.4 випливає, що насправді $\mathcal{F}(x^*)$ пухка.

$(\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{1})$. Цього разу нехай $x \in S_X$ – довільний елемент. Припустимо протилежне, що знайдеться $\varepsilon > 0$, таке що для кожного $x^* \in S_{X^*}$ з $x^*(x) > 1 - \varepsilon$ існує $y \in S_X$, такий що

$$\operatorname{dist}(y, \mathcal{S}(x^*, \varepsilon)) + \operatorname{dist}(-y, \mathcal{S}(x^*, \varepsilon)) \geqslant 2 + \varepsilon.$$

Візьмемо

$$\widetilde{x} = (x, x, x, \ldots) \in S_{X^{\mathfrak{U}}}$$

і покажемо, що для будь-якого $x^* = (x_n^*) \in S_W$, такого що $\widetilde{x} \in \mathcal{F}(x^*)$, грань $\mathcal{F}(x^*)$ не пухка. Справді, позначимо

$$A = \{n \in \mathbb{N} \colon x_n^*(x) > 1 - \varepsilon\}.$$

З умови

$$1 = x^*(\widetilde{x}) = \lim_{\mathfrak{U}} x_n^*(x)$$

витікає, що $A \in \mathfrak{U}$. Використовуючи наше припущення, для кожного $n \in A$ візьмемо $y_n \in S_X$, так щоб виконувалася умова

$$\operatorname{dist}(y_n, \mathcal{S}(x_n^*, \varepsilon)) + \operatorname{dist}(-y_n, \mathcal{S}(x_n^*, \varepsilon)) \geqslant 2 + \varepsilon, \tag{4.8}$$

для $n \in \mathbb{N} \setminus A$ оберемо $y_n \in S_X$ довільним чином. Позначимо $\widetilde{y} = (y_n) \in S_{X^{\mathfrak{U}}}$. Якщо б грань $\mathcal{F}(x^*)$ була пухкою, знайшлися б $u_i = (u_n^i) \in \mathcal{F}(x^*)$, $i = 1, 2$, такі що $\|\widetilde{y} - u_1\| + \|\widetilde{y} + u_2\| \leqslant 2$. Це суперечить (4.8). □

Нарешті ми готові викласти головний результат підрозділу.

Теорема 4.26. *Простір $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ з абсолютною нормою є GL-зберігаючим тоді і тільки тоді, коли він GL-монотонний.*

Доведення. Необхідність вже доведена у твердженні 4.19, отже, залишилося довести достатність. Нехай простір E GL-монотонний, і нехай $X_1, \ldots, X_n$ – набір GL-просторів. Завдяки попередній теоремі, для фіксованого нетривіального ультрафільтру $\mathfrak{U}$ на $\mathbb{N}$ усі $X_k^{\mathfrak{U}}$, $k = 1, \ldots, n$, є ультра-GL відносно відповідних підпросторів $(X_k^*)^{\mathfrak{U}}$. З твердження 4.21 маємо, що E-сума $E(X_k^{\mathfrak{U}})_1^n$ є ультра-GL відносно підпростору $E^*\left((X_k^*)^{\mathfrak{U}}\right)_1^n$. Використовуючи природну ізометрію між $E(X_k^{\mathfrak{U}})_1^n$ і $(E(X_k)_1^n)^{\mathfrak{U}}$, робимо висновок, що $(E(X_k)_1^n)^{\mathfrak{U}}$ є ультра-GL відносно підпростору $(E^*(X_k^*)_1^n)^{\mathfrak{U}}$. Ще одне застосування попередньої теореми дає нам узагальнену пишність простору $E(X_k)_1^n$. □

Висновки до розділу 4

У цьому розділі ми зробили декілька кроків у вивченні GL-просторів. Ми показали, що кожен скінченновимірний GL-простір є поліедральним, що у двовимірному випадку є лише два, з точністю до ізометрії, GL-простори, а саме, простір, чия одинична сфера є квадратом (як ℓ_∞^2 чи ℓ_1^2), і простір, чия одинична сфера є рівностороннім шестикутником. Були введені означення GL-зберігаючих просторів (тобто просторів $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_E)$ з абсолютною нормою, таких що для будь-якого набору $X_1, \ldots, X_n$ GL-просторів їхня E-сума є GL-простором, інакше кажучи, просторів сума за якими зберігає клас узагаоьнено-пишних просторів) та GL-монотонних просторів. Також ми надали перелік двовимірних GL-зберігаючих просторів (це лише ℓ_∞^2 та ℓ_1^2), та довели еквівалентність того, що простір є GL-зберігаючим та GL-монотонним. Перелічимо основні результати розділу.

