Задание 14. (22/V-2020).

1. Пусть $f(t)$ — х.ф. некоторой сл.в. Докажите, что при всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство
$$1 - \mathrm{Re}\, f(2t) \le 4\,(1 - \mathrm{Re}\, f(t)).$$

2. Докажите, что если $f(t)$ — х.ф. некоторой сл.в., то $|f(t)|^2$ также является характеристической функцией.

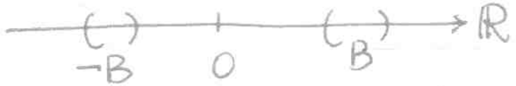
3. Пусть $f(t)$ — х.ф. Докажите, что $\mathrm{Re}\, f(t)$ также является х.ф. некоторой сл.в.
Пусть $\mu = P_\xi$ — з.р. сл.в., х.ф. которой равна $f(t)$. Как выразить через μ закон распределения сл.в., характеристическая функция которой равна $\mathrm{Re}\, f(t)$?

4. Говорят, что сл.в. ξ имеет симметричное распределение, если

условие:

$\forall B \in \mathcal{B}_1 : P_\xi(-B) = P_\xi(B)$.

($-B := \{-x : x \in B\}$,



)

Докажите, что если сл. в. ξ имеет симметричное распределение, то её х.ф. вещественна ($\varphi_\xi(t) \in \mathbb{R}$ при всех $t \in \mathbb{R}$).

5. Имеет место и обратное: если х.ф. некоторой сл.в. вещественная, то распределение этой сл.в. симметрично.

6. В шаре радиуса R наугад взята точка. Чему равно среднее расстояния её до границы шара? (Имеется в виду шар в $\mathbb{R}^3$. Но, конечно, можно решать её и в случае $\mathbb{R}^n$ с произвольным $n \in \mathbb{N}$.)

7. Пусть сл. в. ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda > 0$, $g(x) = \min(|x|, 1)$. Найдите ф.р. сл. в. $\eta := g(\xi)$. Обладает ли эта сл. в. плотностью? Чему равно среднее сл. в. η?

8. Пусть сл. в. ξ_1, ξ_2 независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Пусть $\eta = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ ($\eta(\omega)$ — расстояние от точки $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ до начала координат. Найдите среднее сл. в. η, ф.р. этой сл. в. Является ли распределение сл. в. η абсолютно непрерывным? Найдите плотность сл. в. η, если она существует?

9. Пусть сл. в. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимы, одинаково распределены, причём

ξ_n	0	$-a$	a
	$1-\frac{2}{a}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$

, где $a > 2$. Положим

$S_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i$. Найдите приближённо при больших n вероятность того, что значение величины S_n будет отклоняться от своего среднего меньше, чем удвоенное среднее квадратичное отклонение.

10. Пусть сл. в. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ попарно не коррелированы и имеют такие таблицы распределения:

ξ_n	0	$-n$	n
	$1-e^{-n} \cdot 2$	e^{-n}	e^{-n}

$(n=1,2,\ldots)$

Удовлетворяет ли эта последовательность сл. в. слабому закону больших чисел?

11. Пусть $0<a<\pi$ и функция $A(t)$ 2π-периодична на $\mathbb{R}$, а при $-\pi \leq t \leq \pi$ определяется так:

$A(t) = 1 - \frac{|t|}{a}$ при $|t| \leq a$, $A(t) = 0$ при остальных $t \in [-\pi, \pi]$. Докажите, что $A(t)$ является характеристической функцией решетчатого распределения.

5