Лекції з лінійної алгебри, 1 курс, 2 семестр, математика + прикладна математика, частина 1

Анна Вишнякова

Харківський національний університет ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Вимірність лінійної оболонки

Теорема. Нехай L – лінійний простір над полем F, $n = \dim L \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \dots, x_m \in L \quad (m \in \mathbb{N})$. Тоді

$$\dim \mathrm{Lin}\,\{x_1, x_2, \dots, x_m\} = \mathrm{rg}\,\{x_1, x_2, \dots, x_m\}.$$

Доведення. Позначимо $r := \mathrm{rg}\,\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $r = 0, 1, 2, \dots$

1. $r = 0 \Leftrightarrow x_1 = \theta, x_2 = \theta, \dots, x_m = \theta \Leftrightarrow \mathrm{Lin}\,\{x_1, x_2, \dots, x_m\} = \{\theta\} \Leftrightarrow \dim \mathrm{Lin}\,\{x_1, x_2, \dots, x_m\} = 0$.
2. $r \in \mathbb{N}$. Не зменшуючи загальності, $x_1, x_2, \dots, x_r$ – лінійно незалежні. Тоді для кожного $j = r+1, r+2, \dots, m$ система $x_1, x_2, \dots, x_r, x_j$ є лінійно залежною.

Звідки для для кожного $j = r+1, r+2, \ldots, m$ знайдуться скаляри $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{rj} \in F$, такі що

$$x_j = \alpha_{1j}x_1 + \alpha_{2j}x_2 \ldots + \alpha_{rj}x_r.$$

Розглянемо довільний вектор $y \in \mathrm{Lin}\,\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Маємо:

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \ldots + \beta_m x_m =$$

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \ldots + \beta_r x_r +$$

$$\beta_{r+1}(\alpha_{1,r+1}x_1 + \alpha_{2,r+1}x_2 \ldots + \alpha_{r,r+1}x_r) +$$

$$\beta_{r+2}(\alpha_{1,r+2}x_1 + \alpha_{2,r+2}x_2 \ldots + \alpha_{r,r+2}x_r) + \ldots +$$

$$\beta_m(\alpha_{1,m}x_1 + \alpha_{2,m}x_2 \ldots + \alpha_{r,m}x_r).$$

Після приведення подібних і переозначення коефіцієнтів маємо

$$y = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 \ldots + \gamma_r x_r.$$

Тобто, кожен вектор з лінійної оболонки є лінійною комбінацією векторів $x_1, x_2, \ldots, x_r$. З теоремою Гауса, серед векторів лінійної оболонки не більше за r лінійно незалежних. Вектори $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – лінійно незалежні, тобто вони є базисом лінійної оболонки.
Ми довели, що

$$\dim \mathrm{Lin}\,\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} = \mathrm{rg}\,\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}.$$

□

Доповнення лінійно незалежної системи векторів до базису

Теорема (про доповнення лінійно незалежної системи векторів до базису простору). Нехай L – лінійний простір над полем F, $n = \dim L \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_m \in L$ – лінійно незалежна система векторів, $m < n$. Тоді існують вектори $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n \in L$, такі що $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ є базисом простору L.

Доведення. Розглянемо $U := \mathrm{Lin}\,\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} < L$. Як доведено, $\dim U = m < n$, звідки $U \neq L$. Отже, існує $x_{m+1} \in L \setminus U$. Перевіримо, що система $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}$ є лінійно незалежною.

Припустимо, що $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \ldots + \alpha_m x_m + \alpha_{m+1} x_{m+1} = \theta$.

Якщо $\alpha_{m+1} \neq 0$, то $x_{m+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}} x_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{m+1}} x_2 - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}} x_m \in U$ що неможливо за вибором x_{m+1}. Отже, $\alpha_{m+1} = 0$, звідки $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \ldots + \alpha_m x_m = \theta$, і ми маємо $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$ за умовою. Тобто, система $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}$ є лінійно незалежною.

