Лекції з лінійної алгебри, 1 курс, 2 семестр, математика + прикладна математика, частина 3

Анна Вишнякова

Харківський національний університет ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Образ і ядро лінійного оператора.

Нехай L – лінійний простір над полем F, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ – лінійний оператор.

Означення. Ядром лінійного оператора A називається $\mathrm{Ker}\ A = \{x \in L \mid A(x) = \theta\}$.

Означення. Образом лінійного оператора A називається $\mathrm{Im}\ A = \{y \in L \mid \exists x \in L : A(x) = y\}$.

Твердження. Нехай L – лінійний простір над полем F, $A : L \to L$ – лінійний оператор. Тоді $\mathrm{Ker}\ A < L$ і $\mathrm{Im}\ A < L$.

Доведення. 1. Нехай $x, y \in \mathrm{Ker}\ A$, $Ax = \theta, Ay = \theta$. Нехай $\alpha, \beta \in F$. Тоді $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) = \alpha\theta + \beta\theta = \theta \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \mathrm{Ker}\ A$. Отже, $\mathrm{Ker}\ A < L$.

2. Нехай $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}\ A$, тобто існують такі $x_1, x_2 \in L$, що $A(x_1) = y_1, A(x_2) = y_2$. Нехай $\alpha_1, \alpha_2 \in F$. Тоді $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \Rightarrow \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \mathrm{Im}\ A$. Отже, $\mathrm{Im}\ A < L$. $\square$

За означенням образу лінійного оператора: лінійний оператор A є сюр'єктивним тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Im}\ A = L$.

Твердження. Лінійний оператор A є ін'єктивним тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Ker}\ A = \{\theta\}$.

Доведення. Нехай лінійний оператор A є ін'єктивним. Припустимо, що $x \in \mathrm{Ker}\ A$, тобто $A(x) = \theta$. Тоді маємо $A(x) = \theta = A(\theta) \Rightarrow x = \theta$. Отже $\mathrm{Ker}\ A = \{\theta\}$.

Припустимо, що $\mathrm{Ker}\ A = \{\theta\}$. Нехай $x, y \in L$ такі, що $A(x) = A(y)$. Тоді $A(x - y) = A(x) - A(y) = \theta$, тобто $x - y \in \mathrm{Ker}\ A = \{\theta\} \Rightarrow x = y$. Отже, A – ін'єктивний лінійний оператор. $\square$

Теорема. Нехай L – лінійний простір над полем F, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ – лінійний оператор. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис простору L, $A_e = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ – матриця лінійного оператора A в цьому базисі. Тоді

$$\dim(\mathrm{Im}\ A) = \mathrm{rg}\ A_e, \quad \dim(\mathrm{Ker}\ A) = n - \mathrm{rg}\ A_e,$$

зокрема

$$\dim(\mathrm{Im}\ A) + \dim(\mathrm{Ker}\ A) = \dim L.$$

Коментар. З твердження цієї теореми випливає, що ранг матриці лінійного оператору не залежить від вибору базису.

Доведення. Ми маємо $\mathrm{Im}\ A = \{A(x) \mid x \in L\}$. Нехай $x \in L$ – довільний вектор. Тоді цей вектор можна розкласти за базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n : x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$, $x_j \in F$, $1 \leq j \leq n$. Тоді ми маємо $A(x) = A(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n) = x_1 A(e_1) + x_2 A(e_2) + \ldots + x_n A(e_n)$, тобто

$$\forall x \in L \quad A(x) \in \mathrm{Lin}\ \{A(e_1), A(e_2), \ldots, A(e_n)\},$$

іншими словами,

$$\mathrm{Im}\ A \subset \mathrm{Lin}\ \{A(e_1), A(e_2), \ldots, A(e_n)\}.$$

Розглянемо довільний вектор $y \in \mathrm{Lin}\ \{A(e_1), A(e_2), \ldots, A(e_n)\}$, $y = \mu_1 A(e_1) + \mu_2 A(e_2) + \ldots + \mu_n A(e_n)$, $\mu_j \in F$, $1 \leq j \leq n$.

