Лекції з лінійної алгебри, 1 курс, 2 семестр, математика + прикладна математика, частина 2

Анна Вишнякова

Харківський національний університет ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Нехай F – довільне поле, $m, n \in \mathbb{N}$ – довільні числа. Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Тут $a_{ij} \in F, i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n, b_1, b_2, \ldots, b_m \in F$ – задані числа, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in F$ – невідомі.

Запишемо систему (1) у матричному вигляді. Введемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m \times n, F),$$

ця матриця називається матрицею системи (1).

Введемо ще два стовпця

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in Mat(n \times 1, F), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in Mat(m \times 1, F).$$

Стовпець X називається стовпцем невідомих системи (1), стовпець B називається стовпцем правих частин системи (1).

В нових позначеннях систему (1) можна записати у вигляді

$$AX = B.$$

Означення. Стовпець $X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in F^n$ називається розв'язком системи (1), якщо $AX_0 = B$.

Означення. Система (1) називається сумісною, якщо у неї є розв'язок. Система (1) називається несумісною, якщо у неї немає розв'язків.

Означення. Система (1) називається визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок. Система (1) називається невизначеною, якщо вона має більше за один розв'язок.

Теорема Кронекера-Капеллі. Нехай задана система лінійних рівнянь $AX = B$, де $A \in Mat(m \times n, F), B \in Mat(m \times 1, F), X \in Mat(n \times 1, F)$. Ця система є сумісною тоді і тільки тоді, коли

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Доведення. Нехай система є сумісною, тобто існує $X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in F^n$ – розв'язок системи. Ми маємо

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \ldots + a_{1n}x_n^0 = b_1 \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + \ldots + a_{2n}x_n^0 = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1^0 + a_{m2}x_2^0 + \ldots + a_{mn}x_n^0 = b_m \end{cases}.$$

Останню систему рівностей можна записати інакше:

$$x_1^0 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2^0 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n^0 \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Ми бачимо, що стовпчик B належить до лінійної оболонки стовпчиків $A^1, A^2, \dots, A^n$, тому

$$\mathrm{Lin}\{A^1, A^2, \dots, A^n\} = \mathrm{Lin}\{A^1, A^2, \dots, A^n, B\} \;\Rightarrow$$

$$\dim\left(\mathrm{Lin}\{A^1, A^2, \dots, A^n\}\right) = \dim\left(\mathrm{Lin}\{A^1, A^2, \dots, A^n, B\}\right) \;\Rightarrow$$

$$\mathrm{rg}\left(A^1, A^2, \dots, A^n\right) = \mathrm{rg}\left(A^1, A^2, \dots, A^n, B\right).$$

Ми довели, що, якщо система є сумісною, то виконується

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

(в даному випадку ми використовували стовпцевий ранг матриць).

Припустимо тепер, що

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Поглянемо на ранги обох матриць як на стовпцеві ранги. Ми маємо

$$\mathrm{rg}\left(A^1, A^2, \dots, A^n\right) = \mathrm{rg}\left(A^1, A^2, \dots, A^n, B\right) \Rightarrow$$

$$\dim\left(\mathrm{Lin}\{A^1, A^2, \dots, A^n\}\right) = \dim\left(\mathrm{Lin}\{A^1, A^2, \dots, A^n, B\}\right).$$

Але

$$\mathrm{Lin}\{A^1, A^2, \ldots, A^n\} \subset \mathrm{Lin}\{A^1, A^2, \ldots, A^n, B\},$$

і у цих просторів вимірності є рівними, тобто

$$\mathrm{Lin}\{A^1, A^2, \ldots, A^n\} = \mathrm{Lin}\{A^1, A^2, \ldots, A^n, B\}.$$

З цього ми маємо

$$B \in \mathrm{Lin}\{A^1, A^2, \ldots, A^n\} \;\Rightarrow$$

$$\exists \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in F :$$

$$\mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

З останньої рівності ми отримуємо, що $X_0 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ є розв'язком нашої системи рівнянь, тобто наша система рівнянь є сумісною. □

