Лекції з лінійної алгебри, 1 курс, 2 семестр, математика + прикладна математика, частина 4

Анна Вишнякова

Харківський національний університет ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Скалярний добуток.

Нехай L – лінійний простір над полем F, при цьому $F = \mathbb{R} \vee F = \mathbb{C}$.

Означення. Відображення $\langle \cdot, \cdot \rangle \; : \; L \times L \to F$ називається скалярним добутком в L, якщо виконуються наступні три аксіоми:

1. Для кожного $x \in L$ виконується $\langle x, x \rangle \geq 0$, при цьому якщо $\langle x, x \rangle = 0$, то $x = \theta$. (Мається на увазі, що скалярний добуток $\langle x, x \rangle$ є дійсним невід'ємним числом). Ця аксіома називається додатною визначеністю.

2. Для довільних $x, y \in L$ виконується $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (тут риса зверху означає комплексне спряження). Ця аксіома називається ермітовою симетрією.

3. Для довільних $x_1, x_2, y \in L$ і довільних $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ виконується $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle$. Ця аксіома називається лінійністю по першому аргументу.

Означення. Лінійний простір, на якому заданий скалярний добуток, називається евклідовим простором (нагадуємо, що це лінійний простір над полем $F = \mathbb{R} \vee F = \mathbb{C}$).

Протягом нашого курсу будемо позначати евклідів простір буквою E (замість L).

Властивості скалярного добутку.

1. Нехай $x \in E$ – довільний вектор, тоді $\langle \theta, x \rangle = \langle x, \theta \rangle = 0$.
Доведення. Ми маємо $\langle \theta, x \rangle = \langle 1 \cdot \theta + 1 \cdot \theta, x \rangle = 1 \cdot \langle \theta, x \rangle + 1 \cdot \langle \theta, x \rangle = 2\langle \theta, x \rangle \Rightarrow \langle \theta, x \rangle = 0$. Також маємо $\langle x, \theta \rangle = \overline{\langle \theta, x \rangle} = \overline{0} = 0$.
2. Нехай $x, y_1, y_2 \in E$ –довільні вектори і $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ – довільні скаляри. Тоді $\langle x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle = \overline{\langle \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, x \rangle} = \overline{\alpha_1 \langle y_1, x \rangle + \alpha_2 \langle y_2, x \rangle} = \overline{\alpha_1}\,\overline{\langle y_1, x \rangle} + \overline{\alpha_2}\,\overline{\langle y_2, x \rangle} = \overline{\alpha_1} \langle x, y_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle x, y_2 \rangle$.

Ця властивість називається полулінійністю. Тобто, у випадку дійсного поля скалярний добуток є лінійною функцією і по першому, і по другому аргументах, а у випадку комплексного поля скаляри з другого аргументу виносяться із комплексним спряженням (!).

Приклади.

1. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}^n$, задамо скалярний добуток наступною формулою

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Нескладно перевірити, що ця формула задає скалярний добуток (зробіть це!).

2. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{C}^n$, задамо скалярний добуток наступною формулою

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \ldots + x_n\overline{y_n}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Нескладно перевірити, що ця формула задає скалярний добуток (зробіть це!).

Зауваження. Якщо кажуть "евклідів простір $\mathbb{R}^n$," то мається на увазі, що скалярний добуток задається формулою із прикладу 1. Якщо кажуть "евклідів простір $\mathbb{C}^n$," то мається на увазі, що скалярний добуток задається формулою із прикладу 2. Якщо лінійні простори $\mathbb{R}^n$ або $\mathbb{C}^n$ потрібно розглянути з якимось іншим скалярним добутком, то потрібно обов'язково вказати, що розглядається нестандартний скалярний добуток.

3. Нехай $C[0;1]$ – простір дійсних неперервних функцій на відрізку $[0;1]$, задамо скалярний добуток наступною формулою

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx, \quad f, g \in C[0;1].$$

Нескладно перевірити, що ця формула задає скалярний добуток (зробіть це!).