Тоді $y = A(\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \ldots + \mu_n e_n)$, тобто $y \in \mathrm{Im}\ A$. Ми довели, що

$$\mathrm{Im}\ A = \mathrm{Lin}\ \{A(e_1), A(e_2), \ldots, A(e_n)\}.$$

Звідки

$$\dim(\mathrm{Im}\ A) = \dim(\mathrm{Lin}\ \{A(e_1), A(e_2), \ldots, A(e_n)\})$$

$$= \mathrm{rg}\ \{A(e_1), A(e_2), \ldots, A(e_n)\}.$$

Для обчислення рангу перейдемо до координатного запису векторів. Нам відомо, що $(A(e_1))_e = A_e^1, (A(e_2))_e = A_e^2, \ldots,$ $(A(e_n))_e = A_e^n$. Тобто ранг системи векторів $A(e_1), A(e_2), \ldots, A(e_n)$ дорівнює стовпцевому рангу матриці оператора A_e. Отже,

$$\dim(\mathrm{Im}\ A) = \mathrm{rg}\ A_e.$$

Припустимо, що $x \in \operatorname{Ker} A$, тобто $A(x) = \theta$. Запишемо цю рівність в координатах:

$$(A(x))_e = (\theta)_e \;\Leftrightarrow A_e x_e = (\theta)_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо ми введемо позначення $x_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, (тут $x_1, x_2, \ldots, x_n$– невідомі координати вектора x), то маємо наступну рівність

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тобто, ми маємо систему n лінійних однорідних рівнянь з n невідомими, матриця цієї системи рівнянь дорівнює A_e. Як ми довели раніше, вимірність підпростору розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь дорівнює $n - \mathrm{rg}\, A_e$. □

Перетворення матриці лінійного оператора при зміні базису.

Нехай $A : L \to L$ – лінійний оператор. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – деякий базис L ("старий базис"). Нехай є ще один базис L : $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ("новий базис"). Ми хочемо дослідити, як змінюється матриця лінійного оператора при переході від старого базису до нового.

Для довільного вектору $x \in L$ ми маємо $(A(x))_e = A_e x_e$ і $(A(x))_u = A_u x_u$. Позначимо через $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n$ – (невироджену) матрицю переходу від базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ до базису $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Тоді для кожного $x \in L$ ми маємо $x_e = Tx_u, \quad x_u = T^{-1}x_e$. Ми отримуємо

$$(A(x))_e = A_e x_e \;\Rightarrow\; T^{-1}(A(x))_e = T^{-1}A_e x_e \;\Leftrightarrow\; (A(x))_u = T^{-1}A_e x_e$$

$$\Rightarrow\; (A(x))_u = T^{-1}A_e T x_u = (T^{-1}A_e T)x_u.$$

Як ми довели раніше, з цього випливає, що

$$A_u = T^{-1}A_e T.$$

Остання важлива формула є формулою перетворення матриці лінійного оператору при зміні базису.

Власні числа і власні вектори лінійного оператору.

Нехай L – лінійний простір над полем F, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ – лінійний оператор.

Питання. Чи існує $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – базис простору L, в якому матриця лінійного оператора A буде мати вигляд

$$A_u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} ? \qquad (1)$$

Тобто ми намагаємося знайти базис простору, в якому матриця лінійного оператора буде діагональною.

Нехай матриця лінійного оператора має вигляд (1). За означенням матриці лінійного оператора, ми запишемо дію оператора на базисні вектори $u_1, u_2, \ldots, u_n$:

$$A(u_1) = \lambda_1 u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + \ldots + 0 \cdot u_n = \lambda_1 u_1$$

$$A(u_2) = 0 \cdot u_1 + \lambda_2 u_2 + 0 \cdot u_3 + \ldots + 0 \cdot u_n = \lambda_2 u_2$$

$$A(u_3) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \lambda_3 u_3 + +0 \cdot u_4 + \ldots + 0 \cdot u_n = \lambda_3 u_3$$

$$\vdots$$

$$A(u_n) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + \ldots + 0 \cdot u_{n-1} + \lambda_n u_n = \lambda_n u_n.$$

Тобто, якщо матриця лінійного оператора в деякому базисі є діагональною, то кожен вектор цього базису оператор множить на деяке число.

