# М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й   А Н А Л И З

Вопросы к коллоквиуму ( II курс, II семестр )

## XVIII. И Н Т Е Г Р А Л   Р И М А Н А   В   $\mathbb{R}^m$

47. Связь обобщённой теоремы Ньютона-Лейбница с теоремой Ньютона-Лейбница

48. Косые k-мерные брусы в $\mathbb{R}^m$. Рекуррентная формула для мер Жордана косых брусов.

49. Определители Грама. Рекуррентная формула для определителей Грама. Связь определителей Грама с мерой Жордана косых брусов.

50. Объём k-мерного косого бруса в $\mathbb{R}^m$ в координатах образующих его векторов.

51. Диффеоморфизмы и множества, измеримые по Жордану.

52. Геометрический смысл якобиана.

53. Замена переменной под знаком кратного интеграла Римана. Случай нарушения условий диффеоморфизма. Примеры: полярная система координат, цилиндрическая система координат, сферическая система координат.

## IXX. О Р И Е Н Т А Ц И Я   П О В Е Р Х Н О С Т И   В   $\mathbb{R}^m$. П О В Е Р Х Н О С Т Н Ы Е   И Н Т Е Г Р А Л Ы   П Е Р В О Г О   Р О Д А.

1. Преобразование координат при переходе к другому базису в конечномерном линейном пространстве. Понятие о тензоре. Ковариантные и контравариантные индексы тензора. Примеры.

2. Связь между матрицами перехода к различным базисам.

3. Ориентация линейного пространства. Геометрический смысл в случае $\mathbb{R}^m, m = 1, 2, 3$.

4. Ориентация гладкой элементарной k-поверхности в $\mathbb{R}^m$.

5. Ориентация гладкой связной k-поверхности в $\mathbb{R}^m$.

6. Ориентация гладкой связной k-поверхности в $\mathbb{R}^m$ и трансверсальные поля. Пример неориентируемой поверхности. Лист Мёбиуса.

7. Поверхность с краем в $\mathbb{R}^m$. Гладкая поверхность с краем в $\mathbb{R}^m$. Согласование ориентации гладкой связной k-поверхности и её края.

8. Кусочно гладкие к-поверхности с углами в $\mathbb{R}^m$ и их ориентация.

9. Кольцо $J(S)$ измеримых по Жордану множеств.

10. Определение площади к-поверхности в $\mathbb{R}^m$. Формула для её вычисления. Примеры: 1-поверхность в $\mathbb{R}^m$; 2-поверхность в $\mathbb{R}^3$.

11. Определение поверхностного интеграла первого рода. Формула для его вычисления.

12. Свойства поверхностных интеграла первого рода. Оценки. Физический смысл поверхностных интегралов первого рода. Независимость поверхностного интеграла первого рода от параметризации поверхности.

13. Определение криволинейного интеграла первого рода. Формулы для его вычисления.

14. Свойства криволинейных интегралов первого рода. Оценки. Физический смысл криволинейных интегралов первого рода.

## XX. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА В $\mathbb{R}^3$. ТЕОРИЯ ПОЛЯ.

1. Скалярные и векторные поля.

2. Криволинейный интеграл второго рода. Определение. Физический смысл. Свойства. Сведение криволинейного интеграла второго рода к определённому интегралу. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.

3. Оценки для криволинейных интегралов второго рода.

4. Приближение криволинейного интеграла второго рода по кривой криволинейным интегралом вдоль ломаной.

5. Определение односвязной области в $\mathbb{R}^2$. Формула Грина. Случай многосвязной области. Приложение к вычислению площадей.

6. Дифференциальные формы нулевого и первого порядка. Физический смысл дифференциальной формы первого порядка. Перенос дифференциальных форм первого порядка.

7. Поток векторного поля через элемент поверхности.

8. Дифференциальные формы второго порядка. Физический смысл. Перенос дифференциальных форм второго порядка.