4. Нехай $E = \mathbb{R}^2$, задамо (нестандартний!) скалярний добуток наступною формулою

$$\prec \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \succ = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2, \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Нескладно перевірити, що ця формула задає скалярний добуток (зробіть це!).

Нерівність Коші-Буняковського.

Теорема (Нерівність Коші-Буняковського). Нехай E – евклідів простір. Тоді для довільних $x, y \in E$ виконується

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

(в правій частині стоять невід'ємні корені з дійсних невід'ємних чисел).

Доведення. Якщо $y = \theta$, то нерівність виконується ($0 \leq 0$). Оберемо довільні $x, y \in E$, при цьому $y \neq \theta$. Для довільного $\lambda \in F$ із першої аксіоми скалярного добутку випливає

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \geq 0.$$

Ми маємо

$$\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle x, x+\lambda y\rangle + \langle \lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + \overline{\lambda}\langle x, y\rangle +$$

$$\lambda\langle y, x\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\mathrm{Re}\,(\lambda\langle y, x\rangle) + \lambda\overline{\lambda}\langle y, y\rangle \geq 0.$$

Розглянемо окремо випадки $F = \mathbb{R}$ і $F = \mathbb{C}$.
1. Нехай $F = \mathbb{R}$. Тоді остання нерівність буде мати вигляд: для довільного $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується

$$\langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle \geq 0.$$

Питання: якою функцією від λ є ліва частина нерівності, і за якої умови вказана нерівність може виконуватись для усіх $\lambda \in \mathbb{R}$?

Відповідь: вказана нерівність виконується для усіх $\lambda \in \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли

$$D = 4(\langle x, y\rangle)^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \le 0 \;\Rightarrow\; |\langle x, y\rangle| \le \sqrt{\langle x, x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Для випадку дійсного простору нерівність Коші-Буняковського доведено.

2. Нехай $F = \mathbb{C}$. Ми довели наступну нерівність:

$$\langle x, x\rangle + 2\mathrm{Re}\,(\lambda\langle y, x\rangle) + \lambda\bar{\lambda}\langle y, y\rangle \ge 0.$$

Нехай $\langle y, x\rangle = r(\cos\psi + i\sin\psi),\ r \ge 0, \psi \in \mathbb{R}$. Будемо обирати λ у вигляді $\lambda = t(\cos(-\psi) + i\sin(-\psi))$, де $t \in \mathbb{R}$. Ми маємо

$$2\mathrm{Re}\,(\lambda\langle y,x\rangle) = 2\mathrm{Re}\,(t(\cos(-\psi)+i\sin(-\psi))\cdot r(\cos\psi+i\sin\psi)) =$$

$$2rt\mathrm{Re}\,((\cos(-\psi)+i\sin(-\psi))\cdot(\cos\psi+i\sin\psi)) =$$

$$2rt\mathrm{Re}\,(\cos 0+i\sin 0) = 2rt,$$

крім того

$$\lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2 = |t|^2 = t^2.$$

Отже, ми отримуємо

$$\langle x,x\rangle + 2rt + \langle y,y\rangle t^2 \geq 0$$

для довільного $t \in \mathbb{R}$. Остання нерівність виконується для довільного $t \in \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли

$$D = 4r^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0 \;\Rightarrow$$
$$r = |\langle y, x\rangle| = |\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Отже, і у випадку комплексного простору нерівність Коші-Буняковського доведено. □

Питання. Коли у нерівності Коші-Буняковського досягається рівність?

Приклади.

1. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}^n$. Тоді для довільних наборів дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ виконується

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}.$$

2. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{C}^n$.