Міркуючи аналогічно, ми виберемо потрібні вектори $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$. $\square$

Сума і перетин лінійних підпросторів

Нехай L – лінійний простір над полем F, $n = \dim L \in \mathbb{N}$, $U < L, V < L$.

Означення. Сума лінійних підпросторів

$$U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}.$$

Перетин лінійних підпросторів

$$U \cap V = \{x \mid x \in U \wedge x \in V\}.$$

Твердження. Нехай $U < L, V < L$. Тоді $U + V < L, U \cap V < L$.

Доведення. 1. Нехай $x, y \in U + V, \lambda, \mu \in F$. Маємо $x, y \in U + V \Leftrightarrow \exists u_1, u_2 \in U, v_1, v_2 \in V : x = u_1 + v_1, y = u_2 + v_2$. Звідки отримуємо $\lambda x + \mu y = (\lambda u_1 + \mu u_2) + (\lambda v_1 + \mu v_2) \in U + V$.

2. Нехай $x, y \in U \cap V, \lambda, \mu \in F$. Маємо $x, y \in U \wedge x, y \in V \Rightarrow \lambda x + \mu y \in U \wedge \lambda x + \mu y \in V \Rightarrow \lambda x + \mu y \in U \cap V$. $\square$

Задача. 1. Нехай L – лінійний простір над полем F, $U < L$, $V < L$. Тоді $U \cup V < L \Rightarrow U \subset V \quad \bigvee \quad V \subset U$.

2. Нехай L – лінійний простір над полем F, поле F містить нескінчену кількість елементів, $n \in \mathbb{N}$, $U_1 < L, U_2 < L, \dots, U_n < L$. Тоді

$$\cup_{j=1}^{n} U_j < L \Rightarrow \exists k = 1, 2, \dots, n : \quad U_k = \cup_{j=1}^{n} U_j.$$

Уточніть це твердження, вказавши зв'язок між n і кількістю елементів в полі F, при якому виконується останнє твердження.

Теорема (формула Грассмана) Нехай L – лінійний простір над полем F, $n = \dim L \in \mathbb{N}$, $U < L, V < L$. Тоді $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim U \cap V$.

Доведення. Розглянемо $U \cap V < L$. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – базис $U \cap V$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$, при цьому, якщо $U \cap V = \{\theta\}$, то $m = 0$). Тобто, $\dim(U \cap V) = m$.

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ – лінійно незалежна система в $U \cap V < U$. Доповнимо її до базису U. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_k$ – базис U ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Тобто, $\dim U = m + k$.

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ – лінійно незалежна система в $U \cap V < V$. Доповнимо її до базису V. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_m, z_1, z_2, \ldots, z_l$ – базис V ($l = 0, 1, 2, \ldots$). Тобто, $\dim V = m + l$.

Ми доведемо, що $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_k, z_1, z_2, \ldots, z_l$ – базис $U+V$. Тобто, $\dim(U+V) = m+k+l$. Якщо ми це доведемо, то отримуємо

$$\dim(U+V) = m+k+l = (m+k)+(m+l)-m$$

$$= \dim U + \dim V - \dim(U \cap V),$$

тобто доведемо формулу Грассмана.

Перевіримо, що система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_k$, $z_1, z_2, \ldots, z_l$ є лінійно незалежною. Нехай

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \ldots + \alpha_m x_m + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_k y_k + \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \ldots + \gamma_l z_l = \theta. \tag{1}$$

Перепишемо у вигляді $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \ldots + \alpha_m x_m + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_k y_k = -\gamma_1 z_1 - \gamma_2 z_2 - \ldots - \gamma_l z_l$. Ліва частина рівності є вектором з підпростору U (розкладена за базисом U), права частина рівності є вектором з підпростору V (розкладена за базисом V). Тобто, обидві частини (які є рівними) є вектором перетину $U \cap V$. Розкладемо ліву частину за базисом перетину:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \ldots + \alpha_m x_m + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_k y_k =$$

$$\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 \ldots + \delta_m x_m \Leftrightarrow$$

$$(\alpha_1 - \delta_1) x_1 + (\alpha_2 - \delta_2) x_2 \ldots + (\alpha_m - \delta_m) x_m + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_k y_k = \theta.$$

Оскільки $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_k$ – лінійно незалежні (базис U), то усі коефіцієнти дорівнюють нулю, зокрема $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$.