9. Поверхностный интеграл второго рода. Определение. Координатная форма. Векторная форма. Физический смысл. Сведение поверхностного интеграла второго рода к поверхностному интегралу первого рода.

10. Независимость поверхностного интеграла второго рода от параметризации поверхности.

12. Формула Гаусса-Остроградского.

13. Определение дивергенции. Физический смысл. Независимость дивергенции от выбора ортонормированной системы координат.

14. Примеры применения формулы Гаусса-Остроградского: задача о равномерном сжатии замкнутой поверхности; закон Архимеда.

15. Оператор Гамильтона (набла). Связь с градиентом, дивергенцией, ротором.

16. Циркуляция векторного поля.

17. Формула Стокса.

18. Физический смысл ротора. Независимость ротора от выбора ортонормированной системы координат.

19. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Связь с полным дифференциалом.

20. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Связь с циркуляцией.

21. Определение односвязной области в $\mathbb{R}^m$.

22. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Связь с ротором.

23. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Итоговая теорема. Замечания к теореме.

24. Восстановление функции по её полному дифференциалу. Примеры. Пример многозначной функции в случае многосвязной области.

25. Потенциальные поля. Примеры.

26. Векторные линии и векторные трубки. Соленоидальные поля. Примеры.

27. Действия с оператором Гамильтона.

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й   А Н А Л И З

Вопросы к экзамену ( II курс, II семестр )

## XXI. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ. ФОРМУЛА СТОКСА,

1. Полилинейные формы.

2. Кососимметрические формы. Внешнее произведение. Его свойства.

3. Определение дифференциальной (внешней) формы в $\mathbb{R}^m$.

4. Перенос дифференциальных форм. Его свойства.

5. Внешний дифференциал внешней формы. Его свойства. Связь градиента, ротора и дивергенции с внешним дифференциалом.

6. Идентичный вид формул Ньютона - Лейбница, Грина, Стокса для $\mathbb{R}^3$, Гаусса - Остроградского как частных случаев общей формулы Стокса для $\mathbb{R}^m$.

7. Определение дифференциальной $l-$формы на $k-$поверхности в $\mathbb{R}^m$.

8. Связь между разными координатными представлениями дифференциальной $l-$формы на $k-$поверхности в $\mathbb{R}^m$.

9. Операция переноса дифференциальных форм с $k-$поверхности на локальную карту и её свойства.

10. Локальный перенос $l-$формы, определённой на локальной карте $k-$поверхности, на эту поверхность.

11. Определение внешнего дифференциала дифференциальной $l-$формы на $k-$поверхности в $\mathbb{R}^m$ и его свойства.

12. Разбиение единицы, подчинённое данному покрытию $k-$поверхности в $\mathbb{R}^m$.

13. Определение интеграла от дифференциальной $k-$формы, определённой на $k-$поверхности в $\mathbb{R}^m$.

14. Формула Стокса для $k-$поверхности в $\mathbb{R}^m$.

## XXII. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА.

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Теоремы о непрерывности и замене порядка интегрирования.

2. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Теорема о дифференцируемости. Общий случай.

3. Несобственные интегралы первого и второго рода, зависящие от параметра. Определение равномерной сходимости.

4. Связь между сходимостью (равномерной сходимостью) несобственного интеграла, зависящего от параметра, и соответствующего функционального ряда.

5. Теоремы о непрерывности и о замене порядка интегрирования для несобственных интегралов, зависящих от параметра.

6. Теорема о дифференцируемости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

7. Критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

8. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

9. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

10. Интеграл Дирихле.

11. Интеграл Пуассона.

12. Интеграл Лапласа.

13. Интегралы Фруллани.

14. Признак Дини равномерной сходимости интегралов, зависящих от параметра.

15. Теорема о замене порядка интегрирования для несобственных интегралов, зависящих от параметра. Случай двух несобственных интегралов.

16. Гамма - функция Эйлера: интегральное представление, область сходимости интеграла, формула понижения, бесконечная дифференцируемость гамма - функции, график гамма - функции на всей числовой оси.