Тоді для довільних наборів комплексних чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$, $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ виконується

$$|z_1 w_1 + z_2 w_2 + \ldots + z_n w_n| \leq$$

$$\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2} \cdot \sqrt{|w_1|^2 + |w_2|^2 + \ldots + |w_n|^2}.$$

3. Нехай $C[0;1]$ – простір дійсних неперервних функцій на відрізку $[0;1]$ із скалярним добутком, що від визначений у прикладі 3 вище. Тоді для довільних неперервних функцій $f, g \in C[0;1]$ виконується

$$\left| \int_0^1 f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 g^2(x)dx}.$$

Норма вектора.

Нехай L – лінійний простір над полем F, при цьому $F = \mathbb{R} \ \vee$ $F = \mathbb{C}$.

Означення. Відображення $\|\cdot\| : \ L \to [0; +\infty) \subset \mathbb{R}$ називається нормою в L, якщо виконуються наступні три аксіоми:
1. Для довільного $x \in L$ виконується $\|x\| = 0 \ \Rightarrow \ x = \theta$.
2. Для довільних $x \in L$ і $\lambda \in F$ виконується $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
3. Для довільних $x, y \in L$ виконується $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (ця нерівність називається нерівністю трикутника).

Відзначимо, що з аксіоми 2 випливає, що $x = \theta \ \Rightarrow \ \|x\| = 0$.

Приклади.

1. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $L = \mathbb{R}^n$. Задамо норму наступним чином:

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|.$$

Перевірте, що це є нормою.

2. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $L = \mathbb{R}^n$. Задамо норму наступним чином:

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Перевірте, що це є нормою.

3. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $L = \mathbb{R}^n$. Задамо норму наступним чином:

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|).$$

Перевірте, що це є нормою.

Норма вектора, породжена скалярним добутком.

Теорема. Нехай E – евклідів простір. Тоді формула $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in E$, задає норму в E. Ця норма називається нормою, породженою скалярним добутком.

Доведення. Треба перевірити виконання трьох аксіом норми.
1. Оскільки для довільного $x \in E$ виконується $\langle x, x\rangle \geq 0$, то $\|x\| \geq 0$. Якщо $\|x\| = 0$, то $\langle x, x\rangle = 0$ і, за аксіомою скалярного добутку, $x = \theta$.
2. Для довільних $x \in L$ і $\lambda \in F$ виконується $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle x, x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\|x\|$.
3. Для довільних $x, y \in L$ виконується $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \leq$

$\|x\|^2+2|\langle x,y\rangle|+\|y\|^2 \le \|x\|^2+2\sqrt{\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle}+\|y\|^2 = \|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2$. Тобто, $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$. Ми довели, що вказаний вираз задає норму. □

В подальшому ми у всіх евклідових просторах завжди використовуємо норму, яка породжена скалярним добутком.

Ортонормовані системи векторів.

Нехай E – евклідів простір.

Означення. Вектори $x, y \in E$ називаються ортогональними, якщо $\langle x, y\rangle = 0$.

Твердження. Нехай E – евклідів простір, $x_1, x_2, \ldots, x_m \in E$ – попарно ортогональні ненульові вектори, тобто $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ при $i \ne j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, і $x_j \ne \theta$ при усіх $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Тоді вектори $x_1, x_2, \ldots, x_m$ є лінійно незалежними.

Доведення. Нехай $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_m x_m = \theta$. Оберемо довільне $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ і помножимо попередню рівність скалярно на x_j. Ми маємо

$$\langle \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_m x_m, x_j \rangle = \langle \theta, x_j \rangle = 0 \ \Rightarrow$$

$$\mu_1 \langle x_1, x_j \rangle + \mu_2 \langle x_2, x_j \rangle + \ldots + \mu_m \langle x_m, x_j \rangle = 0 \ \Rightarrow \mu_j \langle x_j, x_j \rangle = 0.$$

Оскільки за умовою $x_j \neq \theta$, ми отримуємо $\langle x_j, x_j \rangle \neq 0$, отже $\mu_j = 0$ при усіх $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Ми довели, що вектори $x_1, x_2, \ldots, x_m$ є лінійно незалежними. $\square$

Означення. Система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_m \in E$ називається ортонормованою, якщо $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ при $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ і $\langle x_j, x_j \rangle = 1$ при усіх $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ (тобто ці вектори є попарно ортогональними і норма кожного вектора дорівнює одиниці).