Теорема (правило Крамера). Нехай F – довільне поле, $n \in \mathbb{N}$ – довільне число. Нехай $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in Mat(n \times n, F)$ – невироджена матриця, тобто $\det A \neq 0$, і нехай $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in Mat(n \times 1, F)$– довільний стовпець. Тоді система лінійних рівнянь $AX = B$ є визначеною, тобто має єдиний розв'язок

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix},$$

при цьому для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$ маємо формулу

$$x_j^0 = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

де

$$\Delta = \det A,\ \Delta_j = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,j-1} & b_3 & a_{3,j+1} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Доведення. Ми маємо систему рівнянь $AX = B$, і нам дано, що $\det A \neq 0$, тобто що існує обернена матриця A^{-1}. Припустимо, що X_0 – розв'язок системи, тобто $AX_0 = B$. Помножимо цю рівність зліва на A^{-1}, ми отримуємо $A^{-1} \cdot (AX_0) = A^{-1} \cdot B$, тобто $(A^{-1} \cdot A) \cdot X_0 = A^{-1} \cdot B$, або $I \cdot X_0 = A^{-1} \cdot B$, звідки $X_0 = A^{-1} \cdot B$. Тобто, ми перевірили, що, якщо розв'язок системи існує, то він дорівнює $A^{-1} \cdot B$.

Перевіримо, що $X_0 = A^{-1} \cdot B$ дійсно є розв'язком системи. Ми маємо

$$AX_0 = A \cdot (A^{-1} \cdot B) = (A \cdot A^{-1}) \cdot B = I \cdot B = B.$$

Тобто наша система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок $X_0 = A^{-1} \cdot B$. Для отримання формул треба скористатися формулами для елементів оберненої матриці. Нехай $A^{-1} = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$, тоді ми маємо

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{\det A}(-1)^{i+j} M'\,{}^{i}_{j}, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Якщо

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B,$$

то для обчислення x_j^0 треба строку j матриці A^{-1} помножити на стовпець B, і ми отримуємо

$$x_j^0 = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} M'{}^{j}_{k} b_k = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

(тут для обчислення визначника Δ_j використовуємо формулу розкладання по j-му стовпцю). □

Розв'язок системи лінійних рівнянь.

Розглянемо систему лінійних рівнянь $AX = B$, де $A \in Mat(m \times n, F), B \in Mat(m \times 1, F), X \in Mat(n \times 1, F)$. Будемо вважати, що ця система є сумісною, тобто виконується умова теореми Кронекера-Капеллі

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

1. Нехай $\mathrm{rg} A = 0$. Це означає, що матриця A є нульовою, і стовпець B є нульовим. В такому випадку довільний вектор $X \in F^n$ є розв'язком системи.

2. Припустимо тепер, що $\mathrm{rg} A = r \in \mathbb{N}$, і ранг розширеної матриці системи теж дорівнює r. Подивимось на ранги обох матриць як на рядкові ранги. Маємо: існують r рядків матриці A, які є лінійно незалежними, а довільний інший рядок матриці A є лінійною комбінацією цих r рядків. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що перші r рядків матриці A є лінійно незалежними. З цього випливає, що перші r рядків розширеної матриці є лінійно незалежними (пояснення!).

І, оскільки ранг розширеної матриці дорівнює r, ми отримуємо, що кожен рядок розширеної матриці з номером $r+1, r+2, \dots, m$ є лінійною комбінацією перших r рядків розширеної матриці системи. Тобто, кожне рівняння за номером $r+1, r+2, \dots, m$ нашої системи лінійних рівнянь є лінійною комбінацією перших r рівнянь.

Ми довели, що кожний розв'язок системи з перших r рівнянь є розв'язком нашої початкової системи, і навпаки, тобто ми можемо розв'язувати систему з перших r рівнянь і отримаємо усі розв'язки нашої системи.

Маємо нову систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \tag{2}$$

з новою матрицею системи

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix} \in Mat(r \times n, F),$$

і новим стовпцем правих частин $\tilde{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} \in Mat(r \times 1, F)$.

