Лекції з лінійної алгебри, 1 курс, 2 семестр, математика + прикладна математика, частина 6

Анна Вишнякова

Харківський національний університет ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Унітарні лінійні оператори.

Означення. Нехай E – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $U : E \to E$ – лінійний оператор. Оператор U називається унітарним, якщо $UU^* = U^*U = I$.

Теорема. Нехай E – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $U : E \to E$ – лінійний оператор. Тоді наступні три умови є еквівалентними:
1. $UU^* = U^*U = I$, тобто оператор U є унітарним.
2. Для довільних $x, y \in E$ виконується $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$.
3. Для довільних $x \in E$ виконується $\|Ux\| = \|x\|$.

Доведення. $1 \Rightarrow 2$. Нехай $UU^* = U^*U = I$, тоді для довільних $x, y \in E$ виконується $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, U^*Uy \rangle = \langle x, Iy \rangle = \langle x, y \rangle$.

$2 \Rightarrow 3$. Нехай для довільних $x, y \in E$ виконується $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$. Оберемо довільний $x \in E$ і покладемо $y = x$. Ми маємо $\langle Ux, Ux \rangle = \langle x, x \rangle$, тобто $\|Ux\| = \|x\|$.
$3 \Rightarrow 2$. Для довільних $z \in E$ виконується $\|Uz\| = \|z\|$. Нехай $x, y \in E$ – довільні вектори. За умовою ми маємо

$$\|U(x+y)\| = \|x+y\| \ \Leftrightarrow \ \langle U(x+y), U(x+y) \rangle = \langle x+y, x+y \rangle$$

$$\Leftrightarrow \ \langle Ux, Ux \rangle + \langle Ux, Uy \rangle + \langle Uy, Ux \rangle + \langle Uy, Uy \rangle =$$

$$\langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle.$$

За умовою, $\langle Ux, Ux \rangle = \langle x, x \rangle$, $\langle Uy, Uy \rangle = \langle y, y \rangle$, тобто ми отримуємо

$$\langle Ux, Uy \rangle + \langle Uy, Ux \rangle = \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Re}\, \langle Ux, Uy \rangle = \mathrm{Re}\, \langle x, y \rangle.$$

Таким чином, у випадку дійсного евклідового простору ми отримуємо, що для довільних $x, y \in E$ виконується $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$. Залишилося розглянути комплексний евклідів простір. Нехай E – комплексний евклідів простір $x, y \in E$ – довільні вектори. За умовою ми маємо

$$\|U(x+iy)\| = \|x+iy\| \;\Leftrightarrow\; \langle U(x+iy), U(x+iy) \rangle = \langle x+iy, x+iy \rangle$$

$$\Leftrightarrow\; \langle Ux, Ux \rangle - i\langle Ux, Uy \rangle + i\langle Uy, Ux \rangle + i \cdot (-i)\langle Uy, Uy \rangle =$$

$$\langle x, x \rangle - i\langle x, y \rangle + i\langle y, x \rangle + i \cdot (-i)\langle y, y \rangle \;\Leftrightarrow$$

$$\langle Ux, Ux \rangle - i\langle Ux, Uy \rangle + i\langle Uy, Ux \rangle + \langle Uy, Uy \rangle =$$

$$\langle x, x \rangle - i\langle x, y \rangle + i\langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle.$$

За умовою, $\langle Ux, Ux \rangle = \langle x, x \rangle$, $\langle Uy, Uy \rangle = \langle y, y \rangle$, тобто ми отримуємо

$$-i\langle Ux, Uy\rangle + i\langle Uy, Ux\rangle = -i\langle x, y\rangle + i\langle y, x\rangle \;\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{Re}\,(-i\langle Ux, Uy\rangle) = \mathrm{Re}\,(-i\langle x, y\rangle) \;\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{Im}\,(\langle Ux, Uy\rangle) = \mathrm{Im}\,(\langle x, y\rangle).$$

Тобто ми довели, що для довільних $x, y \in E$ виконується $\mathrm{Re}\,\langle Ux, Uy\rangle = \mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle$ і $\mathrm{Im}\,(\langle Ux, Uy\rangle) = \mathrm{Im}\,(\langle x, y\rangle)$. Звідки, для довільних $x, y \in E$ виконується $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$.

$2 \Rightarrow 1$. Нехай для довільних $x, y \in E$ виконується $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$. Ми маємо

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle = \langle x, y\rangle \;\Leftrightarrow\; \langle Ix, y\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle$$

для довільних $x, y \in E$. Ми отримали, що $U^*U = I^* = I$.