Ми довели, що ортонормовані системи є лінійно незалежними. Ми хочемо побудувати ортонормований базис евклідового простору.

Теорема (Процес ортогоналізації Грама-Шмідта). Нехай E – евклідів простір, і система векторів $y_1, y_2, \dots, y_m \in E$ є лінійно незалежною. Тоді існує ортонормована система векторів $u_1, u_2, \dots, u_m \in E$, така що для кожного $j = 1, 2, \dots, m$ виконується $\mathrm{Lin}\,\{y_1, y_2, \dots, y_j\} = \mathrm{Lin}\,\{u_1, u_2, \dots, u_j\}$.

Доведення. Ми приведемо алгоритм побудови потрібної ортонормованої системи.

1. Для $j = 1$. Нам потрібно побудувати вектор u_1, такий що $\|u_1\| = 1$ і $\mathrm{Lin}\,\{y_1\} = \mathrm{Lin}\,\{u_1\}$. Покладемо $u_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$ (оскільки $y_1, y_2, \dots, y_m$ є лінійно незалежними, то $y_1 \neq \theta$, звідки $\|y_1\| \neq 0$). Ми маємо $\|u_1\| = \frac{1}{\|y_1\|} \cdot \|y_1\| = 1$. Крім того,

$\mathrm{Lin}\ \{y_1\} = \{\alpha y_1 \mid \alpha \in F\} = \{\alpha\|y_1\|u_1 \mid \alpha \in F\ \} = \{\beta u_1 \mid \beta \in F\ \} = \mathrm{Lin}\ \{u_1\}$.

2. Отже, вектор u_1 вже побудовано. Нам потрібно побудувати вектор u_2, такий що $\langle u_2, u_1\rangle = 0$, $\|u_2\| = 1$ і $\mathrm{Lin}\ \{y_1, y_2\} = \mathrm{Lin}\ \{u_1, u_2\}$. Покладемо $\tilde{u_2} = y_2 + \lambda u_1$ і будемо обирати $\lambda \in F$ із умови $\langle \tilde{u_2}, u_1\rangle = 0$. Ми маємо $\langle \tilde{u_2}, u_1\rangle = \langle y_2 + \lambda u_1, u_1\rangle = \langle y_2, u_1\rangle + \lambda\langle u_1, u_1\rangle = \langle y_2, u_1\rangle + \lambda = 0$, звідки маємо $\lambda = -\langle y_2, u_1\rangle$. Зафіксуємо це значення λ. Відмітимо, що $\tilde{u_2} = y_2 + \lambda \frac{y_1}{\|y_1\|} \neq \theta$ (нетривіальна лінійна комбінація лінійно незалежних векторів y_1, y_2). Покладемо $u_2 = \frac{\tilde{u_2}}{\|\tilde{u_2}\|}$. Очевидно, що $\langle u_2, u_1\rangle = 0$, $\|u_2\| = 1$. Крім того, ми маємо $u_1 \in \mathrm{Lin}\ \{y_1\} \subset \mathrm{Lin}\ \{y_1, y_2\}$, $u_2 \in \mathrm{Lin}\ \{y_1, y_2\}$. Звідки отримуємо $\mathrm{Lin}\ \{u_1, u_2\} \subset \mathrm{Lin}\ \{y_1, y_2\}$. А оскільки вектори u_1, u_2 є лінійно незалежними (як ортонормована система), ми отримуємо $\mathrm{Lin}\ \{y_1, y_2\} = \mathrm{Lin}\ \{u_1, u_2\}$.

