Лекції з загальної алгебри, 2 курс, 4 семестр, математика, частина 4

Анна Вишнякова

Харківський національний університет ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Лема Бернсайда.

Нехай G – група, $X \neq \emptyset$ – множина, і задано дію групи G на множині X.

Означення. Нерухомими точками елемента $g \in G$ називаються ті $x \in X$, для яких $(g, x) = x$. Множина нерухомих точок елемента g позначається X^g.

Твердження. Кількість пар $(g, x) \in G \times X$, для яких $(g, x) = x$, можна обчислити двома способами:

$$\sum_{x \in X} |\mathrm{St}\,(x)| = \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Лема Бернсайда. Кількість орбіт дії групи G на множині X дорівнює

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|.$$

Доведення. Позначимо кількість орбіт дії групи G на множині X через N. Кожен елемент $x\in X$ належить до орбіти $O(x)$. Очевидно, що $\sum_{y\in O(x)}\frac{1}{|O(x)|}=1$. Тому кількість орбіт можна обчислити за формулою

$$N=\sum_{x\in X}\frac{1}{|O(x)|}=\sum_{x\in X}\frac{|\mathrm{St}\,(x)|}{|G|}=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}|\mathrm{St}\,(x)|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|.$$

Лему доведено. □

Задача Пойя про намиста.
Ми розглянемо конкретний приклад, пропонуємо читачу обміркувати загальний випадок.

Задача. Припустимо, у нас є намистини трьох кольорів, і ми хочемо нанизати намисто із 6 намистин. Питання: скільки різних намист можна зробити, якщо ми вважаємо однаковими намиста, які переводяться один в одне поворотом або перевертанням (осьовою симетрією)?

Розв'язок. Занумеруємо місця для намистин числами від 1 до 6, а кольори намистин буквами a, b, c. Тоді розфарбування намиста – це послідовність $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, де $x_j \in \{a, b, c\}$, $1 \leq j \leq 6$. Відзначимо, що різним розфарбуванням можуть відповідати однакові намиста, наприклад, (a, b, b, b, b, b) і (b, b, b, b, a, b) – різні розфарбування, але однакові намиста.

Позначимо через X множину усіх розфарбувань намист, очевидно, $|X| = 3^6$. На множині X діє група поворотів і осьових симетрій, позначимо цю групу через $G, |G| = 12$.

Ми вважаємо намиста однаковими, якщо вони переводяться одно в одне якимось елементом групи G. Тобто, якщо розглянути довільне розфарбування намиста, то однакові з ним намиста – це орбіта даного розфарбування під дією групи G. Тобто, ми хочемо підрахувати кількість орбіт дії групи G на множині X. Ми будемо користуватися лемою Бернсайда: кількість орбіт дорівнює $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$.

1. Розглянемо $e \in G$, $|X^e| = 3^6$.
Далі будемо розглядати усі 6 поворотів із G.

2. Поворот на $\frac{2\pi}{6}$. При цьому повороті позиція 1 переходить у 2, позиція 2 переходить у 3, і так далі, позиція 5 переходить у 6, позиція 6 переходить у 1. Тобто, якщо намисто не змінюється при цьому повороті, то усі його намистини одного кольору. Оскільки кольорів 3, то таких намист 3.
3. Поворот на $\frac{4\pi}{6}$. При цьому повороті позиція 1 переходить у 3, позиція 3 переходить у 5, позиція 5 переходить у 1. Крім того, позиція 2 переходить у 4, позиція 4 переходить у 6, позиція 6 переходить у 2. Тобто, якщо намисто не змінюється при цьому повороті, то намистини $1, 3, 5$ одного кольору (цей колір обираємо одним з трьох даних), і намистини $2, 4, 6$ одного кольору (цей колір також обираємо одним з трьох даних). Тобто таких намист $3 \times 3 = 9$.

4. Поворот на $\frac{6\pi}{6} = \pi$. При цьому повороті позиція 1 переходить у 4, позиція 4 переходить у 1; позиція 2 переходить у 5, позиція 5 переходить у 2; позиція 3 переходить у 6, позиція 6 переходить у 3. Тобто, якщо намисто не змінюється при цьому повороті, то намистини 1 і 4 одного кольору (цей колір обираємо одним з трьох даних), намистини 2 і 5 одного кольору (цей колір також обираємо одним з трьох даних), а також намистини 2 і 5 одного кольору (і цей колір обираємо одним з трьох даних). Тобто таких намист $3 \times 3 \times 3 = 27$.
5. Поворот на $\frac{8\pi}{6} = 2\pi - \frac{4\pi}{6}$. Тут ситуація така сама, як з поворотом на $\frac{4\pi}{6}$. Таких намист $3 \times 3 = 9$.
6. Поворот на $\frac{10\pi}{6} = 2\pi - \frac{2\pi}{6}$. Тут ситуація така сама, як з поворотом на $\frac{2\pi}{6}$. Таких намист 3.

Зараз будемо розглядати усі 6 симетрій із G.
7, 8, 9. Є три симетрії, вісі яких проходять через дві намистини. Розглянемо, наприклад, симетрію відносно осі, яка проходить через намистини 1 і 4. При цьому намистина 1 переходить сама в себе (її колір можна обрати одним з трьох даних); намистина 4 переходить сама в себе (і її колір можна обрати одним з трьох даних), намистина 2 переходить у 6, намистина 6 переходить у 2 (тобто намистини 2 і 6 одного кольору, і цей колір можна обрати одним з трьох даних); намистина 3 переходить у 5, намистина 5 переходить у 3 (тобто намистини 3 і 5 одного кольору, і цей колір можна обрати одним з трьох даних). Таких намист всього $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$.
10, 11, 12. Є три симетрії, вісі яких проходять через середину відрізків між намистинами.

Розглянемо, наприклад, симетрію відносно осі, яка проходить через середину відрізку між намистинами 1 і 2 і через середину відрізку між намистинами 4 і 5. При цьому намистина 1 переходить у 2, намистина 2 переходить у 1 (тобто намистини 1 і 2 одного кольору, і цей колір можна обрати одним з трьох даних); намистина 3 переходить у 6, намистина 6 переходить у 3 (тобто намистини 3 і 6 одного кольору, і цей колір також можна обрати одним з трьох даних); намистина 4 переходить у 5, намистина 5 переходить у 4 (тобто, і намистини 4 і 5 одного кольору, і цей колір можна також обрати одним з трьох даних). Таких намист всього $3 \times 3 \times 3 = 3^3$.

Проведемо остаточний підрахунок. Кількість намист дорівнює $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g| = \frac{3^6+2\times 3+2\times 9+27+3\times 3^4+3\times 3^3}{12} = 92$.