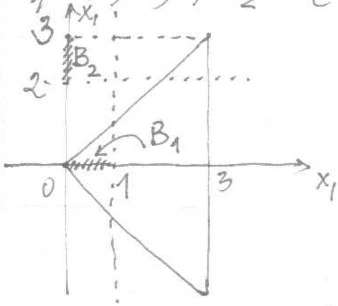
4) Найдите плотность распределения сл. в. $Y=\varphi(\xi_1,\xi_2)$, где $\varphi(u,v)=u+v$.

Имеем $Y=\xi_1+\xi_2$ и надо найти $p_Y(t)=p_{\xi_1+\xi_2}(t)$. Формулой свёртки

$$p_{\xi_1+\xi_2}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{\xi_1}(t-v)\,p_{\xi_2}(v)\,dv$$

пользоваться нельзя, потому что сл. в. ξ_1 и ξ_2 не являются независимыми. Действительно, возьмём $B_1=(0,1)$, $B_2=(2,3)$. Тогда



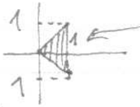
$$P(\xi_1\in B_1,\xi_2\in B_2)=$$
$$=P(\vec{\xi}\in(0,1)\times(2,3))=$$
$$=\iint\limits_{(0,1)\times(2,3)}p_{\vec{\xi}}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2=0,$$

т.к. $p_{\vec{\xi}}(x_1,x_2)=0$ при $(x_1,x_2)\in(0,1)\times(2,3)$.

$$P(\xi_1\in\underset{B_1}{\underset{\shortparallel}{(0,1)}})=P(\vec{\xi}\in(0,1)\times\mathbb{R})=\iint\limits_{(0,1)\times\mathbb{R}}p_{\vec{\xi}}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2=$$

4'

$= \iint \frac{1}{9}\,dx_1 dx_2 = \frac{1}{9}$ площадь этого треугольника $=$



$= \frac{1}{9}\cdot 1 = \frac{1}{9}.$

Аналогично проверяется, что

$$P(\xi_2 \in (2,3)) > 0$$

Итак, $P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2) \neq P(\xi_1 \in B_1) P(\xi_2 \in B_2)$.

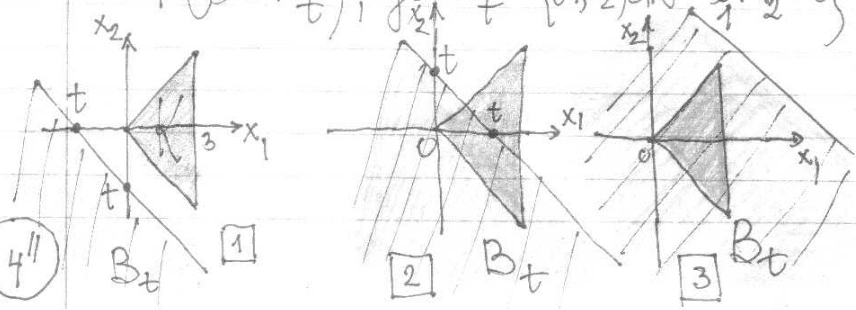
Поэтому сначала найдём $F_Y(t)$, а потом применим формулу

$$p_Y(t) = \frac{d}{dt} F_Y(t).$$

$$F_Y(t) = P(Y < t) = P(\xi_1 + \xi_2 \in t) =$$

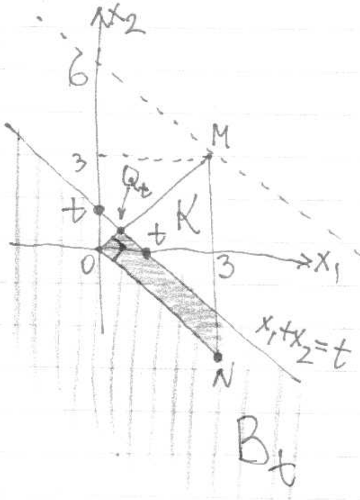
$$= P(\vec{\xi} \in B_t), \text{ где } B_t = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 < t\}$$

4''



$\boxed{1}$ Случай $t<0$. Тогда $B_t \cap K = \varnothing$.
Поэтому
$$F_{\xi_1+\xi_2}(t) = P(\vec{\xi} \in B_t) = \iint\limits_{B_t} \underbrace{p_{\vec{\xi}}(x_1,x_2)}_{\substack{\text{III на } B_t \\ 0}}\, dx_1 dx_2 = 0.$$

$\boxed{2}$ Случай $0<t<6$. Сейчас $B_t \cap K \neq \varnothing$.