Підставляючи в (1), отримуємо

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \ldots + \alpha_m x_m + \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \ldots + \gamma_l z_l = \theta.$$

Оскільки $x_1, x_2, \ldots, x_m, z_1, z_2, \ldots, z_l$ – лінійно незалежні (базис V), то усі коефіцієнти дорівнюють нулю:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_l = 0.$$

Ми довели, що система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_k,$ $z_1, z_2, \ldots, z_l$ є лінійно незалежною.

Доведемо, що ця система є базисом $U + V$. Нехай $w \in U + V$. Тоді $w = u + v$, де $u \in U, v \in V$. Маємо

$$u = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m + \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \ldots + \mu_k y_k;$$

$$v = \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \ldots + \nu_m x_m + \xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \ldots + \xi_l z_l.$$

Звідки

$$w = u + v = (\lambda_1 + \nu_1)x_1 + (\lambda_2 + \nu_2)x_2 + \ldots + (\lambda_m + \nu_m)x_m +$$

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \ldots + \mu_k y_k + \xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \ldots + \xi_l z_l.$$

Ми довели, що система векторів $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_k$, $z_1, z_2, \ldots, z_l$ є базисом $U + V$. $\square$

Пряма сума підпросторів. Доповнення підпростору, пряме доповнення. Нехай L – лінійний простір над полем F, $n = \dim L \in \mathbb{N}$, $U < L$, $V < L$.

Означення. Сума підпросторів U, V називається прямою сумою, якщо $U \cap V = \{\theta\}$. Позначення прямої суми $U \oplus V$.

Тобто, запис $W = U \oplus V$ означає, що $W = U + V$ і $U \cap V = \{\theta\}$.

Означення. Підпростір V називається доповненням підпростору U, якщо $U + V = L$. Підпростір V називається прямим доповненням підпростору U, якщо $U \oplus V = L$.

Твердження. Нехай $U < L, V < L$, $W = U + V$. Тоді $W = U \oplus V \Leftrightarrow \forall w \in W\ \exists!(u, v), u \in U, v \in V : w = u + v$.

Доведення. $\Rightarrow$ Оскільки $W = U + V$, то $\forall w \in W\ \exists(u, v), u \in U, v \in V : w = u + v$. Доведемо єдиність. Нехай $w \in W$, $w = u_1 + v_1, w = u_2 + v_2, u_1, u_2 \in U, v_1, v_2 \in V$. Маємо $u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \Rightarrow u_1 - u_2 = v_2 - v_1$. Вектор в лівій частині рівності належить до U в правій – до V. Тобто $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 \in U \cap V = \{\theta\}$. Робимо висновок, що $u_1 = u_2, v_1 = v_2$.

$\Leftarrow$ Маємо за умовою $W = U + V$. Треба довести, що $U \cap V = \{\theta\}$. Нехай $z \in U \cap V$. Тоді $z = z + \theta, z \in U, \theta \in V$, і $z = \theta + z, \theta \in U, z \in V$. Із єдиності $z = \theta$. $\square$

Твердження (існування прямого доповнення). Нехай $U < L$. Тоді існує $V < L$ таке що $U \oplus V = L$.

Доведення. Якщо $U = \{\theta\}$, то можемо взяти $V = L$. Якщо $U = L$, то можемо взяти $V = \{\theta\}$. У випадку $1 \leq \dim U < \dim L$, розглянемо $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – довільний базис U і доповнимо його до базису L. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – базис L. $V := \mathrm{Lin}\,\{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n\} < L$. Доведемо, що $U \oplus V = L$.

Для кожного $x \in L$ маємо розкладання за базисом $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m) + (\alpha_{m+1} x_{m+1} + \alpha_{m+2} x_{m+2} + \ldots + \alpha_n x_n) =: u + v$, де за означенням $u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m \in U$, $v = \alpha_{m+1} x_{m+1} + \alpha_{m+2} x_{m+2} + \ldots + \alpha_n x_n \in V$. Тобто, $U + V = L$.