Ми знаємо, що

$$\mathrm{rg}\ \tilde{A} = \mathrm{rg}\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} & b_r \end{pmatrix} = r.$$

Тобто, в матриці $\tilde{A}$ є r лінійно незалежних стовпців (зокрема, $r \leq n$). Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що перші r стовпців матриці $\tilde{A}$ є лінійно незалежними.

Можливі два випадки.
1. Випадок $r = n$. У цьому випадку система лінійних рівнянь (2) є системою r рівнянь з r невідомими, і ранг матриці системи дорівнює r.

Оскільки rg $\tilde{A}$ дорівнює r, $\tilde{A} \in Mat(r \times r, F)$, то $\det \tilde{A} \neq 0$, за правилом Крамера, система має єдиний розв'язок.

2. Випадок $r < n$. При цьому ми вважаємо, що саме перші r стовпців матриці $\tilde{A}$ є лінійно незалежними. Запишемо систему (2) у вигляді

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases} \tag{3}$$

Оскільки у матриці $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$ стовпці є лінійно незалежними, то $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} \neq 0$. Будемо розглядати змінні $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ як параметри системи. Тоді за правилом Крамера для довільного набору значень параметрів $x_{r+1} = \lambda_{r+1}, x_{r+2} = \lambda_{r+2}, \dots, x_n = \lambda_n$ (тут $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_n \in F$ – довільні числа) існує єдиний стовпчик $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \in Mat(r \times 1, F)$, такий що

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ \lambda_{r+1} \\ \lambda_{r+2} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in Mat(n \times 1, F)$$

є розв'язком початкової системи.

Висновок. Для системи лінійних рівнянь $AX = B$, де $A \in Mat(m \times n, F)$, $B \in Mat(m \times 1, F)$, $X \in Mat(n \times 1, F)$ можливим є один з трьох наступних випадків:

1. Система є несумісною, тобто не має розв'язків (коли ранг розширеної матриці системи не дорівнює рангу системи).
2. Система є визначеною, тобто має єдиний розв'язок (коли ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу системи і дорівнює кількості невідомих).

3. Система є сумісною і невизначеною (коли ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу системи і є строго меншим за кількість невідомих). У випадку, коли поле F містить нескінчену кількість елементів, система має нескінчену кількість розв'язків. При цьому множина розв'язків системи залежить від $n-r$ довільних параметрів (тут r – ранг матриці системи, n – кількість невідомих).

Системи лінійних однорідних рівнянь

Означення. Система лінійних рівнянь називається однорідною, якщо вектор правих частин є нульовим вектором, тобто система має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Твердження. Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь $AX = O$, де $A \in Mat(m \times n, F)$, $O \in Mat(m \times 1, F)$ – нульовий стовпець, $X \in Mat(n \times 1, F)$. Позначимо через $U = \{X \in F^n \mid AX = O\} \subset F^n$ – множину розв'язків системи. Тоді $U < F^n$.

Доведення. Нехай $X_1, X_2 \in U$, це означає, що $AX_1 = O, AX_2 = O$. Тоді для довільних $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ виконується $A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 AX_1 + \alpha_2 AX_2 = O + O = O$, тобто $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \in U$. $\square$

Теорема. Дана система лінійних однорідних рівнянь $AX = O$, де $A \in Mat(m \times n, F)$, $O \in Mat(m \times 1, F)$ – нульовий стовпець, $X \in Mat(n \times 1, F)$. Позначимо через $U = \{X \in F^n \mid AX = O\} < F^n$ – множину розв'язків системи. Тоді $\dim U = n - \operatorname{rg} A$.

Доведення. Позначимо через r ранг матриці A. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що перші r рівнянь системи є лінійно незалежними. Тоді наша система рівнянь є еквівалентною наступної

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

нової системі рівнянь з новою матрицею системи

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix} \in Mat(r \times n, F).$$

Ранг матриці $\tilde{A}$ дорівнює r (рядки матриці $\tilde{A}$ є лінійно незалежними), тобто в цій матриці є r лінійно незалежних стовпців (зокрема, $r \leq n$). Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що перші r стовпців матриці $\tilde{A}$ є лінійно незалежними.