Оскільки нульовий вектор не може входити до базису простору, ми будемо шукати усі ненульові вектори простору L, які під дією лінійного оператора A множаться на деяке число.

Означення. Вектор $x \in L, x \neq 0$, називається власним вектором лінійного оператора A, якщо існує $\lambda \in F$ таке що $A(x) = \lambda x$. При цьому λ називається власним числом оператора A (тобто, $\lambda \in F$ називається власним числом оператора A, якщо існує вектор $x \in L, x \neq 0$, такий що $A(x) = \lambda x$).

Будемо шукати власні числа і власні вектори оператора A. Розглянемо рівняння $A(x) = \lambda x$, де A – заданий лінійний оператор, $x \in L$ – невідомий ненульовий вектор, $\lambda \in F$ – невідоме число.

Виберемо $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – довільний базис простору L, і перейдемо до координатного запису:

$$A(x) = \lambda x \;\Leftrightarrow\; (A(x))_e = (\lambda x)_e \;\Leftrightarrow$$

$$A_e x_e = \lambda x_e \;\Leftrightarrow\; (A_e - \lambda I)x_e = \theta_e.$$

Ведемо позначення $A_e = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ – відома матриця оператора A в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $x_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, (тут $x_1, x_2, \ldots, x_n$– невідомі координати вектора x), і маємо наступну рівність

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тобто, ми отримали систему n лінійних однорідних рівнянь від n змінних, яка залежить від параметру λ, і ми шукаємо ненульові розв'язки цієї системи.
Питання: в якому випадку така система лінійних однорідних рівнянь має ненульовий розв'язок?

Твердження. Система n лінійних однорідних рівнянь від n змінних, яка залежить від параметру λ, вигляду $A_e x_e = \lambda x_e$ має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$\det(A_e - \lambda I) = 0.$$

У нас була система рівнянь з невідомим вектором x і невідомим скаляром λ, ми звели її до рівняння з невідомим λ. Дослідимо це рівняння.
Позначимо через

$$\chi_A(\lambda) = \det(A_e - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}.$$

Питання: якою функцією від λ є $\chi_A(\lambda)$?

Відповідь: функція $\chi_A(\lambda)$ є многочленом від λ, тобто $\chi_A(\lambda) \in F[\lambda]$, $\deg \chi_A(\lambda) = n$.

Теорема. Нехай L – лінійний простір над полем F, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ – лінійний оператор. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис простору L, і $u_1, u_2, \ldots, u_n$ базис простору L. Тоді

$$\det(A_e - \lambda I) = \det(A_u - \lambda I),$$

тобто характеристичний многочлен лінійного оператора не залежить від вибору базису.

Доведення. Нехай T – матриця переходу від базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ до базису $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Нам відомо, що $A_u = T^{-1} A_e T$. Ми маємо:

$$\det(A_u - \lambda I) = \det(T^{-1}A_eT - \lambda I) = \det(T^{-1}A_eT - T^{-1}\lambda IT)$$

$$= \det(T^{-1}(A_e - \lambda I)T) = \det(T^{-1}) \cdot \det(A_e - \lambda I) \cdot \det T =$$

$$\det(A_e - \lambda I) \cdot \det(T^{-1}) \cdot \det T = \det(A_e - \lambda I) \cdot \det(T^{-1}T)$$

$$\det(A_e - \lambda I) \cdot \det I = \det(A_e - \lambda I).$$

□

Означення. Функцію $\chi_A(\lambda)$ називають характеристичним многочленом лінійного оператора A. Рівняння $\chi_A(\lambda) = 0$ називають характеристичним рівнянням лінійного оператора A.