3. Нехай вже побудовані вектори $u_1, u_2, \ldots, u_s, \quad s < m$, вони утворюють ортонормовану систему і для кожного $j = 1, 2, \ldots, s$ виконується $\mathrm{Lin}\,\{y_1, y_2, \ldots, y_j\} = \mathrm{Lin}\,\{u_1, u_2, \ldots, u_j\}$. Нам потрібно побудувати вектор u_{s+1}. Покладемо $\tilde{u}_{s+1} = y_{s+1} + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_s u_s$ і будемо обирати $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in F$ із наступної системи умов: для кожного $j = 1, 2, \ldots, s$ виконується $\langle \tilde{u}_{s+1}, u_j \rangle = 0$. Ми маємо

$$\langle \tilde{u}_{s+1}, u_j \rangle = \langle y_{s+1} + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_s u_s, u_j \rangle =$$

$$\langle y_{s+1}, u_j \rangle + \lambda_1 \langle u_1, u_j \rangle + \lambda_2 \langle u_2, u_j \rangle + \ldots + \lambda_s \langle u_s, u_j \rangle =$$

$$\langle y_{s+1}, u_j \rangle + \lambda_j = 0.$$

Отже, для кожного $j = 1, 2, \ldots, s$ покладемо $\lambda_j = -\langle y_{s+1}, u_j \rangle$. Тобто, для кожного $j = 1, 2, \ldots, s$ виконується $\langle \tilde{u}_{s+1}, u_j \rangle = 0$.

Ми маємо: $u_1 \in \mathrm{Lin}\,\{y_1\}$, $u_2 \in \mathrm{Lin}\,\{y_1, y_2\}, \ldots, u_s \in \mathrm{Lin}\,\{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$, звідки за побудовою $\tilde{u}_{s+1} \in \mathrm{Lin}\,\{y_1, y_2, \ldots, y_s, y_{s+1}\}$. При цьому за побудовою $\tilde{u}_{s+1} \neq \theta$ (як нетривіальна лінійна комбінація лінійно незалежних векторів $y_1, y_2, \ldots, y_s, y_{s+1}$). Покладемо $u_{s+1} = \frac{\tilde{u}_{s+1}}{\|\tilde{u}_{s+1}\|}$. Тоді для кожного $j = 1, 2, \ldots, s$ виконується $\langle u_{s+1}, u_j\rangle = 0$ і $\|u_{s+1}\| = 1$, тобто $u_1, u_2, \ldots, u_s, u_{s+1}$ – ортонормована система векторів. За побудовою ми маємо

$$u_1, u_2, \ldots, u_s, u_{s+1} \in \mathrm{Lin}\,\{y_1, y_2, \ldots, y_s, y_{s+1}\} \;\Rightarrow$$

$$\mathrm{Lin}\,\{u_1, u_2, \ldots, u_s, u_{s+1}\} \subset \mathrm{Lin}\,\{y_1, y_2, \ldots, y_s, y_{s+1}\}.$$

Оскільки система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_s, u_{s+1}$ є ортонормованою системою, вона є лінійно незалежною системою векторів, звідки

$$\mathrm{Lin}\,\{u_1, u_2, \ldots, u_s, u_{s+1}\} = \mathrm{Lin}\,\{y_1, y_2, \ldots, y_s, y_{s+1}\}.$$

Тобто за m кроків ми побудуємо потрібну ортонормовану систему векторів. $\square$

Ортонормовані базиси скінченновимірного евклідового простору.

Простим наслідком теореми Грама-Шмідта є наступне твердження.

Твердження. Нехай E – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$. Тоді існує $u_1, u_2, \dots, u_n$ – ортонормований базис E.

Для доведення твердження потрібно взяти довільний базис простору E і провести процес ортогоналізації.

Твердження. Нехай E – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $u_1, u_2, \dots, u_n$ – ортонормований базис E. Тоді для кожного вектора $x \in E$ виконується $x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j \rangle u_j$.