Оскільки простір E є скінченновимірним, ми маємо $U^*U = I \Leftrightarrow UU^* = U^*U = I$ (пояснення!). Теорему доведено. $\square$

Твердження. Нехай E – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $U : E \to E$ – лінійний оператор, $UU^* = U^*U = I$. Нехай $\lambda_0 \in F$ – власне число U, тобто $\chi_U(\lambda_0) = 0$. Тоді $|\lambda_0| = 1$.

Доведення. Ми маємо $\chi_U(\lambda_0) = 0 \;\Rightarrow\; \exists x_0 \in E, x_0 \neq \theta : \; Ux_0 = \lambda_0 x_0$, а оскільки $\|Ux_0\| = \|x_0\|$, то отримуємо $\|\lambda_0 x_0\| = \|x_0\|$, звідки $|\lambda_0|\|x_0\| = \|x_0\| \;\Rightarrow\; |\lambda_0| = 1$. $\square$

Твердження. Нехай E – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A : E \to E$ – лінійний оператор. Нехай $V < E$ – підпростір, який є інваріантним для оператора A і для оператора A^*, тобто $A : V \to V, \quad A^* : V \to V$. Тоді $V^\perp$ є також інваріантним для оператора A і для оператора A^*, тобто $A : V^\perp \to V^\perp, \quad A^* : V^\perp \to V^\perp$.

Доведення. Нехай $x \in V^{\perp}, y \in V$ – довільні вектори. Тоді ми маємо

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^{*}y \rangle = 0,$$

тому що за умовою $\forall y \in V$ виконується $A^{*}y \in V$. Тобто $\forall x \in V^{\perp}$ виконується $Ax \in V^{\perp}$.

$$\langle A^{*}x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = 0,$$

тому що за умовою $\forall y \in V$ виконується $Ay \in V$. Тобто $\forall x \in V^{\perp}$ виконується $A^{*}x \in V^{\perp}$. Твердження доведено. $\square$

Спектральна теорема для унітарних операторів в комплексному евклідовому просторі. Нехай E – комплексний евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $U : E \to E$ – лінійний оператор. Умова $UU^* = U^*U = I$ виконується тоді і тільки тоді, коли існує ортонормований базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ простору E, такий що

$$U_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

при цьому $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \ldots = |\lambda_n| = 1$.

Доведення. 1. Припустимо, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормований базис простору E, такий що

$$U_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

при цьому $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \ldots = |\lambda_n| = 1$. Оскільки цей базис є ортонормованим, щоб побудувати матрицю U_e^*, треба матрицю U_e транспонувати і кожен елемент матриці комплексно спрягнути. Отже, ми маємо

$$U_e^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda}_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda}_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{\lambda}_n \end{pmatrix}.$$

Отже, ми отримуємо

$$U_eU_e^* = U_e^*U_e = \begin{pmatrix} \lambda_1\overline{\lambda}_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2\overline{\lambda}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\overline{\lambda}_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n\overline{\lambda}_n \end{pmatrix} = I,$$

так як для кожного $j = 1, 2, \dots, n$ маємо $\lambda_j\overline{\lambda}_j = |\lambda_j|^2 = 1$. Ми довели, що $UU^* = U^*U = I$.

2. Припустимо, що $UU^* = U^*U = I$. Будемо доводити теорему індукцією по $n = \dim E$.
2.1. База індукції $n = 1$. Оберемо довільний e_1 – ортонормований базис E. Нехай $U_e = (\lambda_1)$, $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, тобто $Ue_1 = \lambda_1 e_1$. З $UU^* = U^*U = I$ маємо $|\lambda_1| = 1$. Базу індукції доведено.

2.2. Індуктивний перехід $n-1 \rightsquigarrow n$, $n = 2, 3, \ldots$ Тобто ми вважаємо, що для евклідових просторів розмірності $n-1$ теорема виконується. Нехай $\dim E = n$, $U : E \to E$ – лінійний оператор, $UU^* = U^*U = I$. Ми маємо $\chi_U(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$, $\deg \chi_U = n \in \mathbb{N}$. Тобто, з основної теореми алгебри, існує $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, $\chi_U(\lambda_1) = 0$. Звідси існує $e_1 \in E, \|e_1\| = 1$, такий що $Ue_1 = \lambda_1 e_1$. З $UU^* = U^*U = I$ маємо $|\lambda_1| = 1$. Крім того, $Ue_1 = \lambda_1 e_1 \;\Rightarrow\; U^*Ue_1 = U^*(\lambda_1 e_1) \;\Rightarrow\; Ie_1 = \lambda_1 U^*(e_1) \;\Rightarrow\; U^*(e_1) = \frac{1}{\lambda_1} e_1 = \overline{\lambda}_1 e_1$.