Зауваження. Оскільки характеристичний многочлен лінійного оператора має степінь $n = \dim L$, характеристичний многочлен має не більше за n коренів в F з урахуванням кратності.

Обчислимо деякі коефіцієнти характеристичного многочлена лінійного оператора. Нагадуємо, що

$$\chi_A(\lambda) = \det(A_e - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що старший коефіцієнт характеристичного многочлена (коефіцієнт при λ^n) дорівнює $(-1)^n$. Тобто, характеристичний многочлен має вигляд

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + b_1\lambda + b_0.$$

Питання: Чому дорівнює b_0?

Відповідь: $b_0 = \chi_A(0) = \det A$, як і усі інші коефіцієнти характеристичного многочлену, він не залежить від вибору базису.

Знайдемо коефіцієнт b_{n-1}. Будемо обчислювати визначник $\det(A - \lambda I)$ за означенням визначнику (як суму по усім підстановкам доданків елементів матриці ...) і шукати ті доданки, які містять λ^{n-1}. Усі елементи матриці $(A - \lambda I)$, які не стоять на головній діагоналі, не містять λ. А кожен елемент головної діагоналі матриці $(A - \lambda I)$ містить λ у першому степені. Тобто, якщо доданок, який входить в визначник, містить λ^{n-1}, то $n - 1$ елементів матриці взято з головної діагоналі матриці $(A - \lambda I)$. Звідки, останній, n-й елемент, теж обирається з головної діагоналі. Отже, коефіцієнт при λ^{n-1} у $\det(A - \lambda I)$ – це коефіцієнт при λ^{n-1} у добутку елементів головної діагоналі:

$$(a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) \cdot (a_{33} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda).$$

Нескладно перевірити, що коефіцієнт при λ^{n-1} у цьому добутку дорівнює

$$b_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}).$$

Як і усі інші коефіцієнти характеристичного многочлену, він не залежить від вибору базису.

Означення. Нехай $A : L \to L$ – лінійний оператор, $\dim L = n$. Слідом лінійного оператора називається коефіцієнт при λ^{n-1} в характеристичному многочлені, помножений на $(-1)^{n-1}$, тобто $\mathrm{sp} A = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}$, тут $A_e = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ – матриця оператора A в деякому базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (як ми перевірили, слід оператору не залежить від вибору базису).

Лінійна незалежність власних векторів, які відповідають різним власним числам.

Теорема. Нехай L – лінійний простір над полем F, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ – лінійний оператор. Нехай $k \in \mathbb{N}, 1 \le k \le n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in F$ – попарно різні власні числа оператора A, тобто $\forall j = 1, 2, \ldots, k \quad \chi_A(\lambda_j) = 0$, і $\lambda_i \ne \lambda_j$ при $i \ne j$ (тут $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$). Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_k \in L$ – відповідні власні вектори оператора A, тобто $\forall j = 1, 2, \ldots, k \quad A(x_j) = \lambda_j x_j$ і $x_j \ne \theta$. Тоді вектори $x_1, x_2, \ldots, x_k$ є лінійно незалежними.

Для доведення цієї теореми нам знадобиться формула для обчислення визначнику спеціального вигляду, так званого визначника Вандермонда.

Визначник Вандермонда.

Нехай $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ – задані числа. Розглянемо визначник матриці розміру $n \times n$ наступного вигляду

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \ldots & \alpha_n^3 \\ & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Цей визначник називається визначником Вандермонда.

Теорема. Нехай $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ – задані числа. Тоді виконується формула

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Доведення. Будемо проводити доведення індукцією по n.

1. База індукції $n = 2$. Маємо

$$V(\alpha_1, \alpha_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Твердження теореми доведено.