Доведення. Нехай $x \in E$ – довільний вектор. Розкладемо його за базисом $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Ми маємо $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n$, де $x_1, \ldots, x_n \in F$. Для довільного $j = 1, 2, \ldots, n$ помножимо цю рівність скалярно на u_j, отримуємо

$$\langle x, u_j \rangle = \langle x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n, u_j \rangle = x_1 \langle u_1, u_j \rangle +$$

$$x_2 \langle u_2, u_j \rangle + \ldots + x_n \langle u_n, u_j \rangle = x_j.$$

Твердження доведено. □

Твердження. Нехай E – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – ортонормований базис E. Нехай $x, y \in E$ – довільні вектори, позначимо $x_u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y_u = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ Тоді $\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y}_1 + x_2 \overline{y}_2 + \ldots + x_n \overline{y}_n$.

Доведення.

$$\langle x, y\rangle = \langle x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n, y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_nu_n\rangle =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle x_iu_i, y_ju_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\overline{y}_j\langle u_i, u_j\rangle = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \ldots + x_n\overline{y}_n.$$

Твердження доведено. □

Ортогональне доповнення до підпростору.

Нехай E – евклідів простір, $U < E$ – підпростір E.

Означення. Ортогональним доповненням до U називається $U^{\perp} = \{x \in E \mid \forall y \in U \ \langle x, y\rangle = 0\} \subset E$.

Твердження. Нехай E – евклідів простір, $U < E$. Тоді $U^{\perp} < E$.

Доведення. Нехай $x_1, x_2 \in U^{\perp}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in F$. Для довільного $y \in U$ маємо

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle = 0.$$

Отже, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in U^{\perp}$. □

Теорема. Нехай E – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, і $U < E$. Тоді $U \oplus U^{\perp} = E$.

Доведення. Якщо $U = \{\theta\}$, то, очевидно, $U^{\perp} = \{\theta\}^{\perp} = E$, тому виконується $U \oplus U^{\perp} = \{\theta\} \oplus E = E$.
Якщо $U = E$, то $U^{\perp} = E^{\perp} = \{\theta\}$ (доведіть це!), тому виконується $U \oplus U^{\perp} = E \oplus \{\theta\} = E$.

Припустимо тепер, що $\dim U = m$, $1 \le m < n$. Виберемо $e_1, e_2, \ldots, e_m$ – довільний базис U. Доповнимо його до базису всього простору, нехай $e_1, e_2, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n$ – базис E. Проведемо процес ортогоналізації над системою векторів $e_1, e_2, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n$, отримуємо ортонормовану систему векторів $u_1, u_2, \ldots, u_n$, таку що для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$ виконується $\mathrm{Lin}\,\{e_1, e_2, \ldots, e_j\} = \mathrm{Lin}\,\{u_1, u_2, \ldots, u_j\}$. Зокрема, $U = \mathrm{Lin}\,\{e_1, e_2, \ldots, e_m\} = \mathrm{Lin}\,\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, тобто $u_1, u_2, \ldots, u_m$ – ортонормований базис U.
Позначимо через $V := \mathrm{Lin}\,\{u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots, u_n\}$, тоді нам відомо, що $U \oplus V = E$. Доведемо, що $V = U^{\perp}$. Нехай $x \in U^{\perp}$– довільний вектор $U^{\perp}$, розкладемо його за базисом простору: $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n$, $x_1, \ldots, x_n \in F$. Тоді для довільного $y \in U$ маємо $\langle x, y \rangle = 0$. Оскільки для довільного $j = 1, 2, \ldots, m$ маємо $u_j \in U$, ми отримуємо

$\langle x, u_j\rangle = \langle x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n, u_j\rangle = x_1\langle u_1, u_j\rangle + x_2\langle u_2, u_j\rangle + \ldots + x_n\langle u_n, u_j\rangle = x_j = 0$ для усіх $j = 1, 2, \ldots, m$. Тобто, $x = x_{m+1}u_{m+1} + x_{m+2}u_{m+2} + \ldots + x_n u_n \in V$. Ми довели, що $U^\perp \subset V$.