Нехай $z \in U \cap V \Leftrightarrow z \in U \wedge z \in V \Leftrightarrow z = \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \ldots + \nu_m x_m \wedge z = \nu_{m+1} x_{m+1} + \nu_{m+2} x_{m+2} + \ldots + \nu_n x_n$. Отже, $\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \ldots + \nu_m x_m - \nu_{m+1} x_{m+1} - \nu_{m+2} x_{m+2} - \ldots - \nu_n x_n = \theta$. Оскільки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – базис L, тобто лінійно незалежна система, маємо $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_n = 0$, отже $z = \theta$, і $U \cap V = \{\theta\}$. Ми отримали $U \oplus V = L$.

$\square$

Операції над матрицями. Нехай F – довільне поле, $m, n \in \mathbb{N}$ – задані числа. Позначимо через $Mat(m \times n, F)$ множину матриць розміру $m \times n$ з елементами з поля F.

Якщо $A, B \in Mat(m \times n, F)$,

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m, \\ j=1,\dots,n}} \quad B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m, \\ j=1,\dots,n}}$$

то визначено додавання таких матриць:

$$C = A+B, \quad C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m, \\ j=1,\dots,n}} \quad c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Очевидно, що операція додавання матриць фіксованого розміру є асоціативною, комутативною, має нейтральний елемент (нульову матрицю, тобто матрицю з усіма нульовими елементами) і у кожної матриці є обернена за додаванням. Тобто, $Mat(m \times n, F)$ є абелевою групою за додаванням.

Якщо $A \in Mat(m \times n, F)$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m, \\ j=1,\dots,n}}$ $\lambda \in F$, то задана операція множення матриці на число з поля:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m. \\ j=1,\dots,n}}$$

Перевірте, що множина матриць $Mat(m \times n, F)$ з операціями додавання і множення на число є лінійним простором, і знайдіть вимірність цього простору.

Множення матриць.
Нехай задані числа $n, m, k \in \mathbb{N}$, і задані дві матриці $A \in Mat(m \times n, F)$, $B \in Mat(n \times k, F)$.

Означення. Добутком двох матриць $A \in Mat(m \times n, F)$ і $B \in Mat(n \times k, F)$ називається матриця $C = (c_{ij}) \in Mat(m \times k, F)$, така що

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}, \quad i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., k.$$

Пишуть $C = AB$, або $C = A \cdot B$.

Властивості множення матриць.
1. Нехай задані три довільні матриці $A \in Mat(m \times n, F)$, $B \in Mat(n \times k, F)$, $C \in Mat(k \times t, F)$. Тоді

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Зокрема, множення квадратних матриць фіксованого розміру є асоціативним.
Завдання: провести детальне доведення цієї властивості.

2. Нехай $A \in Mat(m \times n, F)$ і $B \in Mat(n \times k, F)$. Чи є вірним, що $A \cdot B = B \cdot A$? По-перше, якщо існує $B \cdot A$, то $k = m$, тобто $A \in Mat(m \times n, F)$, $B \in Mat(n \times m, F)$. По-друге, $A \cdot B \in Mat(m \times m, F)$, а $B \cdot A \in Mat(n \times n, F)$, тобто, якщо ці матриці є рівними, то $n = m$, тобто досліджувати питання комутативності множення матриць має сенс тільки для квадратних матриць.

Легко перевірити, що для $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, множення як операція на множині $Mat(n \times n, F)$ не є комутативним.

Наведемо приклад для $n = 2$. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Тоді ми маємо

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix},$$

і

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, $A \cdot B \neq B \cdot A$. Наведіть самостійно аналогічний приклад для довільного $n \geq 3$.

3. Нейтральний елемент для операції множення на множині $Mat(n \times n, F)$. Легко перевірити, що матриця

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Mat(n \times n, F)$$

є нейтральним елементом для множення на $Mat(n \times n, F)$, тобто для довільної $A \in Mat(n \times n, F)$ виконується $A \cdot I = I \cdot A = A$.