$B_t \cap K$ — это трапеция (прямоугольная, $\angle MON = \pi/2$).
Длина отрезка OQ_t равна $\frac{t}{\sqrt{2}}$.
Длина отрезка ON равна $3\cdot\sqrt{2}$.
Длина отрезка Q_tM равна $3\sqrt{2} - \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{6-t}{\sqrt{2}}$.

4'''

Поэтому $F_{\xi_1+\xi_2}(t) = \iint\limits_{B_t} p_{\vec{\xi}}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 =$

$$= \frac{1}{9}\ \text{площадь}\,(B_t \cap K) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{6-t}{\sqrt{2}}\cdot\frac{6-t}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(9 - \frac{1}{4}(6-t)^2\right) = 1 - \frac{1}{36}(6-t)^2.$$

$\boxed{3}$ Случай $t > 6$. В этом случае $B_t \cap K = K$. Поэтому

$$F_{\xi_1+\xi_2}(t) = \iint\limits_{B_t} p_{\vec{\xi}}(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 = \iint\limits_{K\cap B_t} \frac{1}{9}\,dx_1 dx_2 =$$

$$= \iint\limits_{K} \frac{1}{9}\,dx_1 dx_2 = 1.$$

$$F_{\xi_1+\xi_2}(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ 1 - \frac{1}{36}(6-t)^2, & 0 < t \leqslant 6, \\ 1, & t > 6. \end{cases}$$

— непрерывная

4[4] кусочно аналитическая функция, значит, она абсолютно непрерывная функция, значит, $p_{\xi_1+\xi_2}(t)$ существует, и

$$p_{\xi_1+\xi_2}(t) = \frac{d}{dt}F_{\xi_1+\xi_2}(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 0, & t>6 \\ \frac{1}{36}\cdot 2(6-t) = \\ = \frac{1}{18}(6-t), & 0<t<6. \end{cases}$$

Итак, $p_{\xi_1+\xi_2}(t) = \begin{cases} \frac{6-t}{18}, & 0<t<6 \\ 0, & t<0, \\ & t>6. \end{cases}$

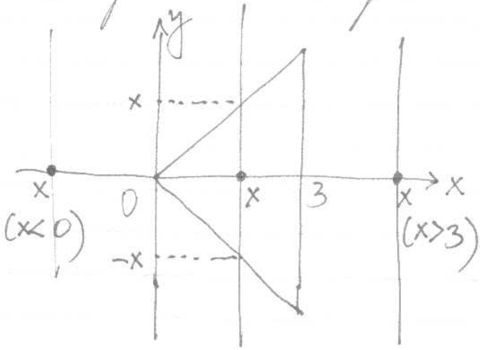
Рассмотрим ещё случай, когда $\varphi(u,v) = u$.

4(б) Найдите плотность распределения сл. в. $Y=\varphi(\xi_1,\xi_2)$, где $\varphi(u,v)=u$.

Надо найти плотность сл. в. $Y=\xi_1$. По формуле

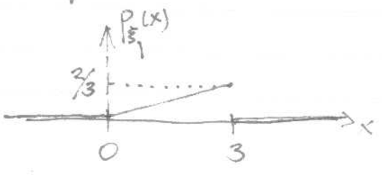
$$p_{\xi_1}(x)=\int\limits_{R} p_{\vec{\xi}}(x,y)\,dy=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty} 0\,dy=0 \text{ при } x<0 \text{ и при } x>3.$$



$$p_{\xi_1}(x)=\int\limits_{-x}^{x}\frac{1}{9}\,dy=\frac{2x}{9} \text{ при } 0<x<3.$$

График $p_{\xi_1}(x)$:



4(б)