Решение задачи 1.

Условие: З.р. сл. вектора $\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$ имеет плотность, равную

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} C, & (x_1,x_2)\in K, \\ 0, & (x_1,x_2)\notin K, \end{cases}$$

где C – константа,

$$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|<x<3\}.$$

1) Найдите величину C.

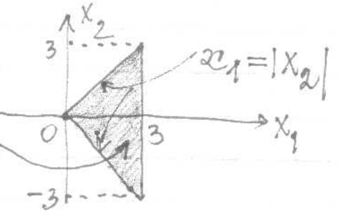
Величина C находится из условия

$$\iint\limits_{R^2} p_{\vec{\xi}}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2=\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2=$$

$$=\iint\limits_{K} C\,dx_1dx_2=C\cdot \text{площадь } K=1.$$

Множество K таково:

$$K=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : |x_2|<x_1<3\}$$



Площадь $K=9$.

Поэтому $C=1/9$.

2) Найдите плотность сл. в. ξ_2.

Надо применить формулу

$$p_{\xi_2}(x_2) = \int_{\mathbb{R}} p_{\vec{\xi}}(x_1, x_2)\,dx_1 =$$

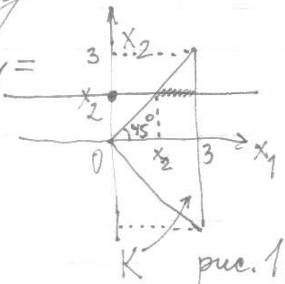


рис. 1.

$$= \int_{x_2}^{3} C\,dx_1 = \frac{1}{9}(3 - x_2)$$

если $0 < x_2 < 3$, см. рис. 1.

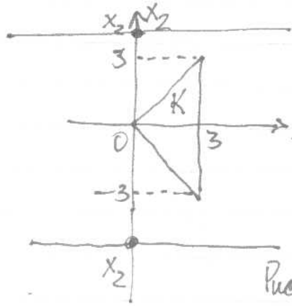


Рис. 2

$$p_{\xi_2}(x_2) = \int_{\mathbb{R}} p_{\vec{\xi}}(x_1, x_2)\,dx_1 = \int_{\mathbb{R}} 0\,dx_1 = 0$$

если $x_2 > 3$

или если $x_2 < -3$.

если $-3 < x_2 < 0$

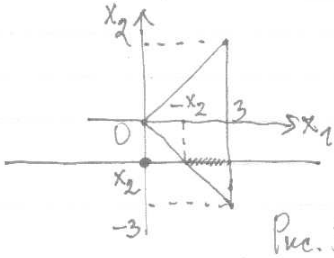
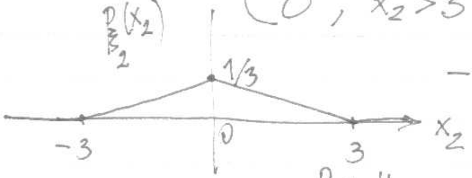


Рис. 3

$$p_{\xi_2}(x_2) = \int_{\mathbb{R}} p_{\vec{\xi}}(x_1, x_2)\,dx_1 = \int_{-x_2}^{3} \frac{1}{9}\,dx_1 =$$

(2) $= \frac{1}{9}(3 + x_2)$

Итак, $p_{\xi_2}(x_2) = \begin{cases} 0, & x_2 < -3 \\ \dfrac{3+x_2}{9}, & -3 < x_2 < 0 \\ \dfrac{3-x_2}{9}, & 0 < x_2 < 3 \\ 0, & x_2 > 3 \end{cases}$



— график плотности сл.в. ξ_2.

Рис. 4

3) Вычислите среднее и дисперсию сл. в. ξ_2.

$$M\xi_2 = \int_{\mathbb{R}} x\, p_{\xi_2}(x)\,dx = 0,$$ так как подынтегральная функция нечётная.

$$D\xi_2 = M(\xi_2^2) - \underbrace{(M\xi_2)^2}_{=0} = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{x^2 p_{\xi_2}(x)}_{\text{чётная функция}}\,dx = 2\int_0^3 x^2\,\frac{3-x}{9}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^3 x^2\,dx - \frac{2}{9}\int_0^3 x^3\,dx = \frac{2x^3}{9}\Big|_0^3 - \frac{2}{9\cdot 4}x^4\Big|_0^3 = 6 - \frac{1}{2}\cdot 3^2 = \frac{3}{2} =$$

(3) $= 1{,}5.$