2. Індуктивний перехід $n-1 \rightsquigarrow n, n \geq 3$. Припустимо, що $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq (n-1)} (\alpha_j - \alpha_i)$. Ми маємо

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \ldots & \alpha_n^3 \\ & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{n-2} & \alpha_2^{n-2} & \alpha_3^{n-2} & \ldots & \alpha_n^{n-2} \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Зробимо наступні перетворення матриці, які не змінюють її визначник, у вказаній послідовності (кроки пронумеровано):
1. Помножимо рядок номер $(n-1)$ на $(-\alpha_n)$ і додамо до рядка номер n.
2. Помножимо рядок номер $(n-2)$ на $(-\alpha_n)$ і додамо до рядка номер $(n-1)$.
3. Помножимо рядок номер $(n-3)$ на $(-\alpha_n)$ і додамо до рядка номер $(n-2)$.

...

$n-2$. Помножимо рядок номер 2 на $(-\alpha_n)$ і додамо до рядка номер 3.
$n-1$. Помножимо рядок номер 1 на $(-\alpha_n)$ і додамо до рядка номер 2.
Ми маємо

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) :=$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 - \alpha_n & \ldots & \alpha_{n-1} - \alpha_n & 0 \\ \alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_n & \ldots & \alpha_{n-1}^2 - \alpha_{n-1}\alpha_n & 0 \\ \alpha_1^3 - \alpha_1^2\alpha_n & \ldots & \alpha_{n-1}^3 - \alpha_{n-1}^2\alpha_n & 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-2} - \alpha_1^{n-3}\alpha_n & \ldots & \alpha_{n-1}^{n-2} - \alpha_{n-1}^{n-3}\alpha_n & 0 \\ \alpha_1^{n-1} - \alpha_1^{n-2}\alpha_n & \ldots & \alpha_{n-1}^{n-1} - \alpha_{n-1}^{n-2}\alpha_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Розкриємо останній визначник за останнім стовпцем, отримуємо

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) :=$$

$$(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_n & \alpha_2 - \alpha_n & \ldots & \alpha_{n-1} - \alpha_n \\ \alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_n & \alpha_2^2 - \alpha_2 \alpha_n & \ldots & \alpha_{n-1}^2 - \alpha_{n-1} \alpha_n \\ \alpha_1^3 - \alpha_1^2 \alpha_n & \alpha_2^3 - \alpha_2^2 \alpha_n & \ldots & \alpha_{n-1}^3 - \alpha_{n-1}^2 \alpha_n \\ & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-2} - \alpha_1^{n-3} \alpha_n & \alpha_2^{n-2} - \alpha_2^{n-3} \alpha_n & \ldots & \alpha_{n-1}^{n-2} - \alpha_{n-1}^{n-3} \alpha_n \\ \alpha_1^{n-1} - \alpha_1^{n-2} \alpha_n & \alpha_2^{n-1} - \alpha_2^{n-2} \alpha_n & \ldots & \alpha_{n-1}^{n-1} - \alpha_{n-1}^{n-2} \alpha_n \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} \alpha_1-\alpha_n & \alpha_2-\alpha_n & \dots & \alpha_{n-1}-\alpha_n \\ \alpha_1(\alpha_1-\alpha_n) & \alpha_2(\alpha_2-\alpha_n) & \dots & \alpha_{n-1}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) \\ \alpha_1^2(\alpha_1-\alpha_n) & \alpha_2^2(\alpha_2-\alpha_n) & \dots & \alpha_{n-1}^2(\alpha_{n-1}-\alpha_n) \\ & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-3}(\alpha_1-\alpha_n) & \alpha_2^{n-3}(\alpha_2-\alpha_n) & \dots & \alpha_{n-1}^{n-3}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) \\ \alpha_1^{n-2}(\alpha_1-\alpha_n) & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2-\alpha_n) & \dots & \alpha_{n-1}^{n-2}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+n}(\alpha_1-\alpha_n)(\alpha_2-\alpha_n)\dots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)\cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_{n-1}^2 \\ & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-3} & \alpha_2^{n-3} & \dots & \alpha_{n-1}^{n-3} \\ \alpha_1^{n-2} & \alpha_2^{n-2} & \dots & \alpha_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+n}(\alpha_1-\alpha_n)(\alpha_2-\alpha_n)\dots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)\cdot \prod_{1\le i<j\le(n-1)}(\alpha_j-\alpha_i).$$

В останній рівності ми використали індуктивне припущення.