Перевіримо це. Нехай $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ – довільна матриця розміру $n \times n$ з елементами з поля F. Нехай $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n} := A \cdot I$. Зафіксуємо довільні $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Оскільки j-й стовпчик матриці I має нулі на усіх місцях окрім j-го (а на j-му місці j-го стовпчика стоїть одиниця), ми маємо

$$b_{ij} = a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + \dots + a_{i,j-1} \cdot 0 + a_{ij} \cdot 1 +$$

$$a_{i,j+1} \cdot 0 + \dots + a_{in} \cdot 0 = a_{ij}.$$

Тобто $b_{ij} = a_{ij}$ для усіх $i, j \in \{1, \dots, n\}$, звідки $B = A \cdot I = A$. Аналогічно перевіряємо, що для довільної $A \in Mat(n \times n, F)$ виконується $I \cdot A = A$.

Теорема про визначник добутку матриць.

4. Після дослідження питання про існування нейтрального елемента нам потрібно дослідити питання, чи для кожного (окрім нульового) елемента множини $Mat(n \times n, F)$ є обернений за множенням. Але поки ми не можемо відповісти на це питання, ми відповімо на нього пізніше.

Теорема про визначник добутку матриць. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $A \in Mat(n \times n, F)$ і $B \in Mat(n \times n, F)$ – довільні матриці. Тоді

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Доведення. Нехай $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ і $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ – довільні матриці розміру $n \times n$ з елементами з поля F. Ми маємо

$$\det(A \cdot B) =$$

$$\det \begin{pmatrix} \sum_{i_1=1}^{n} a_{1,i_1} b_{i_1,1} & \sum_{i_1=1}^{n} a_{1,i_1} b_{i_1,2} & \cdots & \sum_{i_1=1}^{n} a_{1,i_1} b_{i_1,n} \\ \sum_{i_2=1}^{n} a_{2,i_2} b_{i_2,1} & \sum_{i_2=1}^{n} a_{2,i_2} b_{i_2,2} & \cdots & \sum_{i_2=1}^{n} a_{2,i_2} b_{i_2,n} \\ \sum_{i_3=1}^{n} a_{3,i_3} b_{i_3,1} & \sum_{i_3=1}^{n} a_{3,i_3} b_{i_3,2} & \cdots & \sum_{i_3=1}^{n} a_{3,i_3} b_{i_3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i_n=1}^{n} a_{n,i_n} b_{i_n,1} & \sum_{i_n=1}^{n} a_{n,i_n} b_{i_n,2} & \cdots & \sum_{i_n=1}^{n} a_{n,i_n} b_{i_n,n} \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\sum_{i_3=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n}\det\begin{pmatrix} a_{1,i_1}b_{i_1,1} & a_{1,i_1}b_{i_1,2} & \cdots & a_{1,i_1}b_{i_1,n} \\ a_{2,i_2}b_{i_2,1} & a_{2,i_2}b_{i_2,2} & \cdots & a_{2,i_2}b_{i_2,n} \\ a_{3,i_3}b_{i_3,1} & a_{3,i_3}b_{i_3,2} & \cdots & a_{3,i_3}b_{i_3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,i_n}b_{i_n,1} & a_{n,i_n}b_{i_n,2} & \cdots & a_{n,i_n}b_{i_n,n} \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\sum_{i_3=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{1,i_1}a_{2,i_2}a_{3,i_3}\cdot\ldots\cdot a_{n,i_n}\det\begin{pmatrix} b_{i_1,1} & b_{i_1,2} & \cdots & b_{i_1,n} \\ b_{i_2,1} & b_{i_2,2} & \cdots & b_{i_2,n} \\ b_{i_3,1} & b_{i_3,2} & \cdots & b_{i_3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i_n,1} & b_{i_n,2} & \cdots & b_{i_n,n} \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{\sigma=\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{smallmatrix}\right)\in S_n} a_{1,i_1}a_{2,i_2}a_{3,i_3}\cdot\ldots\cdot a_{n,i_n}\det\begin{pmatrix} b_{i_1,1} & b_{i_1,2} & \cdots & b_{i_1,n}\\ b_{i_2,1} & b_{i_2,2} & \cdots & b_{i_2,n}\\ b_{i_3,1} & b_{i_3,2} & \cdots & b_{i_3,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{i_n,1} & b_{i_n,2} & \cdots & b_{i_n,n}\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n} \operatorname{sign}\sigma\, a_{1,i_1} a_{2,i_2} a_{3,i_3} \cdot \ldots \cdot a_{n,i_n} \cdot$$