- Теорема 4.10, у якій стверджується, що одинична куля будь-якого скінченновимірного GL-простору є багатогранником з пухкими гранями.
- Теорема 4.13, яка надає повний перелік двовимірних GL-просторів.
- Твердження 4.19, у якому доводиться, що з факту, що простір є GL-зберігаючим, випливає його GL-монотонність.
- Наслідок 4.20, де наданий повний перелік двовимірних GLR-просторів.
- Теорема 4.25, де встановлюється еквівалентність узагальненої пишності банахового простору X та ультра узагальненої пишності простору $X^{\mathfrak{U}}$ відносно підпростору $W = (X^*)^{\mathfrak{U}}$.

– Теорема 4.26, де доводиться, що GL-монотонність є не лише необхідною, а й достатньою умовою для того, щоб простір був GL-зберігаючим.

Результати розділу містяться у роботі [14].

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вивченню питань, позв'язаних з нерозтягуючими бієкціями та ізометріями між підмножинами банахових просторів. А саме, пластичності одиничних куль банахових просторів, лінійній пластичності еліпсоїдів у сепарабельних гільбертових просторах та властивостям узагальнено-пишних просторів, які цікавили нас у контексті проблеми Тінглі. Перший розділ містить коротку історію розвитку питань, що постають у дисертації, та вже відомі результати, які були отримані на шляху до їхнього розв'язку. У другому розділі мова йде про пластичність одиничних куль банахових просторів, а також про узагальнену задачу: для яких пар просторів (X, Y) будь-яке бієктивне нерозтягувальне відображення між одиничними кулями цих просторів виявляється ізометрією. Задачу пластичності ми розв'язали для декількох конкретних просторів, узагальнену задачу вдалося розв'язати для всіх пар просторів (X, Y), де X є довільним банаховим простором, а Y є пластичним простором. В одному випадку ролі просторів X та Y в узагальненій задачі вдалося поміняти місцями, тобто визначну роль відігравала вже пластичність простору X. У третьому розділі ми вводимо поняття лінійної пластичності, узагальнюємо вже відомий приклад непластичного еліпсоїда до більш загального випадку та надаємо характеризацію лінійно пластичних еліпсоїдів у сепарабельних гільбертових просторах у термінах їх півосей. Четвертий розділ присвячений узагальнено-пишним просторам. Вивчаються властивості узагальнено-пишних просторів, зокрема, двовимірних і скінченновимірних. Нам вдалося надати повний перелік двовимірних узагальнено-пишних просторів. Також вивчалося питання про те, для яких банахових просторів Z Z-сума зберігає клас узагальнено-пишних просторів. Була встановлена необхідна умова (простір Z сам має бути узагальнено-пишним). Далі, відповідаючи на вищезгадане питання ми ввели означення GL-зберігаючих та GL-монотонних просторів та встановили між ними взаємозв'язок. Завдяки цьому результату вдалося описати двовимірні простори, що зберігають клас GL-просторів.

У дисертаційній роботі отримані наступні нові результати:

– Узагальнена задача пластичності була розв'язана для наступних пар банахових просторів (X, Y):
  X – довільний, Y – строго опуклий банахів простір;
  X – строго опуклий, Y – довільний банахів простір;
  X, Y – довільні скінченновимірні банахові простори;
  X – довільний банахів простір, $Y = \ell_1$;
  X – довільний банахів простір, Y – ℓ_1-сума строго опуклих банахових просторів;
  X – довільний банахів простір, Y – банахів простір, одинична сфера якого є об'єднанням усіх своїх скінченновимірних поліедральних крайніх підмножин.

– Як наслідок, була доведена пластичність одиничних куль таких банахових просторів:
  ℓ_1;
  ℓ_1-сума строго опуклих банахових просторів;
  банахів простір, одинична сфера якого є об'єднанням усіх своїх скінченновимірних поліедральних крайніх підмножин.

– Були встановлені необхідні та достатні умови лінійної пластичності еліпсоїда у сепарабельному гільбертовому просторі.

– Доведена поліедральність скінченновимірних узагальнено-пишних просторів.

– Наданий опис двовимірних узагальнено-пишних просторів.

– Наданий опис двовимірних GLR-просторів.

– Доведена еквівалентність GL-монотонності та умови, що простір є GL-зберігаючим.