Можливі два випадки.
1. Випадок $r = n$. У цьому випадку наша система лінійних рівнянь є системою r рівнянь з r невідомими, і ранг матриці системи дорівнює r. Оскільки rg $\tilde{A}$ дорівнює r, $\tilde{A} \in Mat(r \times r, F)$, то $\det \tilde{A} \neq 0$, тому за правилом Крамера система має єдиний розв'язок. Очевидно, що цей розв'язок є нульовим $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in Mat(n \times 1, F)$. Тому множина розв'язків $U = \{\theta\}$, тому $\dim U = 0 = n - r$.

2. Випадок $r < n$. Не зменшуючи загальності ми вважаємо, що саме перші r стовпців матриці $\tilde{A}$ є лінійно незалежними. Запишемо систему рівнянь у вигляді

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{array}\right. . \tag{4}$$

Оскільки у матриці $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$ стовпці є лінійно незалежними, то $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} \neq 0$. Будемо розглядати змінні $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ як параметри системи. Тоді за правилом Крамера для довільного набору значень параметрів $x_{r+1} = \lambda_{r+1}, x_{r+2} = \lambda_{r+2}, \dots, x_n = \lambda_n$ (тут $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_n \in F$ – довільні числа) існує єдиний стовпчик $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \in Mat(r \times 1, F)$, такий що

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ \lambda_{r+1} \\ \lambda_{r+2} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in Mat(n \times 1, F)$$

є розв'язком системи (4).

У нас є $n-r$ незалежних параметрів. Розглянемо $n-r$ різних наборів параметрів:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тобто для кожного $j = r+1, r+2, \ldots, n$ розглянемо значення параметрів $x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 0, \ldots, x_{j-1} = 0, x_j = 1, x_{j+1} = 0, \ldots, x_n = 0$, і для такого набору знайдемо єдиний набір значень $x_1, x_2, \ldots, x_r$, який є розв'язком останньої системи (4).

Ми знайшли $n - r$ розв'язків системи рівнянь:

$$X_{r+1} = \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \vdots \\ \beta_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_{r+2} = \begin{pmatrix} \beta_{12} \\ \beta_{22} \\ \vdots \\ \beta_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, X_n = \begin{pmatrix} \beta_{1n} \\ \beta_{2n} \\ \vdots \\ \beta_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ми доведемо, що система $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, X_n$ векторів є базисом підпростору U.
Перевіримо лінійну незалежність цієї системи. Нехай

$$\mu_{r+1}X_{r+1} + \mu_{r+2}X_{r+2} + \ldots + \mu_n X_n = \theta,$$

де $\mu_{r+1}, \mu_{r+2}, \ldots, \mu_n \in F$. Маємо

$$\mu_{r+1} \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \vdots \\ \beta_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_{r+2} \begin{pmatrix} \beta_{12} \\ \beta_{22} \\ \vdots \\ \beta_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \mu_n \begin{pmatrix} \beta_{1n} \\ \beta_{2n} \\ \vdots \\ \beta_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \\ \mu_{r+1} \\ \mu_{r+2} \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

звідки маємо $\mu_{r+1} = \mu_{r+2} = \ldots = \mu_n = 0$. Тобто система векторів $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, X_n \in U$ є лінійно незалежною.

Нехай $Y = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \in U$ – довільний розв'язок системи.

Нехай

$$Z := \gamma_{r+1}X_{r+1} + \gamma_{r+2}X_{r+2} + \ldots + \gamma_n X_n \in U,$$

тобто

$$Z = \gamma_{r+1}\begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \vdots \\ \beta_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_{r+2}\begin{pmatrix} \beta_{12} \\ \beta_{22} \\ \vdots \\ \beta_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \gamma_n\begin{pmatrix} \beta_{1n} \\ \beta_{2n} \\ \vdots \\ \beta_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \\ \gamma_{r+1} \\ \gamma_{r+2} \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, є два розв'язки системи рівнянь $Y \in U$ і $Z \in U$, у яких збігаються значення параметрів $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. За правилом Крамера, для довільного вибору параметрів існує єдиний розв'язок системи, у якого $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ дорівнюють вибраним значенням параметрів.