17. Бета - функция Эйлера: интегральное представление, область сходимости интеграла, формулы понижения, связь с гамма - функцией.

18. Формула Стирлинга.

## XXIII. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЯХ

1. Замена переменных в дифференциальных выражениях. Случай функции одной переменной.

2. Замена переменных в дифференциальных выражениях. Случай функции многих переменных.

3. Оператор Лапласа в криволинейной ортогональной системе координат. Коэффициенты Ламе.

## XXIV. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. Определение бесконечного произведения. Определение сходимости бесконечного произведения. Необходимое условие сходимости бесконечного произведения. Определение сходимости бесконечного произведения к нулю.

2. Абсолютная и условная сходимость бесконечного произведения. Критерий абсолютной сходимости бесконечного произведения.

3. Условия сходимости бесконечного произведения.

4. Формула Валлиса.

## XXV. ИНТЕГРАЛ СТИЛТЬЕСА

!. Определение функции ограниченной вариации. Примеры. Пример непрерывной на сегменте функции с бесконечной вариацией.

2. Спрямляемость параметрически заданной кривой и ограниченность вариации её координатных функций.

3. Классы функций ограниченной вариации.

4. Линейное пространство $BV[a,b]$.

5. Свойства функций ограниченной вариации.

6. Аддитивность вариации функции относительно отрезка.

7. Разложение Жордана функции ограниченной вариации. Следствия.

8. Определение интеграла Стилтьеса.

9. Теорема о существовании интеграла Стилтеса от непрерывной функции.

10. Свойства интеграла Стилтьеса.

!!. Формулы для вычисления интеграла Стилтьеса.

# ЗАДАНИЯ ПО ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Задачи на 06.04.2020. [6], № 4334, 4373, 4384, 4392, 4394.

Задачи на 10.04.2020.

1. Остались задачи. [6], № 3712, 3729, 3730, 3777.

2. Новые задачи. [6], 3720, 3742, 3754, 3757, 3760, 3788, 3793, 3799. Добавлена задача по ортопроекторам.

Задача. Пусть $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и $x + iy = r \exp^{i\theta}$. Покажите, что ядро Пуассона

$$P(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}, \quad 0 \le r < 1, \ \theta \in [-\pi, \pi],$$

в области определения обладает следующими свойствами

1. $P(r, \theta) > 0$,

2. функция $P(r, \theta)$ является чётной относительно $\theta$.

2. для любого $r < 1: \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta) d\theta = 1$,

3. для любого $\delta > 0: \quad \lim_{r\to 1} \sup\{P(r, \theta): \ \delta \le |\theta| \le \pi\} = 0$.

4. Постройте график функции $P(r, \theta)$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, как функции от $\theta$ при фиксированном $r$. Что происходит с этим графиком при $r \to 1$? Что происходит с площадью, которую ограничивает график этой функции, при $r \to 1$?

5. функция $P(r, \theta)$ как функция переменных $(x, y)$ является гармонической в области определения, то есть внутри единичного круга.

6. Пусть $\Gamma := \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ - единичная окружность с центром в начале координат. Пусть $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ и $f \in C(\Gamma)$. Если считать, что $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy = e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi]\}$, то тогда $f = f(\varphi), \varphi \in [0, 2\pi]$ и $f \in C[0, 2\pi], f(0) = f(2\pi)$. Покажите, что функция

$u(re^{i\theta}) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - \varphi) f(\varphi) d\varphi, \ 0 \le r < 1, \ \ u(e^{i\theta} = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi]\}$

непрерывна в единичном круге $K := \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$, гармонична внутри $K$ и $u = f$ на $\Gamma = \partial K$.

Задачи на 13.04.2020.

1. [6] № 4391.

2. Пусть $L$ - $m$-мерное линейное пространство и $\omega \in \Lambda^k(L)$, где $k$ - нечётное $k \le m$. Докажите, что $\omega \bigwedge \omega = 0$.