Всі результати дисертаційної роботи наведені з повними і строгими математичними доведеннями. Результати мають теоретичний характер та можуть знайти застосування у функціональному аналізі та топології.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Angosto, C., Kadets, V., Zavarzina, O.: Non-expansive bijections, uniformities and polyhedral faces. J. Math. Anal. Appl. 471 (1-2), 38–52 (2019)

2. Brouwer, L. E. J.: Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets. Mathematische Annalen. 71, 305–315 (1912)

3. Bilik, D., Kadets, V., Shvidkoy, R., Werner, D.: Narrow operators and the Daugavet property for ultraproducts. Positivity. 9 (1), 45–62 (2005)

4. Boyko, K., Kadets, V., Martín, M., Werner, D.: Numerical index of Banach spaces and duality. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 142, 93–102 (2007)

5. Boyko, K., Kadets, V., Martín, M., Merí, J.: Properties of lush spaces and applications to Banach spaces with numerical index one. Studia Math. 190, 117–133 (2009)

6. Cascales, B., Kadets, V., Orihuela, J., Wingler,E.J.: Plasticity of the unit ball of a strictly convex Banach space. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas. 110(2), 723–727 (2016)

7. Cheng, L., Dong,Y.: On a generalized Mazur-Ulam question: extension of isometries between unit spheres of Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. 377, 464–470 (2011)

8. Ding, G.: On isometric extension problem between two unit spheres. Sci. China Ser. A. 52, 2069–2083 (2009)

9. Freudenthal, H., Hurewicz, W.: Dehnungen, Verkürzungen, Isometrien. Fund. Math. 26, 120–122 (1936)

10. Hardtke, J.-D.: Some remarks on generalised lush spaces. Stud. Math. 231(1), 29–44 (2015)

11. Heinrich, S.: Ultraproducts in Banach space theory. J. Reine Angew. Math. 313, 72–104 (1980)

12. Kadets, V.: A course in Functional Analysis and Measure Theory. Springer (2018)

13. Kadets, V., Martín, M.: Extension of isometries between unit spheres of finite-dimensional polyhedral Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. 386, 441–447 (2012)

14. Kadets, V., Zavarzina, O.: Generalized-lush spaces revisited. Ann. Funct. Anal. 11(2), 244-258 (2020)

15. Kadets, V., Zavarzina, O.: Nonexpansive bijections to the unit ball of the ℓ_1-sum of strictly convex Banach spaces. Bull. Aust. Math. Soc. 97(2), 285–292 (2018)

16. Kadets, V., Zavarzina, O.: Plasticity of the unit ball of ℓ_1. Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University Ser. «Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics». 83, 4–9 (2016)

17. Kadets, V., Zavarzina, O.: Some results on GL-spaces, In: Book of Abstracts of International conference dedicated to 70th anniversary of Professor Oleh Lopushansky «Infinite dimensional analysis and topology», Ivano-Frankivsk, 16-20 October, 2019

18. Mankiewicz P.: On extension of isometries in normed linear spaces. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 20, 367 –371 (1972)

19. Martini, H., Swanepoel, K.J., Weiss, G.: The geometry of Minkowski spaces – A survey. Part I. Expositiones Mathematicae. 19, 97–142 (2001)

20. Naimpally, S.A., Piotrowski, Z., Wingler, E.J.: Plasticity in metric spaces. J. Math. Anal. Appl. 313, 38–48 (2006)

21. Rockafellar, R. T.: Convex analysis. Princeton University Press, Princeton (1997)

22. Rogers, C.A., Shephard, G.C.: The difference body of a convex body. Archiv der Mathematik. 8(3), 220–233 (1957)

23. Tan, D., Huang, X., Liu, R.: Generalized-lush spaces and the Mazur-Ulam property. Stud. Math. 219(2), 139–153 (2013)

24. Tan, D., Liu, R.: A note on the Mazur-Ulam property of almost-CL-spaces. J. Math. Anal. Appl. 405(1), 336–341 (2013)

25. Tingley, D.: Isometries of the unit sphere. Geom. Dedicata. 22, 371–378 (1987)

26. Thompson, A.C.: Minkowski geometry. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 63. Cambridge University Press, Cambridge (1996)

27. Zavarzina, O.: EC-plasticity of unit balls and non-expansive bijections. В: Сборник тезисов докладов XIII международной конференции молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», Харьков, 16-17 марта 2018 г.

28. Zavarzina, O.: Expand-contract plasticity of unit balls and related results. В: Збірник тез доповідей XII Літньої школи «Алгебра, Топологія, Аналіз», с. Колочава, Закарпатська область, 10-23 липня 2017 р.