$$\det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n} \operatorname{sign}\sigma\, a_{1,i_1} a_{2,i_2} a_{3,i_3} \cdot \ldots \cdot a_{n,i_n} \cdot \det B =$$

$$= \det B \cdot \sum_{\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in S_n} \operatorname{sign}\sigma\, a_{1,i_1} a_{2,i_2} a_{3,i_3} \cdot \ldots \cdot a_{n,i_n} =$$

$$\det B \cdot \det A = \det A \cdot \det B.$$

Ми довели, що $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$. $\square$

Обернена матриця.

Твердження. Нехай $A \in Mat(n \times n, F)$ – довільна матриця розміру $n \times n$ з елементами з поля F. Тоді
1. Якщо існує $B \in Mat(n \times n, F)$, така що $A \cdot B = I$, то $\det A \neq 0$.
2. Якщо існує $C \in Mat(n \times n, F)$, така що $C \cdot A = I$, то $\det A \neq 0$.

Доведення. Маємо

$$A \cdot B = I \;\Rightarrow \det(A \cdot B) = \det I = 1 \;\Rightarrow$$

$$\det A \cdot \det B = 1 \;\Rightarrow\; \det A \neq 0.$$

Пункт 2 доводиться аналогічно. □

Тобто, якщо у матриці визначник дорівнює нулю, то у неї немає ані правої, ані лівої оберненої.

Теорема. Нехай $A \in Mat(n \times n, F)$, $\det A \neq 0$. Тоді існує $A^{-1} \in Mat(n \times n, F)$, така що

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Доведення. Позначимо через $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})_{i,j=1}^{n}$ – матрицю, елементи якої знаходяться за формулами

$$\widetilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} M'\,{}^{i}_{j}, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

(нагадуємо, що, як завжди, через $M'\,{}^{i}_{j}$ позначаємо визначник матриці, яка виходить з матриці A після викресленні рядка за номером j і стовпця за номером i). Ця матриця називається приєднаною до матриці A.

Обчислимо добутки матриць $A \cdot \widetilde{A}$, $\widetilde{A} \cdot A$.

Ми маємо

$$A \cdot \widetilde{A} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} M'^{\,1}_{\,1} & (-1)^{1+2} M'^{\,1}_{\,2} & \cdots & (-1)^{1+n} M'^{\,1}_{\,n} \\ (-1)^{2+1} M'^{\,2}_{\,1} & (-1)^{2+2} M'^{\,2}_{\,2} & \cdots & (-1)^{2+n} M'^{\,2}_{\,n} \\ (-1)^{3+1} M'^{\,3}_{\,1} & (-1)^{3+2} M'^{\,3}_{\,2} & \cdots & (-1)^{3+n} M'^{\,3}_{\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n+1} M'^{\,n}_{\,1} & (-1)^{n+} M'^{\,n}_{\,2} & \cdots & (-1)^{n+n} M'^{\,n}_{\,n} \end{pmatrix}.$$

Матриці ми множимо за правилом "рядок на стовпець". Для того, щоб знайти елемент добутку за номером ij, треба i-й рядок матриці A помножити на j-й стовпець матриці $\widetilde{A}$. Відмітимо, що в стовпці номер j матриці $\widetilde{A}$ містяться алгебраїчні доповнення до j-го рядка матриці A

Раніше ми доводили такі формули:

$$\sum_{k=0}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k} M'{}_{i}^{k} = \det A,$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_{ik}(-1)^{j+k} M'{}_{j}^{k} = 0, \quad \forall j \neq i.$$

Таким чином, ми бачимо, що $A \cdot \widetilde{A} = \det A \cdot I$. Аналогічно ми перевіряємо, що $\widetilde{A} \cdot A = \det A \cdot I$.