3. Пусть $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^m)$ и имеет вид

$$\omega = dx^1 \bigwedge dx^2 + dx^3 \bigwedge dx^4 + ... + dx^{(2m-1)} \bigwedge dx^{2m}.$$

Чему равна $m$-я внешняя степень формы $\omega$, то есть $\omega \bigwedge \omega \bigwedge ... \bigwedge \omega$ ( $m$ - раз).

4. Пусть $\varphi, \psi$ и $\theta$ формы в $\mathbb{R}^3$, имеющие вид

$$\phi = dx - dy, \ \psi = dx \bigwedge dy + dy \bigwedge dz, \ \theta = dy$$

Найдите $\varphi \bigwedge \psi, \ \theta \bigwedge \varphi \bigwedge \psi$.

5. Из предыдущих заданий [6] № 4331, 4332, 4393, 4383.

Задачи на 17.04.2020.

1. Остались задачи. [6], 3720, 3742, 3754, 3757, 3760, 3788, 3793, 3799.

2. Новые задачи. [6], 3771, 3743, 3760.1, 3765, 3779, 3804, 3840.

3. Задача. Пусть $H$ - прстранство Гильберта и $E(t), \ a \leq t \leq b, \ a, b \in \mathbb{R}$, - функция, значениями которой являются ортопроекторы в $H$ , то есть $E^2(t) = E(t), \ E^*(t) = E(t)$. Пусть, далее, функция $E(t)$ обладает следующими свойствами

а) $\alpha) E(a) = 0, \ E(b) = I$;

б) $\beta)$ для любых $t_1, t_2 \in [a, b]$, таких, что $t_1 < t_2$, спаведливо неравенстао $E(t_1) \leq E(t_2)$;

в) приведите примеры таких функций для $\mathbb{R}^m$ и $L^2[a, b]$;

г) покажите, что в пространстве $\mathbb{R}^m$ таких непрерывных функций не существует.

Задача. Рассмотрим уравнение малых колебаний конечной струны с закреплёнными концами:

$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ u(0, t) = u(\pi, t), \ \ 0 \leq x \leq \pi, \ t \in [0, +\infty)$.

Покажите, что

1) для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $\sin nx \cos(nt - \alpha)$, где $A$ - амплитуда колебания, а $\alpha$ - сдвиг по фазе, является решением этой задачи;

2) конечная сумма таких функций тоже является решением этой задачи.

Задачи на 20.04.2020.

1. Задача. Пусть $G$ - область в $\mathbb{R}^n_x$, $D$ - область в $\mathbb{R}^m_y$, $f : G \to D$, и $f \in C^\infty(G)$. Покажите, что

$a)$ $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*\omega_1 + f^*\omega_2$ для любых $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(D)$.

$b)$ $f^*(g\omega) = \ f^*(g)f^*(\omega)$ для любых $g \in \Omega^0(D), \ \omega \in \Omega^k(D)$.

$c)$ $f^*(\omega \bigwedge \varphi) = \ f^*(\omega) \bigwedge f^*(\varphi)$ для любых $\omega \in \Omega^k(D), \ \varphi \in \Omega^l(D)$.

$d)$ $d(\omega_1 + \omega_2) = \ d(\omega_1) + d(\omega_2)$ для любых $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(D)$.

$e)$ $d(\omega \bigwedge \varphi) = \ (d\omega) \bigwedge \varphi + \omega \bigwedge (-1)^k d\varphi$ для любых $\omega \in \Omega^k(D), \ \varphi \in \Omega^l(D)$.

$f)$ $d(d\omega) = \ d^2(\omega) = 0$ для любой внешней формы $\omega \in \Omega^k(D)$.

$g)$ $d(f^*\omega) = \ f^*(d\omega) = 0$ для любой внешней формы $\omega \in \Omega^k(D)$.

