Лекції з лінійної алгебри, 1 курс, 2 семестр, математика + прикладна математика, частина 5

Анна Вишнякова

Харківський національний університет ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Спряжений лінійний оператор в евклідовому просторі.

Теорема. Нехай E – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A : E \to E$ – лінійний оператор. Тоді існує єдиний лінійний оператор $A^* : E \to E$ такий що

$$\forall x, y \in E : \quad \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle.$$

Такий лінійний оператор A^* називається спряженим до оператора A.

Доведення. Зафіксуємо довільний вектор $y \in E$. Розглянемо функцію $f : E \to F$, яка задається формулою $f(x) = \langle Ax, y \rangle$. Перевіримо, що f – лінійний функціонал в E.

Для довільних $x_1, x_2 \in E,\ \alpha_1, \alpha_2 \in F$ виконується

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \langle A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), y\rangle = \langle \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2, y\rangle =$$

$$\alpha_1 \langle A x_1, y\rangle + \alpha_2 \langle A x_2, y\rangle = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Тобто, f – лінійний функціонал в E. З теореми про загальний вигляд лінійного функціонала в евклідовому просторі

$$\exists! z(y) \in E:\ \forall x \in E \quad f(x) = \langle x, z(y)\rangle.$$

Більш детально

$$\forall y \in E\ \ \exists! z(y) \in E:\ \forall x \in E \quad \langle Ax, y\rangle = \langle x, z(y)\rangle.$$

Ми перевіримо, що відображення $y \to z(y)$ є лінійним оператором в E.

Нехай $y_1, y_2 \in E$ – довільні вектори, $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ – довільні числа. Тоді із означення $z(y)$ ми маємо:

$$\exists! z(y_1) \in E : \ \forall x \in E \quad \langle Ax, y_1 \rangle = \langle x, z(y_1) \rangle.$$

$$\exists! z(y_2) \in E : \ \forall x \in E \quad \langle Ax, y_2 \rangle = \langle x, z(y_2) \rangle.$$

З цих двох рівностей випливає:

$$\langle Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle = \overline{\alpha}_1 \langle Ax, y_1 \rangle + \overline{\alpha}_2 \langle Ax, y_2 \rangle =$$

$$\overline{\alpha}_1 \langle x, z(y_1) \rangle + \overline{\alpha}_2 \langle x, z(y_2) \rangle = \langle x, \alpha_1 z(y_1) \rangle + \langle x, \alpha_2 z(y_2) \rangle =$$

$$\langle x, \alpha_1 z(y_1) + \alpha_2 z(y_2) \rangle, \forall x \in E.$$

Тобто, вектор $\alpha_1 z(y_1) + \alpha_2 z(y_2)$ має наступну властивість: для довільного $x \in E$ виконується $\langle Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle = \langle x, \alpha_1 z(y_1) + \alpha_2 z(y_2) \rangle$.

Із єдиності вектора $z(y)$ випливає, що $z(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2) = \alpha_1 z(y_1)+\alpha_2 z(y_2)$. Ми довели, що відображення $y \to z(y)$ є лінійним оператором в E. Будемо для цього лінійного оператора використовувати позначення A^* (замість $z(y)$ будемо писати $A^*(y)$). Ми довели, що існує лінійний оператор $A^* : E \to E$ такий що

$$\forall x, y \in E : \quad \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle.$$

Доведемо єдиність такого оператора. Нехай існує ще лінійний оператор $A^{\#} : E \to E$ такий що

$$\forall x, y \in E : \quad \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^{\#} y\rangle.$$

Тоді

$$\forall x, y \in E : \quad \langle x, A^* y\rangle = \langle x, A^{\#} y\rangle \;\Rightarrow\; \langle x, A^* y - A^{\#} y\rangle = 0.$$

Нехай $y \in E$ – довільний вектор, покладемо $x = A^* y - A^{\#} y$. Ми маємо

$$\langle A^* y - A^{\#} y, A^* y - A^{\#} y \rangle = 0 \;\Rightarrow\; A^* y - A^{\#} y = \theta.$$

Тобто для довільного $y \in E$ виконується $A^* y = A^{\#} y$, що означає $A^* = A^{\#}$. Єдиність доведено.
Теорема доведена. $\square$

Властивості спряженого оператора.

1. $I^* = I$, так як $\forall x, y \in E : \quad \langle Ix, y \rangle = \langle x, Iy \rangle$.
2. Для довільних лінійних операторів A, B виконується

$$(A + B)^* = A^* + B^*$$

(доведіть це!).