Отже, $Y = Z$, тобто $Y \in \mathrm{Lin}\,\{X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, X_n\}$. Ми довели, що система векторів $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, X_n$ є базисом підпростору U, звідки $\dim U = n - r$. $\square$

Зв'язок між розв'язками неоднорідної і відповідної однорідної системи лінійних рівнянь

Розглянемо систему лінійних рівнянь $AX = B$, де $A \in Mat(m \times n, F)$, $B \in Mat(m \times 1, F)$, $X \in Mat(n \times 1, F)$. Відповідною до цієї системи однорідною системою лінійних рівнянь називається система $AX = O$, де $O \in Mat(m \times 1, F)$ (тобто стовпець правих частин ми замінили нульовим стовпцем).

Ми вивчимо зв'язок між розв'язками цих двох систем.

Твердження 1. Нехай X_1, X_2 – два розв'язки системи $AX = B$. Тоді $(X_1 - X_2)$ є розв'язком системи $AX = O$.
Доведення. Маємо $A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = B - B = O$. □

Твердження 2. Нехай X_0 – розв'язок системи $AX = B$, Y_0 – розв'язок системи $AX = O$. Тоді $(X_0 + Y_0)$ є розв'язком системи $AX = B$.
Доведення. Маємо $A(X_0 + Y_0) = AX_0 + AY_0 = B + O = B$. □

Нехай система $AX = B$ є сумісною, позначимо через X_0 один з розв'язків системи (так званий частковий розв'язок), позначимо через U множину розв'язків системи: $U = \{X \in F^n \mid AX = B\}$. Множину розв'язків системи називають загальним розв'язком.

Розглянемо відповідну однорідну систему $AX = O$, позначимо через V множину розв'язків однорідної системи: $V = \{X \in F^n \mid AX = O\}$. Тобто V – загальний розв'язок однорідної системи.
Ми довели наступну формулу:

$$U = X_0 + V.$$

Кажуть, що загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь є частковий розв'язок цієї системи плюс загальний розв'язок відповідної однорідної системи.

Координати вектора в базисі.

Нехай L – лінійний простір над полем F, $n := \dim L \in \mathbb{N}$. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – деякий базис L. Тоді для кожного вектора $x \in L$ існує єдиний впорядкований набір чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n \in F$, такий що $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$. Ці числа називають координатами вектора x в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Всюди далі в нашому курсі ми будемо використовувати наступне позначення

$$x_e := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$$

(тобто x_e – стовпець координат вектора x в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$).

Теорема. Нехай L – лінійний простір над полем F, $n := \dim L \in \mathbb{N}$. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – деякий базис L. Розглянемо відображення $A : L \to F^n$, яке задається формулою $A(x) = x_e$. Тоді A є бієкцією, при цьому

$$\forall x, y \in L, \forall \lambda, \mu \in F \quad A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y).$$

Доведіть це просте твердження самостійно.

Перетворення координат вектору при зміні базису.

Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – деякий базис L ("старий базис"). Нехай є ще один базис L : $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ("новий базис"). Ми хочемо дослідити, як змінюються координати вектора при переході від старого базису до нового.

Розкладемо вектор u_1 за старим базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Маємо

$$u_1 = t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \ldots + t_{n1}e_n$$

(зверніть увагу на нумерацію коефіцієнтів!).

Розкладемо вектор u_2 за старим базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Маємо

$$u_2 = t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \ldots + t_{n2}e_n$$

Продовжуючи цю процедуру, для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$, розкладемо вектор u_j за старим базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Ми маємо

$$u_1 = t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \ldots + t_{n1}e_n$$

$$u_2 = t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \ldots + t_{n2}e_n$$

$$u_3 = t_{13}e_1 + t_{23}e_2 + \ldots + t_{n3}e_n$$

$$\vdots$$

$$u_n = t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \ldots + t_{nn}e_n$$

Введемо матрицю

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ця матриця називається матрицею переходу від базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ до базису $u_1, u_2, \dots, u_n$ (для побудови цієї матриці ми для кожного $j = 1, 2, \dots, n$ розкладаємо вектор u_j за старим базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$, і координати записуємо у j-й стовпець матриці переходу).