Це спостереження дає можливість побудувати обернену матрицю для матриці A у випадку, коли $\det A \neq 0$. А саме, нехай $A^{-1} = (\beta_{ij})_{i,j=1}^{n}$,

$$\beta_{ij} = \frac{1}{\det A}(-1)^{i+j} M'{}_{j}^{i}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Ми маємо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. $\square$

Єдиність оберненої матриці.

Теорема. Нехай $A, B, C \in Mat(n \times n, F)$.
1. Якщо $A \cdot B = I$, то $B = A^{-1}$.
2. Якщо $C \cdot A = I$, то $C = A^{-1}$.

Доведення. Якщо $A \cdot B = I$, то маємо $A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot I \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot B = A^{-1} \Rightarrow I \cdot B = A^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}$. Пункт 2 доводиться аналогічно. $\square$

Ранг матриці. Теорема про ранг матриці.

Означення. Нехай $A \in Mat(m \times n, F)$, $m, n \in \mathbb{N}$. Стовпцевим рангом матриці A називається ранг системи її стовпців $A^1, A^2, \ldots, A^n$, тобто найбільша кількість лінійно незалежних стовпців.

Означення. Нехай $A \in Mat(m \times n, F)$, $m, n \in \mathbb{N}$. Рядковим рангом матриці A називається ранг системи її рядків $A_1, A_2, \ldots, A_m$, тобто найбільша кількість лінійно незалежних рядків.

Означення. Нехай $A \in Mat(m \times n, F)$, $m, n \in \mathbb{N}$. Детермінантним рангом матриці A називається найвищій серед порядків ненульових мінорів матриці A.

Теорема (теорема про ранг матриці). Нехай $A \in Mat(m \times n, F)$, $m, n \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$. Тоді стовпцевий ранг матриці A дорівнює рядковому рангу матриці A і дорівнює детермінантному рангу матриці A. Ранг матриці A позначається $\operatorname{rg} A$.

Доведення.
Якщо один із рангів матриці A дорівнює нулю, то, очевидно, матриця A є нульовою, тому інші два ранги теж дорівнюють нулю. Розглянемо випадок ненульової матриці, і позначимо її детермінантний ранг через $r := \operatorname{rg} A \in \mathbb{N}$.

Той факт, що детермінантний ранг матриці дорівнює r, означає, що є якийсь мінор матриці A, який не дорівнює нулю, а усі мінори матриці A порядків строго більших за r дорівнюють нулю.

Не зменшуючи загальності, вважаємо, що ненульовий мінор сформований рядками $1, 2, \ldots, r$, і стовпцями $1, 2, \ldots, r$, тобто

$$D := \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Нескладно перевірити, що з того, що випливає що перші r стовпців $A^1, A^2, \ldots, A^r$ є лінійно незалежними, і перші r рядків $A_1, A_2, \ldots, A_r$ є лінійно незалежними. Дійсно, припустимо, що стовпці $A^1, A^2, \ldots, A^r$ є лінійно залежними. Тоді один із цих стовпців є лінійною комбінацією інших. Тобто, існує $j = 1, 2, \ldots, r$, і існують числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_r$, такі що

$$A^j = \alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_{j-1} A^{j-1} + \alpha_{j+1} A^{j+1} + \ldots + \alpha_r A^r.$$

Розглянемо невироджену матрицю $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix}$. Її визначник не зміниться, якщо ми до j-го стовпця додамо таку лінійну комбінацію інших стовпців: $-\alpha_1 A^1 - \alpha_2 A^2 - \ldots - \alpha_{j-1} A^{j-1} - \alpha_{j+1} A^{j+1} - \ldots - \alpha_r A^r$. Але після такого додавання j-й стовпець буде дорівнювати нулю, тобто отримуємо, що $D = 0$. Це суперечить припущенню, що $D \neq 0$.