3. Для довільних лінійних операторів A, B виконується

$$(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*.$$

Для $\forall x, y \in E$ ми маємо

$$\langle (A \cdot B)x, y \rangle = \langle A(Bx), y \rangle = \langle Bx, A^* y \rangle = \langle x, B^* A^* y \rangle.$$

4. Для довільного лінійного оператора A і довільного скаляра $\lambda \in F$ виконується

$$(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$$

(доведіть це!).

Твердження. Нехай E – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A : E \to E$ – лінійний оператор. Тоді виконується

$$\mathrm{Ker}\ A^* = (\mathrm{Im}\ A)^\perp, \quad \mathrm{Im}\ A^* = (\mathrm{Ker}\ A)^\perp.$$

Доведення. Доведемо першу із цих властивостей, другу доведіть самостійно. Нехай $x \in E$ – довільний вектор простору, $y \in \mathrm{Ker}\ A^*$ – довільний вектор $\mathrm{Ker}\ A^*$. Ми маємо

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle = \langle x, \theta\rangle = 0,$$

тобто

$$y \in \{Ax \mid x \in E\}^\perp \;\Leftrightarrow\; y \in (\mathrm{Im}\ A)^\perp.$$

Ми довели, що $\mathrm{Ker}\ A^* \subset (\mathrm{Im}\ A)^\perp$.

Нехай $z \in (\mathrm{Im}\ A)^{\perp}$ – довільний вектор $(\mathrm{Im}\ A)^{\perp}$. Це означає, що

$$\forall y \in \mathrm{Im}\ A \quad \langle y, z\rangle = 0 \ \Leftrightarrow\ \forall x \in E \quad \langle Ax, z\rangle = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in E \quad \langle x, A^{*}z\rangle = 0 \ \Leftrightarrow\ A^{*}z = \theta \ \Rightarrow\ z \in \mathrm{Ker}\ A^{*}.$$

Ми довели, що $(\mathrm{Im}\ A)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}\ A^{*}$, тобто $\mathrm{Ker}\ A^{*} = (\mathrm{Im}\ A)^{\perp}$. $\square$

Теорема. Нехай E – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A : E \to E$ – лінійний оператор. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормований базис E, позначимо через $A_e = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $A_e^{*} = (\tilde{a}_{ij})_{i,j=1}^{n}$. Тоді

$$\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \tilde{a}_{ij} = \overline{a}_{ji},$$

тобто

$$A_e^{*} = \overline{A_e}^{t}.$$

Доведення. Оберемо довільні $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ми маємо

$$\langle Ae_i, e_j\rangle = \langle e_i, A^* e_j\rangle \;\Leftrightarrow\; \langle a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \dots + a_{ni}e_n, e_j\rangle =$$

$$\langle e_i, \tilde{a}_{1j}e_1 + \tilde{a}_{2j}e_2 + \dots + \tilde{a}_{nj}e_n\rangle \;\Rightarrow\; a_{ji} = \bar{\tilde{a}}_{ij}.$$

Теорема доведена. □

Таким чином, якщо матриця оператора A задана в ортонормованому базисі, то, щоб побудувати матрицю оператора A^*, треба матрицю A транспонувати і взяти комплексне спряження у кожного елемента. Таку операцію над матрицями (транспонування і взяття комплексного спряження у кожного елемента) позначають зірочкою (тобто, якщо $B \in \mathrm{Mat}\,(n \times n, F)$, де $F = \mathbb{R} \,\vee\, F = \mathbb{C}$, то $B^* = \overline{B}^t$).

Самоспряжені лінійні оператори.

Означення. Нехай E – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A : E \to E$ – лінійний оператор. Лінійний оператор називається самоспряженим, якщо $A^* = A$, тобто якщо

$$\forall x, y \in E : \quad \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

Питання: якщо матриця лінійного оператора виписана в ортонормованому базисі, то з якої властивості матриці випливає самоспряженість лінійного оператора?

