Програма екзамену з курсу
«Топологічні векторні простори»
Весняний семестр 2019–2020 навчального року

1. Основні топологічні поняття: околи, замкнені множини, внутрішність, замикання, неперервні функції (повторити).
2. Поточкову збіжність функцій не можна задати нормою.
3. Фільтри та бази фільтрів: аксіоматика та приклади.
4. Центровані системи множин: продовження до фільтру.
5. Границі по фільтру. Приклади.
6. Граничні точки. Зв'язок з границями.
7. Порівняння фільтрів. Зв'язок з границями та граничними точками.
8. Образ фільтра.
9. Границя фільтра. Зв'язок між границею образу фільтра та границею функції за фільтром.
10. Впорядковані множини та лема Цорна (повторити).
11. Ультрафільтри. Теорема існування.
12. Центровані системи і компактність.
13. Критерій ультрафільтра.
14. Критерії компактності в термінах фільтрів.
15. Топологія, що породжена сім'єю відображень.
16. Тихонівська топологія на декартовому добутку. Теорема Тихонова про добуток компактів.
17. Декартова степінь множини. Тихонівська топологія на декартовій степені.
18. Секвенціальні та топологічні властивості. Приклади.
19. Означення топологічного векторного простору. Властивості околів нуля.
20. Критерій відокремлюваності за Гаусдорфом в топологічному векторному просторі.
21. Приклади: простори $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ та $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$.
22. Критерій метризовності топологічного векторного простору.
23. Послідовності Коші, фільтри Коші, повні множини і повні топологічні векторні простори. Властивості.

24. Передкомпакти і компакти в топологічному векторному просторі.
25. Обмежені множини. Властивості.
26. Неперервні лінійні оператори. Зв'язок з обмеженими операторами.
27. Критерії неперервності лінійного функціонала.
28. Опуклі множини та теорема Гана–Банаха в геометричній формі для топологічних векторних просторів.
29. Теорема про ізоморфізм скінченновимірних просторів однакової вимірності.
30. Факторпростір.
31. Локально опуклі простори та півнорми.
32. Критерій неперервності лінійного функціонала в термінах півнорм.
33. Теорема Гана–Банаха про продовження.
34. Простори $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $C^{\infty}[a,b]$, $\mathcal{H}(D)$.
35. Підпростори скінченої ковимірності та лінійні функціонали (параграф 5.3.3).
36. Слабкі топології.
37. Лема про перетин ядер.
38. Неперервні в слабкій топології функціонали.
39. Інтерполяційна теорема Ейдельгейта та її застосування.
40. Передкомпактність і обмеженість. Клас Монтеля.
41. Загальна концепція двоїстості. Слабкі топології.
42. Теорема про загальний вигляд слабко неперервного функціонала.
43. Співпадіння слабкої замкнености та замкнености опуклих множин.
44. Поляри. Анулятори. Приклади. Властивості поляр.
45. Абсолютно опукла оболонка множини.
46. Теорема про біполяру. Наслідки.
47. Алгебраїчно спряжений оператор та спряжений оператор.
48. Формула для прообразу поляри.
49. Критерій слабкої неперервності лінійного оператора.
50. Критерій спряжености оператора.

51. Критерій ін'єктивності оператора.
52. Теорема Алаоглу.
53. w^*-збіжність у банахових просторах. Теорема Банаха-Штейнгауза (формулювання).
54. Критерій w^*-збіжності (загальний).
55. Критерії w^*-збіжності в c_0 і ℓ_p.
56. Другий спряжений простір.
57. Теорема Голдстайна.
58. Слабка топологія банахового простору та слабка збіжність.
59. Властивості слабкої збіжності.
60. Критерій слабкої збіжності (загальний).
61. Слабка збіжність і покоординатна збіжність в просторах з базисом і просторах послідовностей.
62. Критерій слабкої збіжності в $C(K)$.
63. Теорема Мазура про слабко збіжні послідовності.
64. Еквівалентність слабкої та сильної неперервності оператора в банахових просторах.
65. Теорема Еберлейна–Шмульяна (формулювання).
66. Крайні точки опуклих множин. Означення і приклади.
67. Крайні підмножини. Означення, приклади і властивості.
68. Теорема Крейна–Мільмана в послабленому формулюванні.
69. Теорема щодо максимуму лінійного функціонала на опуклому компакті.
70. Теорема Крейна–Мільмана в повному формулюванні.

Література

[1] Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. (Переважно розділи 16 - 18).

[2] Köthe, Gottfried. Topological vector spaces I. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. 159. New York: Springer-Verlag.