Розглянемо $L = \mathrm{Lin}\,\{e_1\} < E$, $\dim L = 1$. Тоді для довільного $x \in L$ маємо $x = \alpha e_1$, $\alpha \in \mathbb{C}$, звідки $Ux = U(\alpha e_1) = \alpha U e_1 = \alpha\lambda_1 e_1 \in L$. Крім того, $U^*x = U^*(\alpha e_1) = \alpha U^* e_1 = \alpha\overline{\lambda}_1 e_1 \in L$. Таким чином, $U : L \to L$ і $U^* : L \to L$. За попередньою теоремою, $U : L^\perp \to L^\perp$ і $U^* : L^\perp \to L^\perp$.

Розглянемо оператор U на підпросторі $L^{\perp}$, тобто $U|_{L^{\perp}} : L^{\perp} \to L^{\perp}$. Відзначимо, що цей оператор є унітарним $U|_{L^{\perp}} \cdot U|_{L^{\perp}}^* = U|_{L^{\perp}}^* \cdot U|_{L^{\perp}} = I$ (пояснення!), а $\dim L^{\perp} = n-1$. За індуктивним припущенням, існує $e_2, e_3, \ldots, e_n$ – ортонормований базис $L^{\perp}$, такий що для кожного $j = 2, 3, \ldots, n$ виконується $Ue_j = \lambda_j e_j$, де $|\lambda_j| = 1$. Тоді $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ – ортонормований базис E, такий що для кожного $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ виконується $Ue_j = \lambda_j e_j$, де $|\lambda_j| = 1$.
Тобто ми отримали, що

$$U_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

і при цьому $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \ldots = |\lambda_n| = 1$. Теорему доведено. $\square$

Унітарні лінійні оператори у двовимірному дійсному евклідовому просторі.

Нехай $E = \mathbb{R}^2$ – евклідів простір, $U : E \to E$ – лінійний оператор, $UU^* = U^*U = I$.
Нехай $e_1, e_2 \in E$ – ортонормований базис E, $U_e = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – матриця оператора в цьому базису. Запишемо умову $UU^* = U^*U = I$ мовою матриць, беручи до уваги те, що базис є ортонормованим. Ми маємо

$$U_eU_e^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тобто ми маємо систему з чотирьох рівнянь

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \\ ca+db=0 \\ c^2+d^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \\ c^2+d^2=1 \end{cases}.$$

Добре відомо, що $a^2+b^2=1 \;\Leftrightarrow\; \exists\varphi\in\mathbb{R} : a=\cos\varphi, b=\sin\varphi$. Також $c^2+d^2=1 \;\Leftrightarrow\; \exists\psi\in\mathbb{R} : d=\cos\psi, c=\sin\psi$. Підставимо це у друге рівняння. Ми маємо

$$\cos\varphi\cdot\sin\psi+\sin\varphi\cdot\cos\psi=0 \;\Leftrightarrow\; \sin(\varphi+\psi)=0$$

$$\Leftrightarrow\; \varphi+\psi=\pi k,\; k\in\mathbb{Z}.$$

Розглянемо два випадки.
1. Нехай $\varphi+\psi=2\pi m,\; m\in\mathbb{Z}$, тобто $\psi=2\pi m-\varphi$.

Тоді ми отримуємо $a = \cos\varphi, b = \sin\varphi, d = \cos\psi = \cos(2\pi m - \varphi) = \cos\varphi, c = \sin\psi = \sin(2\pi m - \varphi) = -\sin\varphi$. Тобто матриця оператора U має вигляд $U_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.
Висновок: оператор U є оператором повороту на кут $-\varphi$ в направленні від e_1 до e_2.

2. Нехай $\varphi + \psi = \pi + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$, тобто $\psi = \pi + 2\pi m - \varphi$. Тоді ми отримуємо $a = \cos\varphi, b = \sin\varphi, d = \cos\psi = \cos(\pi + 2\pi m - \varphi) = -\cos\varphi, c = \sin\psi = \sin(\pi + 2\pi m - \varphi) = \sin\varphi$. Тобто матриця оператора U має вигляд $U_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$.

Питання: як з'ясувати, що це за оператор?

По-перше, знайдемо власні числа цього оператора. Маємо

$$\chi_{U_e}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi - \lambda & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$\lambda^2 - \lambda(\cos\varphi - \cos\varphi) - (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \lambda^2 - 1.$$

Тобто, наш оператор має два різних власних числа $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_2 = -1$. Звідти, наш оператор є діагоналізовним в базисі з власних векторів. Оскільки наш оператор є унітарним, ці вектори є ортогональними. Тобто існує ортонормований базис $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$,

$$U_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Питання: що це за оператор?

Відповідь: це оператор симетрії відносно осі $\operatorname{Lin}\{v_1\}$.

Завдання. Знайдіть вектори v_1, v_2 (вони залежать від φ).