Твердження. Нехай E – комплексний евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A : E \to E$ – лінійний оператор, $A^* = A$. Нехай $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ – власне число оператора A, тобто $\chi_A(\lambda_0) = 0$. Тоді $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Доведення. Нам відомо, що $\chi_A(\lambda_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; \exists x_0 \in E, x_0 \neq \theta :$ $Ax_0 = \lambda_0 x_0$. Звідки отримуємо

$$\langle Ax_0, x_0 \rangle = \langle x_0, Ax_0 \rangle \;\Leftrightarrow\; \langle \lambda_0 x_0, x_0 \rangle = \langle x_0, \lambda_0 x_0 \rangle \;\Leftrightarrow$$

$$\lambda_0 \langle x_0, x_0 \rangle = \overline{\lambda}_0 \langle x_0, x_0 \rangle \;\Rightarrow\; \lambda_0 = \overline{\lambda}_0 \;\Rightarrow\; \lambda_0 \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Твердження. Нехай E – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A :$ $E \to E$ – лінійний оператор, $A^* = A$. Нехай $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$ – власні числа оператора A, тобто $\chi_A(\lambda_1) = 0, \chi_A(\lambda_2) = 0$. Нехай $x_1, x_2 \in E, x_1 \neq \theta, x_2 \neq \theta$ – відповідні власні вектори оператора A, тобто $Ax_1 = \lambda_1 x_1, Ax_2 = \lambda_2 x_2$. $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$.

Доведення. Ми маємо $\langle Ax_1, x_2\rangle = \langle x_1, Ax_2\rangle \Rightarrow \langle \lambda_1 x_1, x_2\rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2\rangle \Rightarrow \lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle \Rightarrow \langle x_1, x_2\rangle = 0$, так як $\lambda_1 \neq \lambda_2$. □

Означення. Нехай L – лінійний простір над полем F, $A : L \to L$ – лінійний оператор, $U < L$. Підпростір U називається інваріантним для оператора A, якщо $A : U \to U$, тобто $\forall u \in U$ виконується $A(u) \in U$.

Твердження. Нехай E – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A : E \to E$ – лінійний оператор, $A^* = A$. Нехай $U < E$ – інваріантний підпростір для оператора A, тобто $A : U \to U$. Тоді $U^\perp$ також є інваріантним підпростором для оператора A, тобто $A : U^\perp \to U^\perp$.

Доведення. Розглянемо довільний $x \in U^{\perp}$. Тоді для кожного $y \in U$ ми маємо $\langle x, y \rangle = 0$. Із цього отримуємо $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = 0$, так як за умовою $Ay \in U$. Тобто $A : U^{\perp} \to U^{\perp}$. □

Спектральна теорема для самоспряжених операторів в комплексному евклідовому просторі. Нехай E – комплексний евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A : E \to E$ – лінійний оператор. Умова $A^* = A$ виконується тоді і тільки тоді, коли існує ортонормований базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ простору E, такий що

$$A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

при цьому $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Доведення. 1. Припустимо, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормований базис простору E, такий що

$$A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

при цьому $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Оскільки цей базис є ортонормованим, то для того, щоб побудувати матрицю A_e^* в цьому базисі, треба матрицю A_e транспонувати і кожен елемент матриці комплексно спрягнути. Матриця A_e є симетричною, тобто вона не змінюється при транспонуванні. Крім того, матриця A_e є дійсною, тобто вона не змінюється при комплексному спряженні. Ми отримали $A_e^* = A_e$, тобто $A^* = A$.

2. Припустимо, що $A^* = A$. Будемо доводити теорему індукцією по $n = \dim E$.
2.1. База індукції $n = 1$. Оберемо довільний e_1 – ортонормований базис E. Нехай $A_e = (\lambda_1)$, $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, тобто $Ae_1 = \lambda_1 e_1$. Оскільки $A^* = A$, маємо $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Базу індукції доведено.

2.2. Індуктивний перехід $n - 1 \rightsquigarrow n$, $n = 2, 3, \dots$ Тобто ми вважаємо, що для евклідових просторів розмірності $n-1$ теорема виконується. Нехай $\dim E = n$, $A : E \to E$ – лінійний оператор, $A^* = A$. Ми маємо $\chi_A(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$, $\deg \chi_A = n \in \mathbb{N}$. Тобто, з основної теореми алгебри, існує $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, $\chi_A(\lambda_1) = 0$. Звідси існує $e_1 \in E, \|e_1\| = 1$, такий що $Ae_1 = \lambda_1 e_1$. Оскільки $A^* = A$, маємо $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

Розглянемо $L = \mathrm{Lin}\,\{e_1\} < E$, $\dim L = 1$. Тоді для довільного $x \in L$ маємо $x = \alpha e_1$, $\alpha \in \mathbb{C}$, звідки $Ax = A(\alpha e_1) = \alpha A e_1 = \alpha \lambda_1 e_1 \in L$.

