# Указания к решению задач (задание 13).

1. Надо применить теорему Муавра-Лапласа. Здесь легко понять, какая схема Бернулли должна рассматриваться, что такое одно испытание, что такое „успех“, чему равна вероятность „успеха“ в одном испытании, сколько раз повторяется испытание. Искомую вероятность надо записать в виде

$$P(a < \hat{S}_n < b),$$

где $\hat{S}_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$, где $S_n$ - число „успехов“ в $n$ испытаниях Бернулли, записав её (вероятность) сначала как $P(A < S_n < B) =$

$$= P\Big(\underbrace{\frac{A-np}{\sqrt{npq}}}_{a} < \underbrace{\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}}_{\hat{S}_n} < \underbrace{\frac{B-np}{\sqrt{npq}}}_{b}\Big).$$

Потом применить теорему Муавра-Лапласа, записав

$$P(a<\hat{S}_n<b) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-x^2/2}dx.$$

Считается, что точность в этом месте достаточна для практических целей, если $npq>20$. Правую часть найдите с помощью таблиц. См., например

Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов „Таблицы математической статистики",

В. Феллер, т. 1, с. 193 (гл. 7, §1),

А.А. Боровков, с. 345-346.

2. Эта задача аналогична предыдущей. Что такое одно испытание Бернулли, что такое «успех»?

3. Пусть $\eta=\pi\frac{\xi^2}{4}$. Надо найти $M\eta$, $D\eta$, $F_\eta(x)$.

4. Пусть $\xi_1$ – момент прихода к месту встречи человека $\alpha$,

$\xi_2$ – момент прихода к месту встречи человека $\beta$. Тогда по условию

1) $\xi_1$ и $\xi_2$ – независимые сл. в.,

2) $\xi_1$ и $\xi_2$ – равномерно распределены на интервале $(t_0, t_0+T)$, т. е.

$$p_{\xi_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{T} \text{ при } t_0 < x < t_0+T, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Первый вопрос состоит в вычислении $M(|\xi_1 - \xi_2|)$. Это можно сделать так.

Пусть $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ – вектор с координатами $\xi_1$ и $\xi_2$. В силу 1) и 2) (см. выше) вектор $\vec{\xi}$ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью

$$p_{\vec{\xi}}(x,y) = p_{\xi_1}(x)\, p_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \notin K, \\ \frac{1}{T^2}, & (x,y) \in K, \end{cases}$$ где

$K$ – квадрат $(t_0, t_0+T) \times (t_0, t_0+T)$.

3 Теперь имеем

$$M|\xi_1-\xi_2| = M\varphi(\xi_1,\xi_2) = \iint\limits_{R^2}\varphi(x,y)\,p_{\vec{\xi}}(x,y)\,dx\,dy =$$

$\varphi(u,v)=|u-v|$

$$= \iint\limits_{K}|x-y|\,\frac{1}{T^2}\,dx\,dy = 2\iint\limits_{K'}(x-y)\,dx\,dy\,\frac{1}{T^2} =$$

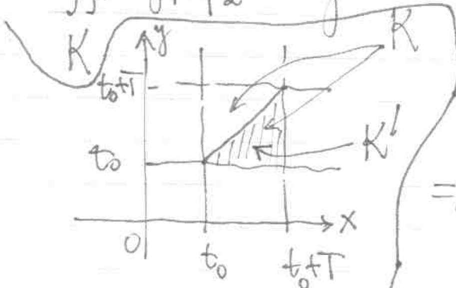


Рис. 1

$$=2\,\frac{1}{T^2}\cdot\int\limits_{t_0}^{t_0+T}\left(\int\limits_{t_0}^{x}(x-y)\,dy\right)dx,$$

и осталось вычислить этот повторный интеграл.

Другой стандартный способ таков. Можно найти сначала ф.р. сл.в. $|\xi_1-\xi_2|$. Для $t\in R$ имеем:

$$F_{|\xi_1-\xi_2|}(t) = P(|\xi_1-\xi_2|<t) =$$

$$= P(\vec{\xi}\in B_t) =$$