Нехай $x \in L$ – довільний вектор, нехай $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, тобто $x_e := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Нехай $x = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \ldots + y_n u_n$, тобто $x_u := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Ми маємо

$$x = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \ldots + y_n u_n =$$

$$y_1(t_{11} e_1 + t_{21} e_2 + \ldots + t_{n1} e_n) +$$

$$y_2(t_{12} e_1 + t_{22} e_2 + \ldots + t_{n2} e_n) +$$

$$y_3(t_{13} e_1 + t_{23} e_2 + \ldots + t_{n3} e_n) + \ldots +$$

$$y_n(t_{1n} e_1 + t_{2n} e_2 + \ldots + t_{nn} e_n).$$

Приведемо подібні доданки в цій формулі, будемо мати

$$x = (t_{11}y_1 + t_{12}y_2 + t_{13}y_3 + \ldots + t_{1n}y_n)e_1 +$$
$$(t_{21}y_1 + t_{22}y_2 + t_{23}y_3 + \ldots + t_{2n}y_n)e_2 +$$
$$(t_{31}y_1 + t_{32}y_2 + t_{33}y_3 + \ldots + t_{3n}y_n)e_3 +$$
$$\vdots$$
$$+(t_{n1}y_1 + t_{n2}y_2 + t_{n3}y_3 + \ldots + t_{nn}y_n)e_n.$$

Ми отримали важливу формулу:

$$\forall x \in L : \quad x_e = Tx_u.$$

Перевіримо, що матриця переходу від базису до базису завжди є невиродженою (тобто її визначник не дорівнює нулю).

Нехай S – матриця переходу від базису $u_1, u_2, \ldots, u_n$ до базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тоді, за доведеним

$$\forall x \in L : \quad x_e = Tx_u$$

і

$$\forall x \in L : \quad x_u = Sx_e.$$

Підставляючи другу формулу в першу, отримуємо

$$\forall x \in L : \quad x_e = TSx_e.$$

В якості довільного вектора в останньої формулі будемо обирати базисні вектори $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Оберемо довільне $j = 1, 2, \ldots, n$ і підставимо $x = e_j$, при цьому ми знаємо, що

$$(e_j)_e := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(в цьому стовпці одиниця стоїть на місці j).
Тому ми отримуємо, що для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = TS \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо ми введемо позначення $TS = (\lambda_{ij})_{i,j=1}^{n}$, то для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$ ми маємо рівність

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{1j} \\ \lambda_{2j} \\ \vdots \\ \lambda_{j-1,j} \\ \lambda_{jj} \\ \lambda_{j+1,j} \\ \vdots \\ \lambda_{nj} \end{pmatrix}.$$

Тобто для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$ ми маємо: j-й стовпець матриці TS збігається з j-м стовпцем одиничної матриці I, звідки

$$TS = I.$$

Ми довели, що матриця переходу від базису до базису завжди є невиродженою.

Ми довели також ще одне твердження: якщо матриця T є матрицею переходу від базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ до базису $u_1, u_2, \ldots, u_n$, то матрицею зворотнього переходу від базису $u_1, u_2, \ldots, u_n$ до базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ буде обернена матриця T^{-1}.

Лінійні оператори в лінійних просторах.
Нехай L – лінійний простір над полем F.

Означення. Відображення $A : L \to L$ називається лінійним оператором в L, якщо для довільних $x, y \in L$ і довільних $\alpha, \beta \in F$ виконується $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$.

Вправа. Доведіть, що, якщо $A : L \to L$ – лінійний оператор, то $A(\theta) = \theta$.