Тобто, $A : L \to L$, а оскільки $A^* = A$, по доведеному раніше ми маємо $A : L^\perp \to L^\perp$, $\dim L^\perp = n - 1$. Розглянемо оператор A на підпросторі $L^\perp$, позначимо його $A|_{L^\perp} : L^\perp \to L^\perp$. Тоді $A|^*_{L^\perp} = A|_{L^\perp}$ (поясніть це!). За індуктивним припущенням, існує $e_2, e_3, \ldots, e_n$ – ортонормований базис $L^\perp$, такий що $\forall j = 2, 3, \ldots, n \quad A|_{L^\perp}(e_j) = A(e_j) = \lambda_j e_j$, де $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Тоді за побудовою $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормований базис простору E, такий що

$$A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

при цьому $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Теорему доведено. $\square$

Ми хочемо довести аналогічну теорему для самоспряжених лінійних операторів у дійсному евклідовому просторі. Для цього нам потрібно довести, що дійсний самоспряжений оператор має власний вектор.

Теорема. Нехай E – дійсний евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A : E \to E$ – лінійний оператор, $A^* = A$. Тоді існують вектор $x_0 \in E, x_0 \neq \theta$, і число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, такі що $Ax_0 = \lambda_0 x_0$.

Доведення. Нехай $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – ортонормований базис E. Запишемо матрицю оператора A в цьому базисі, нехай $A_u = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Розглянемо комплексний евклідів простір $\mathbb{C}^n$ і оберемо в ньому ортонормований базис $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$. Задамо лінійний оператор $B : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ за допомогою матриці A_u, а саме $(Bx)_v = A_u x_v, \ \forall x \in \mathbb{C}^n$.

Ми вже перевіряли раніше, що заданий таким чином оператор є лінійним оператором, а його матрицею в базисі $v_1, v_2, \ldots, v_n$ є $B_v = A_u$. Нагадаємо, що A_u є дійсною матрицею, і, оскільки $A^* = A$, а базис $u_1, u_2, \ldots, u_n$ є ортонормованим, маємо $A_u^t = A_u$. Тобто, оскільки $\overline{B}_v^t = B_v$, а базис $v_1, v_2, \ldots, v_n$ є ортонормованим, маємо $B^* = B$.

Ми маємо $\chi_B(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$, $\deg \chi_B = n \in \mathbb{N}$. Тобто, з основної теореми алгебри, існує $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $\chi_B(\lambda_0) = 0$. Звідси існує $z_0 \in \mathbb{C}^n$, $z_0 \neq \theta$, такий що $Bz_0 = \lambda_0 z_0$. Оскільки $B^* = B$, маємо $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Запишемо умову $Bz_0 = \lambda_0 z_0$ в координатах. Ми маємо

$$(Bz_0)_v = (\lambda_0 z_0)_v \ \Rightarrow \ B_v (z_0)_v = \lambda_0 (z_0)_v \ \Rightarrow \ A_u (z_0)_v = \lambda_0 (z_0)_v.$$

Введемо позначення для стовпця $(z_0)_v$: нехай $(z_0)_v = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$,

де $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, або $(z_0)_v = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix}$, де $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Оскільки вектор $z_0 \neq \theta$, маємо: $\exists j = 1, 2, \ldots, n$: $x_j \neq 0 \vee y_j \neq 0$. Ми отримали

$$A_u \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix}.$$

Оскільки A_u є дійсною матрицею, відділяючи дійсну і уявну частини в останній рівності, ми маємо

$$A_u \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A_u \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Як було відмічено, один із стовпців $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, або $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ є ненульовим. Не зменшуючи загальності, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, при цьому $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Повернемося до нашого дійсного евклідового простору E. Розглянемо в ньому вектор $x_0 = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n \in E$, тобто

$(x_0)_u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Із

$$A_u \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow Ax_0 = \lambda_0 x_0, \ x_0 \neq \theta.$$

Теорему доведено $\square$

З цієї теореми ми отримуємо спектральну теорему для самоспряжених лінійних операторів у дійсному евклідовому просторі.

Спектральна теорема для самоспряжених операторів у дійсному евклідовому просторі. Нехай E – дійсний евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $A : E \to E$ – лінійний оператор. Умова $A^* = A$ виконується тоді і тільки тоді, коли існує ортонормований базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ простору E, такий що

$$A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Доведення теореми проводиться так само, як і у випадку комплексного простору, із використанням теореми про існування власного вектора у самоспряженого лінійного оператора у дійсному евклідовому просторі.

Унітарні лінійні оператори.