$h)$ Если $n = m$, то

$f^*(dy^1 \bigwedge dy^2 \bigwedge ... \bigwedge dy^m) = \frac{\partial(f^1, f^2, ..., f^m)}{\partial(x^1, x^2, ..., x^m)}(x) dx^1 \bigwedge dx^2 \bigwedge ... \bigwedge dx^m$.

1. Задача. Пусть $G = \{(r, \varphi) : r > 0, \ 0 < \varphi < 2\pi\}$ - область в $\mathbb{R}^2$ с координатами $(r, \varphi)$ и $D$ - область в $\mathbb{R}^2$ с координатами $(x, y)$, имеющая вид $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : 0 \le x < \infty, \ y = 0\}$. Отображение $f : G \to D$ имеет вид $x = r\cos\varphi, \ y = r\sin\varphi$. Найдите $f^*\omega$, если

$\omega(x, y) := \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, то есть $\omega(x, y) := \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$.

Задачи на 24.04.2020.

1. Остались задачи: [6], № 3743, 3760.1, 3765, 3771, 3779, 3804, 3840.

2. Новые задачи: [6], 3766, 3780, 3789, 3790, 3825, 3826.

3. Добавлен пункт 5. в задаче о ядре Пуассона $P(r, \theta)$ из задания на 10.04.2020.

4. 3. Добавлен пункт г) в задаче о функции $E(t)$ из задания на 17.04.2020.

5. Задача. Покажите, что функция

$G(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}, \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0, a-$ параметр, $a > 0$,

в области определения обладает следующими свойствами

а) является решением уравнения теплопроводности $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$,

б) $G(x, t) > 0$,

в) функция $G(x, t)$ является чётной относительно $x$.

г) для любого $t > 0 :$ $\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, t) dx = 1$,

д) для любого $\delta > 0 :$

$lim_{t \to +0} \sup\{G(x, t) : \ |x| > \delta\} = 0, \ lim_{t \to +0} \int_{|x| > \delta} G(x, t) dx = 0$

е) постройте график функции $G(x, t), x \in \mathbb{R}$ как функции от $x$ при фиксированном $t$. Что происходит с этим графиком при $t \to +0$? Что происходит с площадью, которую ограничивает график этой функции, при $t \to +0$?.

ё) сравните свойства функции $G(x, t)$ со свойствами ядра Пуассона $P(r, \theta)$ из задания на 10.04.2020.

Задачи на 27.04.2020.

1. Задача. Установите связь между разными координатными представлениями дифференциальной $l-$формы на $k-$поверхности в $\mathbb{R}^m$.

2. Задача. Покажите, Что каждую $l-$форму, определённую на локальной карте $k-$поверхности, можно локально перенести на эту поверхность.

3. Задача. Найти разложение, приведенной на занятии 1-формы на 1-поверхности в $\mathbb{R}^2$ по базисным формам $dx$ и $dy$.

4. Задачи: [6], 4263, 4273 4335, 4396, 4446.

5. Проработать пункты 5, 6, 7 из раздела XXI в списке вопросов к экзамену ( 4 стр.).

Задачи на 01.05.2020.

I. Остались задачи:

a)[6], № 3765, 3766, 3771, 3779, 3780, 3804, 3840.

b) пункт 5. в задаче о ядре Пуассона $P(r,\theta)$ из задания на 10.04.2020.

c) пункт г) в задаче о функции $E(t)$ из задания на 17.04.2020.

d) Задача. Покажите, что функция

$G(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, a-$ параметр, $a > 0$,

в области определения обладает следующими свойствами

$d_1$) является решением уравнения теплопроводности $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$,

$d_2$) $G(x,t) > 0$,

$d_3$) функция $G(x,t)$ является чётной относительно $x$.