Нехай $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $A : L \to L$ – лінійний оператор, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – деякий базис L. Застосуємо лінійний оператор A до вектору e_1, отримаємо деякий вектор простору L, розкладемо його за базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Маємо

$$A(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 + \ldots + a_{n1}e_n$$

(зверніть увагу на нумерацію коефіцієнтів!). Застосуємо лінійний оператор A до вектору e_2, отримаємо деякий вектор простору L, розкладемо його за базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Маємо

$$A(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3 + \ldots + a_{n2}e_n.$$

Аналогічно, для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$ ми застосуємо лінійний оператор A до вектору e_j, отримаємо деякий вектор простору L, розкладемо його за базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$, і ми отримуємо

$$
\begin{aligned}
A(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 + \ldots + a_{n1}e_n \\
A(e_2) &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3 + \ldots + a_{n2}e_n \\
A(e_3) &= a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3 + \ldots + a_{n3}e_n \\
&\vdots \\
A(e_n) &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + a_{3n}e_3 + \ldots + a_{nn}e_n.
\end{aligned}
$$

Означення. Введемо матрицю

$$
A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.
$$

Ця матриця називається матрицею лінійного оператора A в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (для побудови цієї матриці ми для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$ розкладаємо вектор $A(e_j)$ за базисом e_1, $e_2, \ldots, e_n$, і координати записуємо у j-й стовпець матриці лінійного оператора).

Розглянемо довільний $x \in L$, розкладемо його за базисом $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$, і розглянемо образ цього вектору під дією оператора A. Ми маємо (з урахуванням лінійності оператора A):

$$A(x) = A(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n) =$$

$$x_1 A(e_1) + x_2 A(e_2) + \ldots + x_n A(e_n) =$$

$$
\begin{gathered}
x_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 + \ldots + a_{n1}e_n) + \\
x_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3 + \ldots + a_{n2}e_n) + \\
x_3(a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3 + \ldots + a_{n3}e_n) + \\
\vdots \\
x_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + a_{3n}e_3 + \ldots + a_{nn}e_n) =
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n)e_1 + \\
(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n)e_2 + \\
(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n)e_3 + \\
\vdots \\
(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n)e_n.
\end{gathered}
$$

Таким чином, ми доводимо формулу

$$\forall x \in L \quad (Ax)_e = A_e x_e$$

(стовпець координат образу вектора x під дією оператора A в базисі $e_1, e_2, \dots, e_n$ є добутком матриці оператора A в цьому базисі на стовпець координат вектора x в цьому базисі).

Зауваження.. Беручи до уваги формулу $(Ax)_e = A_e x_e$, зазвичай пишуть Ax замість $A(x)$.

Теорема. Нехай L – лінійний простір над полем F, $n := \dim L \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \dots, e_n$ – довільний базис L, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n} \in Mat(n \times n, F)$ – довільна матриця.

Задамо відображення $C : L \to L$ наступним чином:

$$\forall x \in L \quad (C(x))_e = Bx_e$$

(ця формула для кожного $x \in L$ задає набір координат його образу $C(x)$, знаючи координати, ми обчислимо і сам вектор $C(x)$). Тоді відображення C є лінійним оператором в просторі L, і його матриця $C_e = B$.

Доведення. Лінійність відображення є очевидною. Дійсно, нехай $x, y \in L$ – довільні вектори і $\alpha, \beta \in F$ – довільні скаляри. Тоді за властивостями координат маємо

$$(\alpha x + \beta y)_e = \alpha x_e + \beta y_e,$$

тому

$$(C(\alpha x + \beta y))_e = B(\alpha x + \beta y)_e = B(\alpha x_e + \beta y_e) = \alpha B x_e + \beta B y_e =$$
$$\alpha (C(x))_e + \beta (C(y))_e.$$

Якщо у векторів однакові координати в базисі $e_1, e_2, \dots, e_n$, то ці вектори є рівними, тобто

$$C(\alpha x + \beta y) = \alpha (C(x)) + \beta (C(y)).$$

Ми довели, що C – лінійний оператор в L.

Знайдемо матрицю цього оператора в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Для довільного $j = 1, 2, \ldots, n$ розкладаємо вектор $C(e_j)$ за базисом $e_1,\ e_2, \ldots, e_n$, і координати записуємо у j-й стовпець матриці лінійного оператора. Маємо

$$(C(e_j))_e = B(e_j)_e = B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{j-1,j} \\ b_{jj} \\ b_{j+1,j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

(у стовпці координат $(e_j)_e$ одиниця стоїть на місці j).