Доведемо оборотне включення. Нехай $x \in V$– довільний вектор V. Тоді, за означенням V, маємо $x = x_{m+1}u_{m+1} + x_{m+2}u_{m+2} + \ldots + x_n u_n$, де $x_{m+1}, x_{m+2} \ldots, x_n \in F$. Розглянемо довільний $y \in U$, тоді $y = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \ldots + y_m u_m$, де $y_1, y_2 \ldots, y_m \in F$. Оскільки $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – ортонормований базис E, ми маємо $\langle x, y\rangle = \langle x_{m+1}u_{m+1} + x_{m+2}u_{m+2} + \ldots + x_n u_n, y_1 u_1 + y_2 u_2 + \ldots + y_m u_m\rangle = 0$, тобто $x \in U^\perp$. Отже, $V \subset U^\perp$.

Ми довели, що $U^\perp = V$, звідки $U \oplus U^\perp = E$. $\square$

Сформулюємо декілька властивостей ортогонального доповнення.
1. $E^{\perp} = \{\theta\}, \{\theta\}^{\perp} = E$.
2. $(U^{\perp})^{\perp} = U$ для довільного $U < E$.
3. $(U + V)^{\perp} = U^{\perp} \cap V^{\perp}$ для довільних $U, V < E$.
4. $(U \cap V)^{\perp} = U^{\perp} + V^{\perp}$ для довільних $U, V < E$.
Доведіть ці властивості самостійно.

Лінійні функціонали в евклідових просторах.

Нехай L – лінійний простір над полем F.

Означення. Функція $f: L \to F$ називається лінійним функціоналом в L, якщо для довільних $x_1, x_2 \in L$ і довільних $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ виконується $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$.

Теорема про загальний вигляд лінійного функціонала в евклідовому просторі. Нехай E – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $f: E \to F$ – лінійний функціонал в E. Тоді $\exists! y \in E: \forall x \in E \quad f(x) = \langle x, y \rangle$. І навпаки, для довільного $z \in E$ функція $f: E \to F$, яка задається формулою $f(x) = \langle x, z \rangle$, є лінійним функціоналом в E.

Доведення. Той факт, що для довільного $z \in E$ функція $f: E \to F$, яка задається формулою $f(x) = \langle x, z \rangle$, є лінійним функціоналом в E, є очевидним (доведіть це).

Нехай $f: E \to F$ – лінійний функціонал в E. Нехай $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – ортонормований базис простору E. Розглянемо вектор

$$y := \overline{f(u_1)}\, u_1 + \overline{f(u_2)}\, u_2 + \ldots + \overline{f(u_n)}\, u_n \in E.$$

Нехай $x \in E$ – довільний вектор, запишемо його розкладання в базисі $u_1, u_2, \ldots, u_n$, нехай $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n$, де $x_1, \ldots, x_n \in F$. Тоді маємо

$$f(x) = f(x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n) =$$

$$x_1 f(u_1) + x_2 f(u_2) + \ldots + x_n f(u_n) = \langle x, y \rangle$$

за формулою скалярного добутку векторів через їх координати в ортонормованому базисі.

Тобто, ми довели існування потрібного вектора y.

Доведемо єдиність. Нехай є вектор $y \in E: \ \forall x \in E \quad f(x) = \langle x, y \rangle$, а також є ще один вектор $z \in E: \forall x \in E \quad f(x) = \langle x, z \rangle$. Тоді ми маємо

$$\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle \quad \forall x \in E \ \Rightarrow \langle x, y - z \rangle = 0 \quad \forall x \in E$$

Покладемо $x = y - z$. Тоді ми маємо $\langle y - z, y - z \rangle = 0 \;\Rightarrow\; y - z = \theta \;\Rightarrow\; y = z$. Єдиність доведено. $\square$