$d_4$) для любого $t > 0: \quad \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,t)dx = 1$,

$d_5$) для любого $\delta > 0:$

$$lim_{t\to+0}\sup\{G(x,t):\ |x| > \delta\} = 0,\ lim_{t\to+0}\int_{|x|>\delta} G(x,t)dx = 0$$

$d_6$) постройте график функции $G(x,t), x \in \mathbb{R}$ как функции от $x$ при фиксированном $t$. Что происходит с этим графиком при $t \to +0$? Что происходит с площадью, которую ограничивает график этой функции, при $t \to +0$?.

$d_7$) сравните свойства функции $G(x,t)$ со свойствами ядра Пуассона $P(r,\theta)$ из задания на 10.04.2020.

II. Новые задачи:

1)[6], № 3791, 3794, 3807, 3810 3813;

2) вычислите интеграл Лапласа, дифференцируя по параметру интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(1+x^2)}dx;$$

3) вычислите интеграл Фруллани при условии, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

3а) функция $f(x)$ определена и непрерывно дифференцируема на полуоси $[0, +\infty)$,

3б) $a,\ b \in (0, +\infty)$,

3с) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

4. Проработать пункты 16, 17 из раздела XXII в списке вопросов к экзамену ( 5 стр.).

Задачи на 04.05.2020.

1. Задача. Найти разложение, приведенной на занятии 1-формы на 1-поверхности в $\mathbb{R}^2$ по базисным формам $dx$ и $dy$.

2. Остались задачи: [6], 4335, 4396.

3. Новые задачи: [6], 4369, 4441, 4442, 4457.1.

4. Задача (Свойства операции переноса дифференциальных форм с $k-$поверхности на локальную карту; свойства внешнего дифференциала на $k-$поверхности в $\mathbb{R}^m$). Пусть $M$ - $k-$поверхность в $\mathbb{R}^m_x$, и $(V, M_U, \varphi), V \in \mathbb{R}^k_t$, - произвольная локальная карта $M$. Покажите, что

$a)$ $\varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*\omega_1 + \varphi^*\omega_2$ для любых $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^l(M)$.

$b)$ $\varphi^*(g\omega) = \varphi^*(g)\varphi^*(\omega)$ для любых $g \in \Omega^0(M),\ \omega \in \Omega^l(M)$.

$c)$ $\varphi^*(\omega \bigwedge \chi) = \varphi^*(\omega) \bigwedge \varphi^*(\chi)$ для любых $\omega \in \Omega^l(M),\ \chi \in \Omega^r(M)$.

$d)$ $d(\omega_1 + \omega_2) = d(\omega_1) + d(\omega_2)$ для любых $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^l(M)$.

$e)$ $d(\omega \bigwedge \chi) = (d\omega) \bigwedge \chi + (-1)^l \omega \bigwedge d\chi$ для любых $\omega \in \Omega^l(M),\ \chi \in \Omega^r(M)$.

$f)$ $d(d\omega) = d^2(\omega) = 0$ для любой внешней формы $\omega \in \Omega^l(M)$.

$g)$ $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega) = 0$ для любой внешней формы $\omega \in \Omega^l(M)$.

5. Почему требование ориентируемости $k-$поверхности является необходимым для корректного определения интеграла от $k-$формы, заданной на $k-$поверхности в $\mathbb{R}^m$.

6. Докажите независимость интеграла от $k-$формы, заданной на $k-$поверхности в $\mathbb{R}^m$, от выбора разбиения единицы на этой поверхности.

7. Проработать пункты 9 - 13 из раздела XXI в списке вопросов к экзамену ( 4 стр.).

Задачи на 08.05.2020.

1. Задачи:[6], № 3843, 3848, 3849, 3852, 3861, 3872,

2. 6 пункт в задачах о свойствах ядра Пуассона на 6 стр.

Задачи на 11.05.2020.

1. Задачи:[6], № 3433, 3438, 3465, 3483, 3484,

2. Проработать пункты 1 и 2 из раздела XXIII в списке вопросов к экзамену ( 5 стр.).

Задачи на 13.05.2020.

1. Задачи:[6], № 3068, 3072, 3077, 3081, 3082, 3083, 3089, 3090.

