(11) Пусть $\xi \sim N(0,1)$, а $g(v)$ – дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$ с производной $g'(v)$. Докажите равенства:

1) $M(g'(\xi)) = M(\xi g(\xi))$,

2) $M(\xi^{n+1}) = n M(\xi^{n-1})$.

Вычислите $M\xi^4$ и $M\xi^{40}$.

12. Пусть $\xi \sim N(5,2)$, а $\eta = 2\xi + 4$. Найдите $M\eta$, $D\eta$ и плотность сл. в. η.

13. Пусть ξ и η – независимые сл. в.,

$\xi \sim N(0,\sigma^2)$,

$\eta \sim N(0,\sigma^2)$, где $\sigma > 0$,

$Z = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

Найдите плотность сл. в. Z. (Распределение сл. в. Z называется распределением Рэлея.)

14. Пусть X – стандартная нормаль-

5 ная сл. в., $a > 0$ – константа, сл. в. Y

определяется следующим образом:

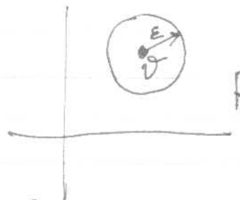
$$Y(\omega)=\begin{cases} X(\omega), \text{ если } |X(\omega)|<a, \\ -X(\omega), \text{ если } |X(\omega)|\geq a. \end{cases}$$

Покажите, что Y тоже имеет стандартное нормальное распределение.
Найдите $\operatorname{cov}(X,Y) =: c(a)$. Как ведёт себя функция $c(a)$ при $a\to 0$ и $a\to\infty$?
Покажите, что сл. в. X и Y зависимы при любом a.
Каков носитель закона распределения вектора (X,Y)?

<u>Определение</u>. Пусть μ - борелевская вероятностная мера в $\mathbb{R}^n$. (Слово „борелевская" означает, что мера μ задана на σ-алгебре $\mathcal{B}_n$ борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$.) <u>Носителем</u> меры μ (он обозначается часто $S(\mu)$) называется мн-во всех точек $v\in\mathbb{R}^n$ таких, что $\forall\varepsilon>0: \mu(B_\varepsilon(v))>0$.
строго!

Здесь $B_\varepsilon(v)$ — ε-окрестность точки v в евклидовой метрике

$$B_\varepsilon(v)=\{y\in\mathbb{R}^n: \sqrt{(y_1-v_1)^2+\dots+(y_n-v_n)^2}<\varepsilon\}.$$



← Картинка для случая $n=2$.

З.р. случайного вектора (X,Y) — это борелевская вероятностная мера в $\mathbb{R}^2$.

<u>Упражнение</u>: 1) Пусть $\xi\sim N(a,\sigma^2)$. Каков носитель з.р. P_ξ?

2) Пусть ξ имеет показательное распределение с параметром 3. Найдите $S(P_\xi)$.

3) Пусть сл.в. $\vec{\xi}$ равномерно распределён в квадрате с вершинами в точках $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$. Найдите $S(P_{\vec{\xi}})$. Найдите также $S(P_{\xi_1})$ и $S(P_{\xi_2})$, где ξ_i — координаты вектора $\vec{\xi}$. (Т.е. $\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$).

15. Докажите, что при любом $a>0$ выполняется соотношение

$$\sum_{\{k\in\mathbb{Z}:\,|k-\frac{n}{2}|\le\frac{1}{2}a\sqrt{n}\}} C_n^k \underset{n\to\infty}{\sim} 2^{n+1}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx.$$