29. Zavarzina, O.: Linear expand-contract plasticity of ellipsoids in separable Hilbert spaces. In: Book of Abstracts of International Conference dedicated to the 70th anniversary of Anatolij Plichko «Banach spaces and their applications», Lviv, 26-29 June, 2019

30. Zavarzina, O.: Linear expand-contract plasticity of ellipsoids in separable Hilbert spaces. Matematychni Studii. 51(1), 86–91 (2019)

31. Zavarzina, O.: Non-expansive bijections and EC-plasticity of the unit balls. In: Book of Abstracts of the XIII-th Summer School «Analysis, topology and applications», Vyzhnytsya, Chernivtsi Region, 29 July – 11 August, 2018

32. Zavarzina, O.: Non-expansive bijections between unit balls of Banach spaces and related problems. In: Book of Abstracts of the XIV-th Summer School «Analysis, topology, algebra and applications», Pidzakharychi, Chernivtsi Region, 10-20 August, 2019

33. Zavarzina, O.: Nonexpansive bijections between unit balls of Banach spaces. Ann. Funct. Anal. 9(2), 271–281 (2018)

34. Zavarzina, O.: Non-expansive bijections between unit balls of Banach spaces. В: Сборник тезисов докладов XII международной конференции молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», Харьков, 25-26 апреля 2017 г.

35. Zavarzina, O.: Plasticity of the unit balls. В: Збірник тез доповідей XIV міжнародної конференції молодих вчених «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях», Харків, 15-16 березня 2019 р.

36. Кадец, В.М.: Банаховы пространства со свойством Даугавета и банаховы пространства с численным индексом 1. Диссертация, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина (2014)

ДОДАТКИ

Додаток А: СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ.

Публікація у науковому фаховому виданні України:

1. Kadets, V., Zavarzina, O.: Plasticity of the unit ball of ℓ_1. Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University Ser. «Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics». 83, 4–9 (2016)

Публікація у науковому виданні України, що входить до міжнародної наукометричної бази:

2. Zavarzina, O.: Linear expand-contract plasticity of ellipsoids in separable Hilbert spaces. Matematychni Studii. 51(1), 86–91 (2019) (Scopus)

Публікації у зарубіжних спеціалізованих виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

3. Kadets, V., Zavarzina, O.: Nonexpansive bijections to the unit ball of the ℓ_1-sum of strictly convex Banach spaces. Bull. Aust. Math. Soc. 97(2), 285–292 (2018) (Scopus)

4. Zavarzina, O.: Nonexpansive bijections between unit balls of Banach spaces. Ann. Funct. Anal. 9(2), 271–281 (2018) (Scopus)

5. Angosto, C., Kadets, V., Zavarzina, O.: Non-expansive bijections, uniformities and polyhedral faces. J. Math. Anal. Appl. 471 (1-2), 38–52 (2019) (Scopus)

6. Kadets, V., Zavarzina, O.: Generalized-lush spaces revisited. Ann. Funct. Anal. 11(2), 244-258 (2020) (Scopus)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації: друковані тези, що опубліковані у матеріалах наукових конференцій:

7. Zavarzina, O.: Non-expansive bijections between unit balls of Banach spaces. В: Сборник тезисов докладов XII международной конференции молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», Харьков, 25-26 апреля 2017 г.

8. Zavarzina, O.: Expand-contract plasticity of unit balls and related results. В: Збірник тез доповідей XII Літньої школи «Алгебра, Топологія, Аналіз», с. Колочава, Закарпатська область, 10-23 липня 2017 р.

9. Zavarzina, O.: EC-plasticity of unit balls and non-expansive bijections. В: Сборник тезисов докладов XIII международной конференции молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», Харьков, 16-17 марта 2018 г.

10. Zavarzina, O.: Non-expansive bijections and EC-plasticity of the unit balls. In: Book of Abstracts of the XIII-th Summer School «Analysis, topology and applications», Vyzhnytsya, Chernivtsi Region, 29 July – 11 August, 2018

11. Zavarzina, O.: Plasticity of the unit balls. В: Збірник тез доповідей XIV міжнародної конференції молодих вчених «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях», Харків, 15-16 березня 2019 р.

12. Zavarzina, O.: Linear expand-contract plasticity of ellipsoids in separable Hilbert spaces. In: Book of Abstracts of International Conference dedicated to the 70th anniversary of Anatolij Plichko «Banach spaces and their applications», Lviv, 26-29 June, 2019

13. Zavarzina, O.: Non-expansive bijections between unit balls of Banach spaces and related problems. In: Book of Abstracts of the XIV-th Summer School «Analysis, topology, algebra and applications», Pidzakharychi, Chernivtsi Region, 10-20 August, 2019

14. Kadets, V., Zavarzina, O.: Some results on GL-spaces, In: Book of Abstracts of International conference dedicated to 70th anniversary of Professor Oleh Lopushansky «Infinite dimensional analysis and topology», Ivano-Frankivsk, 16-20 October, 2019