2. Довести до конца доказательство формулы Валлиса ( см. 2-й том из трёхтомника Фихтенгольца Г.М., 145 стр. )

3. Проработать вопросы из раздела XXIV в списке вопросов к экзамену ( 6 стр.).

Задачи на 18.05.2020.

1. Задачи:[6], № 3468, 3478, 3493, 3501.

2. Четыре задачи, сформулированные на занятии.

3. Проработать вопросы из раздела XXIII в списке вопросов к экзамену ( 5 стр.).

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чём совпадают (и в чём отличаются) теоремы о непрерывности, интегрируемости по параметру, дифференцируемости по параметру для собственных и несобственных интегралов, зависящих от параметра.

2. По аналогии со связью несобственных интегралов с числовыми рядами установить связь между несобственными интегралами (первого и второго рода), зависящих от параметра, с функциональными рядами. Ответить на следующие вопросы.

а). Какая связь между сходимостью (равномерной сходимостью) несобственного интеграла и соответствующего функционального ряда.

б). Какая связь между теоремами о непрерывности, интегрируемости, дифференцируемости для несобственных интегралов, зависящих от параметра и соотвествующих функциональных рядов.

в). В чём совпадают (и в чём отличаются) признаки равномерной сходимости для несобственных интегралов, зависящих от параметра, и соответствующих функциональных рядов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. II том, XII глава.

2. Зорич В.А. Математический анализ. II том, Математический анализ. II том, XVII глава.

3. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. II том, 7 глава.

4. Дороговцев А.Я. Математический анализ. 13 глава.

5. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. XVII глава.

6. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Отдел VII. 1962г.

7. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях (несобственные интегралы и ряды Фурье).

# ПРАВИЛА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКЗАМЕНОВ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ОНЛАЙН

1. Время, отводимое на контрольную работу (экзамен), состоит из

1а) времени, необходимого для написание работы ( в стандартной ситуации это время одной пары, то есть 1 час 20 минут),

1б) времени, необходимого для подготовки работы к отправлению и пересылке работы преподавателю - 20 минут, то есть суммарное время в стандартной ситуации составляет 1 час 40 минут.

2. С работ, пришедших после контрольного времени, снимаются баллы:

2а) с опозданием на 1 минуту - 1 балл,

2б) с опозданием на 2-3 минуты - 2 балла,

2в) с опозданием 3-5 минут - 5 баллов,

2г) с опозданием 6-10 минут - 10 баллов.

2д) работы, пришедшие с опозданием более 10 минут, не проверяются и оцениваются в 0 баллов.

3) В качестве контрольного времени принимается исключительно только время получения письма в компьютере преподавателя.

4) Студент, отправляющий работу на последних секундах последней минуты контрольного времени, должен полностью отдавать отчёт в возможных последствиях своих действий.

К О Н Т Р О Л Ь Н А Я   Р А Б О Т А - 1

08.04.2020

Начало: 10-00. Контрольное время: 11-45. Каждая задача оценивается в 5 баллов.

1. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема на множестве $K = \{(x, y) : -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}$. Пусть $I_r$ - граница квадрата $K_r = \{(x, y) : -r \le x \le r,\ -r \le y \le r,\ 0 < r\}$. Докажите, что

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{2\pi} \oint_{I_r} f(x, y) \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = f(0, 0),$$

при этом обход контура $I_r$ осуществляется против часовой стрелки.

2. Вычислить поверхностный интеграл 1-го рода $\int_L\int zds$, где поверхность $L$ задаётся картой $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v,\ 0 < u < a,\ 0 < v < 2\pi$.

3. Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода

$$\int_L\int xdy \wedge dz + ydz \wedge dx,$$

где $L$ - верхняя сторона поверхности $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le 1,\ z = x^2 + y^2\}$.

К О Н Т Р О Л Ь Н А Я   Р А Б О Т А - 2

06.05.2020

Начало: 10-00. Контрольное время: 11-55. Первая задача оценивается в 10 баллов, вторая и третья - в 5 баллов.