Тому ми маємо

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$

$$(-1)^{1+n}(\alpha_1 - \alpha_n)(\alpha_2 - \alpha_n)\ldots(\alpha_{n-1} - \alpha_n) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq (n-1)} (\alpha_j - \alpha_i) =$$

$$(\alpha_n - \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_2)\ldots(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq (n-1)} (\alpha_j - \alpha_i) =$$

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Теорему доведено. □

Наслідок. Якщо числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ є попарно різними, то $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq 0$.

Повернемось до доведення теореми про лінійну незалежність власних векторів, які відповідають різним власним числам. Нагадаємо формулювання теореми.

Теорема. Нехай L – лінійний простір над полем F, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ – лінійний оператор. Нехай $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in F$ – попарно різні власні числа оператора A, тобто $\forall j = 1, 2, \ldots, k \quad \chi_A(\lambda_j) = 0$, і $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ (тут $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$). Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_k \in L$ – відповідні власні вектори оператора A, тобто $\forall j = 1, 2, \ldots, k \quad A(x_j) = \lambda_j x_j$ і $x_j \neq \theta$. Тоді вектори $x_1, x_2, \ldots, x_k$ є лінійно незалежними.

Доведення. Припустимо, що

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k = \theta,$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in F$. Застосуємо оператор A до обох частин рівняння:

$$A(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k) = \beta_1 A x_1 + \beta_2 A x_2 + \ldots + \beta_k A x_k =$$

$$\beta_1 \lambda_1 x_1 + \beta_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + \beta_k \lambda_k x_k = A(\theta) = \theta,$$

тобто

$$\beta_1 \lambda_1 x_1 + \beta_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + \beta_k \lambda_k x_k = \theta.$$

Застосуємо оператор A до обох частин останньої рівності:

$$A(\beta_1 \lambda_1 x_1 + \beta_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + \beta_k \lambda_k x_k) =$$

$$\beta_1 \lambda_1 A x_1 + \beta_2 \lambda_2 A x_2 + \ldots + \beta_k \lambda_k A x_k =$$

$$\beta_1 \lambda_1^2 x_1 + \beta_2 \lambda_2^2 x_2 + \ldots + \beta_k \lambda_k^2 x_k = A(\theta) = \theta,$$

тобто

$$\beta_1 \lambda_1^2 x_1 + \beta_2 \lambda_2^2 x_2 + \ldots + \beta_k \lambda_k^2 x_k = \theta.$$

Аналогічно, послідовно застосовуючи оператор, ми отримаємо таку систему рівностей:

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k = \theta.$$

$$\beta_1 \lambda_1 x_1 + \beta_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + \beta_k \lambda_k x_k = \theta.$$
$$\beta_1 \lambda_1^2 x_1 + \beta_2 \lambda_2^2 x_2 + \ldots + \beta_k \lambda_k^2 x_k = \theta.$$
$$\vdots$$
$$\beta_1 \lambda_1^{k-2} x_1 + \beta_2 \lambda_2^{k-2} x_2 + \ldots + \beta_k \lambda_k^{k-2} x_k = \theta.$$
$$\beta_1 \lambda_1^{k-1} x_1 + \beta_2 \lambda_2^{k-1} x_2 + \ldots + \beta_k \lambda_k^{k-1} x_k = \theta.$$

Введемо позначення $y_j := \beta_j x_j \in L,\ 1 \leq j \leq k$. В нових позначеннях запишемо останню систему рівностей:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_k = \theta.$$

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_k y_k = \theta.$$

$$\lambda_1^2 y_1 + \lambda_2^2 y_2 + \ldots + \lambda_k^2 y_k = \theta.$$

$$\vdots$$

$$\lambda_1^{k-2} y_1 + \lambda_2^{k-2} y_2 + \ldots + \lambda_k^{k-2} y_k = \theta.$$

$$\lambda_1^{k-1} y_1 + \lambda_2^{k-1} y_2 + \ldots + \lambda_k^{k-1} y_k = \theta.$$