Означення. Нехай E – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $U : E \to E$ – лінійний оператор. Оператор U називається унітарним, якщо $UU^* = U^*U = I$.

Теорема. Нехай E – евклідів простір, $n = \dim E \in \mathbb{N}$, $U : E \to E$ – лінійний оператор. Тоді наступні три умови є еквівалентними:
1. $UU^* = U^*U = I$, тобто оператор U є унітарним.
2. Для довільних $x, y \in E$ виконується $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$.
3. Для довільних $x \in E$ виконується $\|Ux\| = \|x\|$.

Доведення. $1 \Rightarrow 2$. Нехай $UU^* = U^*U = I$, тоді для довільних $x, y \in E$ виконується $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, U^*Uy \rangle = \langle x, Iy \rangle = \langle x, y \rangle$.

$2 \Rightarrow 3$. Нехай для довільних $x, y \in E$ виконується $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$. Оберемо довільний $x \in E$ і покладемо $y = x$. Ми маємо $\langle Ux, Ux \rangle = \langle x, x \rangle$, тобто $\|Ux\| = \|x\|$.
$3 \Rightarrow 2$. Для довільних $z \in E$ виконується $\|Uz\| = \|z\|$. Нехай $x, y \in E$ – довільні вектори. За умовою ми маємо

$$\|U(x+y)\| = \|x+y\| \Leftrightarrow \langle U(x+y), U(x+y) \rangle = \langle x+y, x+y \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle Ux, Ux \rangle + \langle Ux, Uy \rangle + \langle Uy, Ux \rangle + \langle Uy, Uy \rangle =$$

$$\langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle.$$

За умовою, $\langle Ux, Ux \rangle = \langle x, x \rangle$, $\langle Uy, Uy \rangle = \langle y, y \rangle$, тобто ми отримуємо

$$\langle Ux, Uy \rangle + \langle Uy, Ux \rangle = \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, \langle Ux, Uy \rangle = \mathrm{Re}\, \langle x, y \rangle.$$

Таким чином, у випадку дійсного евклідового простору ми отримуємо, що для довільних $x, y \in E$ виконується $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$. Залишилося розглянути комплексний евклідів простір. Нехай E – комплексний евклідів простір $x, y \in E$ – довільні вектори. За умовою ми маємо

$$\|U(x+iy)\| = \|x+iy\| \Leftrightarrow \langle U(x+iy), U(x+iy) \rangle = \langle x+iy, x+iy \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle Ux, Ux \rangle - i\langle Ux, Uy \rangle + i\langle Uy, Ux \rangle + i \cdot (-i)\langle Uy, Uy \rangle =$$

$$\langle x, x \rangle - i\langle x, y \rangle + i\langle y, x \rangle + i \cdot (-i)\langle y, y \rangle \Leftrightarrow$$

$$\langle Ux, Ux \rangle - i\langle Ux, Uy \rangle + i\langle Uy, Ux \rangle + \langle Uy, Uy \rangle =$$

$$\langle x, x \rangle - i\langle x, y \rangle + i\langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle.$$

За умовою, $\langle Ux, Ux \rangle = \langle x, x \rangle$, $\langle Uy, Uy \rangle = \langle y, y \rangle$, тобто ми отримуємо

$$-i\langle Ux, Uy\rangle + i\langle Uy, Ux\rangle = -i\langle x, y\rangle + i\langle y, x\rangle \;\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{Re}\,(-i\langle Ux, Uy\rangle) = \mathrm{Re}\,(-i\langle x, y\rangle) \;\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{Im}\,(\langle Ux, Uy\rangle) = \mathrm{Im}\,(\langle x, y\rangle).$$

Тобто ми довели, що для довільних $x, y \in E$ виконується $\mathrm{Re}\,\langle Ux, Uy\rangle = \mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle$ і $\mathrm{Im}\,(\langle Ux, Uy\rangle) = \mathrm{Im}\,(\langle x, y\rangle)$. Звідки, для довільних $x, y \in E$ виконується $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$.

$2 \Rightarrow 1$. Нехай для довільних $x, y \in E$ виконується $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$. Ми маємо

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle = \langle x, y\rangle \;\Leftrightarrow\; \langle Ix, y\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle$$

для довільних $x, y \in E$. Ми отримали, що $U^*U = I^* = I$.

Оскільки простір E є скінченновимірним, ми маємо $U^*U = I \Leftrightarrow UU^* = U^*U = I$ (пояснення!). Теорему доведено. $\square$