1. С помощью формулы Ньютона-Лейбница доказать формулу Гаусса-Остроградского для бруса $B = [a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times[a_3, b_3]$ в $\mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$ и заданного в брусе $B$ векторного поля
$\overrightarrow{V}(x, y, z) = P(x, y, z)\overrightarrow{i} + Q(x, y, z)\overrightarrow{j} + R(x, y, z)\overrightarrow{k} \in C^1(B)$.

2. Найти поток радиуса-вектора $\overrightarrow{r}$ через внешнюю часть поверхности

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \le z \le 1.$$

3. Приближённо найти циркуляцию векторного поля

$$\overrightarrow{a} = \frac{y}{\sqrt{z}}\overrightarrow{i} - \frac{x}{\sqrt{z}}\overrightarrow{j} + \sqrt{xy}\overrightarrow{k}$$

вдоль бесконечно малой окружности

$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \varepsilon^2, \quad 2x + y + 2z = 5,$

обход которой, если смотреть сверху, совершается против часовой стрелки.

К О Н Т Р О Л Ь Н А Я   Р А Б О Т А - 3

22.05.2020

Начало: 8-30. Контрольное время: 10-35. Первая задача оценивается в 10 баллов : 1а) - 3 балла, 1б) - 3 балла, 1в) - 1 балл, 1г) - 3 балла; вторая и третья задачи оцениваются в 5 баллов.

1. Докажите, что интеграл

$$I(p) = \int_0^\infty (e^{-x} - 1)x^{p-1}dx$$

1а) сходится для парметров $p \in (-1, 0)$,

1б) функция $I(p)$, которую этот интеграл определяет на промежутке $(-1, 0)$, бесконечно дифференцируема на этом промежутке,

1в) функция $I(p)$ является на промежутке $(-1, 0)$, выпуклой вверх (вогнутой),

1г) функция $I(p)$ на промежутке $(-1, 0)$ совпадает с гамма-функцией Эйлера, то есть $I(p) = \Gamma(p),\ p \in (-1, 0)$.

2. Преобразовать уравнение

$$(x - z)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y},$$

приняв $x$ за новую функцию, а $y$ и $z$ - за новые переменные.

3. Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^3.$$

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1.Задача. Геометрический смысл нормы разности двух ортопроекторов.

Пусть $H$ - линейное пространство со скалярным произведением, $L_1$, $L_2$ - линейные подпространства в $H$. Пусть $P_j$ - ортопроектор на $L_j, j = 1, 2$. Докажите, что

$$\|P_1 - P_2\| =$$

$$\max\{\sup\{\ \|(I-P_1)f\| : f \in L_2, \|f\| = 1\}, \sup\{\|(I-P_2)f\| : f \in L_1, \|f\| = 1\}\ \}.$$

Отсюда следует, что $\|P_1 - P_2\|$ можно рассматривать как величину, которая характеризует взаимное расположение подпространств $L_1$ и $L_2$ относительно друг друга, то есть как величину, измеряющую угол между ними. Почему?

2.Задача. Пусть $H$ - линейное пространство со скалярным произведением, $L_1$, $L_2$ - линейные подпространства в $H$. Пусть $P_j$ - ортопроектор на $L_j, j = 1, 2$.. Сформулируйте в терминах подпространств $L_1$ и $L_2$ необходимые и достаточные условия для того, чтобы

а) произведение ортопроекторов $P_1P_2$ являлось ортопроектором,

б) разность ортопроекторов $P_1 - P_2$ являлась ортопроектором.

в) ортопроекторы $P_1$ и $P_2$ удовлетворяли неравенству $P_1 \leq P_2$. ($P_1 < P_2$).

г) сумма ортопроекторов $P_1 + P_2$ являлась ортопроектором.

д) докажите, что разность ортопроекторов $P_1 - P_2$ является ортопроектором тогда и только тогда, когда $P_1 \geq P_2$.