Запишемо останню систему рівностей в координатах. Для цього виберемо деякий базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ і введемо позначення

$$y_j = y_{1j} e_1 + y_{2j} e_2 + \ldots + y_{nj} e_n, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Зафіксуємо довільне $s = 1, 2, \ldots, n$ і запишемо рівність s-х координат в кожній з попередніх k рівностей. Ми отримуємо

$$y_{s1} + y_{s2} + \ldots + y_{sk} = 0.$$

$$\lambda_1 y_{s1} + \lambda_2 y_{s2} + \ldots + \lambda_k y_{sk} = 0.$$

$$\lambda_1^2 y_{s1} + \lambda_2^2 y_{s2} + \ldots + \lambda_k^2 y_{sk} = 0.$$

$$\vdots$$

$$\lambda_1^{k-2} y_{s1} + \lambda_2^{k-2} y_{s2} + \ldots + \lambda_k^{k-2} y_{sk} = 0.$$

$$\lambda_1^{k-1} y_{s1} + \lambda_2^{k-1} y_{s2} + \ldots + \lambda_k^{k-1} y_{sk} = 0.$$

Таким чином, набір чисел $y_{s1}, y_{s2}, \ldots, y_{sk}$ задовольняє лінійній однорідній системі k рівнянь з k невідомими, а визначник цієї системи рівнянь є визначником Вандермонда $V(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$.

За умовою теореми, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ є попарно різними, звідки $V(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \neq 0$. За правилом Крамера, ця система має єдине рішення, отже

$$y_{s1} = y_{s2} = \ldots = y_{sk} = 0.$$

Оскільки $s = 1, 2, \ldots, n$ – довільне число, ми отримуємо, що усі координати усіх векторів дорівнюють нулю, отже

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_k = \theta.$$

Але $y_j := \beta_j x_j,\ 1 \leq j \leq k$, а за умовою теореми $x_j \neq \theta,\ 1 \leq j \leq k$. Отже, $\beta_j = 0,\ 1 \leq j \leq k$, тобто вектори $x_1, x_2, \ldots, x_k$ є лінійно незалежними. $\square$

Діагоналізовність лінійних операторів.

Означення. Нехай L – лінійний простір над полем F, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ – лінійний оператор. Лінійний оператор A називається діагоналізовним, якщо існує $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – базис простору L, в якому матриця лінійного оператора A має діагональний вигляд, тобто

$$A_u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Якщо матриця лінійного оператору має вказаний діагональний вигляд, то

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n).$$

Зокрема, характеристичний многочлен діагоналізовного оператора має $n = \dim L$ коренів в полі F з урахуванням кратності.

Твердження. Нехай L – лінійний простір над полем F, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ – лінійний оператор. Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$ – попарно різні власні числа оператора A, тобто $\forall j = 1, 2, \ldots, n$ $\chi_A(\lambda_j) = 0$, і $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ (тут $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$). Тоді оператор A є діагоналізовним.

Доведення. Це твердження є простим наслідком попередньої теореми про лінійну незалежність власних векторів, які відповідають різним власним числам.

Зафіксуємо довільне j, $1 \le j \le n$. Оскільки $\chi_A(\lambda_j) = 0$, існує вектор $x_j \in L$, $x_j \neq 0$, такий що $Ax_j = \lambda_j x_j$. За умовою, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ –попарно різні власні числа, тому із попередньої теореми вектори $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є лінійно незалежними. Тобто $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – базис простору L. Обчислимо матрицю оператора A в цьому базису. Ми маємо

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1 = \lambda_1 x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_{n-1} + 0 \cdot x_n$$

$$Ax_2 = \lambda_2 x_2 = 0 \cdot x_1 + \lambda_2 x_2 + 0 \cdot x_3 + \ldots + 0 \cdot x_n$$

$$\vdots$$

$$Ax_n = \lambda_n x_n = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_{n-1} + \lambda_n x_n.$$

Таким чином,

$$A_x = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

тобто оператор A є діагоналізовним. □

Власні підпростори. Алгебраїчна і геометрична кратності власного числа.