Отже ми довели, що $A^1, A^2, \ldots, A^r$ є лінійно незалежними. Аналогічно доводимо, що $A_1, A_2, \ldots, A_r$ є лінійно незалежними.

Тобто ми довели, що стовпцевий ранг матриці $\geq r$, також рядковий ранг матриці $\geq r$. Залишилося довести, що обидва цих ранги дорівнюють r.

Розглянемо довільні $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тоді ми маємо

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3r} & a_{3j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{pmatrix} = 0 \qquad (2)$$

(до матриці, сформованої першими r рядками і першими r стовпцями матриці A додали рядок з номером i і стовпець з номером j).

Пояснимо виконання рівності (2).

Якщо $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, то (2) виконується, бо в матриці є два однакові рядки. Якщо $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, то (2) виконується, бо в матриці є два однакові стовпця. Якщо ж $i \in \{r+1, r+2, \dots, m\}$, $j \in \{r+1, r+2, \dots, n\}$, то (2) виконується, бо детермінантний ранг матриці A дорівнює r (матриця, від якої беремо визначник в формулі (2), є мінором матриці A порядку $r+1$).

Розкладемо визначник з лівої частині формули (2) по останньому рядку. Відзначимо, що алгебраїчні доповнення елементів останнього рядка (доповнювальні мінори зі знаками) не залежать від номера рядка i, а тільки від номера стовпця j, а для останнього елемента останнього рядка це доповнення не залежить і від j, воно дорівнює D.

Тому ми маємо формулу

$$a_{i1}B_1(j) + a_{i2}B_2(j) + \ldots + a_{ir}B_r(j) + a_{ij}D = 0$$

(тут $B_1(j), B_2(j), \ldots, B_r(j) \in F$ – деякі числа, які залежать тільки від j). Оскільки $D \neq 0$, з останньої формули ми отримуємо

$$a_{ij} = a_{i1}C_1(j) + a_{i2}C_2(j) + \ldots + a_{ir}C_r(j). \qquad (3)$$

Ми довели наступне твердження: для довільних $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, знайдуться числа $C_1(j), C_2(j), \ldots, C_r(j) \in F$, які залежать тільки від j, такі що виконується (3).

Зафіксуємо довільне $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ і запишемо детально формулу (3) для усіх $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Ми маємо

$$a_{1j} = a_{11}C_1(j) + a_{12}C_2(j) + \ldots + a_{1r}C_r(j).$$

$$a_{2j} = a_{21}C_1(j) + a_{22}C_2(j) + \ldots + a_{2r}C_r(j).$$

$$a_{3j} = a_{31}C_1(j) + a_{32}C_2(j) + \ldots + a_{3r}C_r(j).$$

$$\vdots$$

$$a_{mj} = a_{m1}C_1(j) + a_{m2}C_2(j) + \ldots + a_{mr}C_r(j).$$

Тобто, для довільного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ знайдуться числа $C_1(j), C_2(j), \ldots, C_r(j) \in F$, такі що виконується рівність

$$A^j = C_1(j)A^1 + C_2(j)A^2 + \ldots + C_r(j)A^r.$$

Іншими словами, $A^1, A^2, \dots, A^n \in \mathrm{Lin}\ \{A^1, A^2, \dots, A^r\}$, тобто ранг системи стовпців матриці A не є більшим за вимірність лінійної оболонки перших r стовпців, тобто не є більшим за r. При цьому стовпці $A^1, A^2, \dots, A^r$ є лінійно незалежними, тобто стовпцевий ранг матриці A дорівнює r.

Аналогічно (розкладаючи визначник з лівої частині формули (2) по останньому стовпцю) ми доведемо, що рядковий ранг матриці A дорівнює r. $\square$

Задача. Нехай $A, B \in Mat(m \times n, F)$. Доведіть, що

$$\mathrm{rg}(A+B) \leq \mathrm{rg}A + \mathrm{rg}B.$$