Тобто, для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$ стовпець за номером j матриці оператора збігається з j-м стовпцем матриці B. Тому $C_e = B$. $\Box$

Дії над операторами і їх матрицями.

1. Нехай $A : L \to L$ – лінійний оператор, $\lambda \in F$, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – деякий базис L. Задамо відображення $\lambda A : L \to L$ наступним чином: $\forall x \in L \quad (\lambda A)(x) = \lambda A(x)$. Тоді відображення λA є лінійним оператором і $(\lambda A)_e = \lambda A_e$. (Доведіть це).

2. Нехай $A, B : L \to L$ – два лінійних оператори, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – деякий базис L. Задамо відображення $(A + B) : L \to L$ наступним чином: $\forall x \in L \quad (A + B)(x) = A(x) + B(x)$. Тоді відображення $A + B$ є лінійним оператором і $(A + B)_e = A_e + B_e$. (Доведіть це).

3. Нехай $A, B : L \to L$ – два лінійних оператори, $e_1, e_2, \dots, e_n$ – деякий базис L. Задамо відображення $(AB) : L \to L$ наступним чином: $\forall x \in L \quad (AB)(x) = A(B(x))$ (у випадку лінійних операторів їх композицію називають доданком і позначають значком множення). Тоді відображення (AB) є лінійним оператором і $(AB)_e = A_e \cdot B_e$.

Доведення. Нехай $x, y \in L$ – довільні вектори і $\alpha, \beta \in F$ – довільні скаляри. Тоді ми маємо

$$(AB)(\alpha x + \beta y) = A(B(\alpha x + \beta y)) = A(\alpha B(x) + \beta B(y)) =$$

$$\alpha A(B(x)) + \beta A(B(y)) = \alpha (AB)(x) + \beta (AB)(y).$$

Тобто відображення (AB) є лінійним оператором.
Знайдемо його матрицю в базисі $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Позначимо $A_e = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ і $B_e = (b_{ij})_{i,j=1}^n$. Виберемо довільне $j = 1, 2, \ldots, n$. За означенням матриці оператора ми маємо

$$(AB)(e_j) = A(B(e_j)) = A(b_{1j}e_1 + b_{2j}e_2 + \ldots + b_{nj}e_n) =$$

$$b_{1j}A(e_1) + b_{2j}A(e_2) + \ldots + b_{nj}A(e_n) =$$

$$b_{1j}(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n) +$$

$$b_{2j}(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n) +$$

$$b_{3j}(a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + \ldots + a_{n3}e_n) +$$

$$\vdots$$

$$+b_{nj}(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n) =$$

$$
\begin{gathered}
(a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \ldots + a_{1n}b_{nj})e_1 + \\
(a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + \ldots + a_{2n}b_{nj})e_2 + \\
(a_{31}b_{1j} + a_{32}b_{2j} + \ldots + a_{3n}b_{nj})e_3 + \\
\vdots \\
(a_{n1}b_{1j} + a_{n2}b_{2j} + \ldots + a_{nn}b_{nj})e_n.
\end{gathered}
$$

Тобто, для довільного j, j-й стовпець матриці оператора (AB) в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$ дорівнює

$$(AB)_e^j = \begin{pmatrix} a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \ldots + a_{1n}b_{nj} \\ a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + \ldots + a_{2n}b_{nj} \\ a_{31}b_{1j} + a_{32}b_{2j} + \ldots + a_{3n}b_{nj} \\ \vdots \\ a_{n1}b_{1j} + a_{n2}b_{2j} + \ldots + a_{nn}b_{nj} \end{pmatrix} = (A_e \cdot B_e)^j.$$

Тобто ми довели, що $(AB)_e = A_e \cdot B_e$. $\square$

4. Нехай $I : L \to L$ – тотожне відображення, $\forall x \in L \quad I(x) = x$, і нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – довільний базис L. Тоді I – лінійний оператор, а його матриця в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$ дорівнює одиничній матриці $I_e = I$. (Увага: ми використовуємо одну й ту ж саму букву I для тотожного відображення і для одиничної матриці). (Доведіть це).