Нехай L – лінійний простір над полем F, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ – лінійний оператор. Нехай $\lambda_0 \in F$, $\chi(\lambda_0) = 0$, – власне число оператора A.

Означення. Підпростір

$$\mathrm{Ker}\,(A-\lambda_0 I)=\{x\in L \mid (A-\lambda_0 I)x=\theta\}=\{x\in L \mid Ax=\lambda_0 x\}$$

називається власним підпростором, який відповідає власному числу λ_0.

Тобто, власний підпростір, який відповідає власному числу λ_0, складається з векторів, які під дією оператора помножуються на число λ_0 (в тому числі, в нього входить і нульовий вектор). Відмітимо, що, оскільки $\chi(\lambda_0)=0$, маємо $\dim(\mathrm{Ker}\,(A-\lambda_0 I))\in\{1,2,\dots,n\}$.

Означення. Нехай $\lambda_0 \in F$ – власне число оператора A. Алгебраїчною кратністю власного числа λ_0 називається кратність кореня λ_0 в характеристичному многочлені оператора $\chi_A(\lambda) \in F[\lambda]$.

Означення. Нехай $\lambda_0 \in F$ – власне число оператора A. Геометричною кратністю власного числа λ_0 називається вимірність відповідного власного підпростору: $\dim(\mathrm{Ker}\ (A - \lambda_0 I))$.

Теорема. Нехай L – лінійний простір над полем F, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ – лінійний оператор. Нехай $\lambda_0 \in F$, $\chi(\lambda_0) = 0$, – власне число оператора A. Тоді геометрична кратність власного числа λ_0 є меншою або рівною алгебраїчної кратності власного числа λ_0.

Доведення. Позначимо через k, $1 \leq k \leq n$, алгебраїчну кратність власного числа λ_0. Тобто, $\chi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_0)^k \psi(\lambda)$, де $\psi(\lambda) \in F[\lambda]$, $\psi(\lambda_0) \neq 0$. Припустимо, що $\dim(\mathrm{Ker}\,(A - \lambda_0 I)) \geq (k+1)$. Тобто, існують вектори $u_1, u_2, \ldots, u_{k+1} \in \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_0 I)$, такі що $u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}$ є лінійно незалежними.

Доповнимо систему векторів $u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}$ до базису простору, нехай $u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_n$ – базис L. Запишемо матрицю оператора A в цьому базисі. Оберемо довільне j, $1 \leq j \leq (k+1)$. Оскільки $u_j \in \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_0 I)$, маємо

$$Au_j = \lambda_0 u_j = 0 \cdot u_1 + \ldots + 0 \cdot u_{j-1} + \lambda_0 u_j + 0 \cdot u_{j+1} + \ldots + 0 \cdot u_n.$$

Таким чином, матриця оператора A в цьому базисі має наступний вигляд

$$A_u = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1,k+2} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2,k+2} & \dots & a_{2n} \\ & & & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 & a_{k+1,k+2} & \dots & a_{k+1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{k+2,k+2} & \dots & a_{k+2,n} \\ & & & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n-1,k+2} & \dots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n,k+2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

тобто перші $k+1$ стовпчиків відповідають діагональній матриці з числом λ_0 на головній діагоналі.

Таким чином (оскільки матриця є блоково-трикутною) ми маємо

$$\chi_A(\lambda) = \det(A_u - \lambda I) = (\lambda_0 - \lambda)^{k+1}\nu(\lambda),$$

де $\nu(\lambda) \in F[\lambda]$. Ми довели, що кратність кореня λ_0 в характеристичному многочлені (який не залежить від вибору базису) є не меншою за $(k+1)$. Отримане протиріччя доводить теорему. □