1 Лінійні оператори: власні числа та власні вектори; діагоналізовність

Одна з основних задач теорії лінійних операторів – знайти базис, в якому матриця оператора має якомога простіший вигляд, якщо можливо – діагональний. Для розв'язання цієї задачі нам знадобляться деякі означення.

Означення 1 *Вектор $x \in V, x \neq 0$, називається власним вектором лінійного оператора A, якщо для деякого $\lambda \in F$ виконується рівність*

$$Ax = \lambda x.$$

Число λ називають власним числом оператора A.

Твердження 1 *Власні вектори оператора A – це корені характеристичного рівняння*

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

і тільки вони (тут A – матриця лінійного оператора A в будь-якому базисі).

Твердження 2 *Власні вектори оператора A, що відповідають власному числу λ – це ненульові розв'язки системи рівнянь*

$$(A - \lambda E)\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

де A – матриця оператора.

Теорема 1.1 *Якщо в лінійному просторі існує базис з власних векторів оператора, то в цьому базисі матриця оператора діагональна з власними числами на головній діагоналі. В цьому випадку говорять, що оператор діагоналізовний.*

Твердження 3 *Власні вектори оператора, що відповідають різним власним числам, лінійно незалежні.*

Наслідок 1 *Якщо оператор A у n-вимірному лінійному просторі має n різних власних значень, то оператор A діагоналізовний.*

Твердження 4 *Якщо всі власні числа оператор A однакові і матриця оператора не діагональна, то оператор A не діагоналізовний.*

Приклад 1 *Знайти власні числа та власні вектори оператора, що в деякому базисі задається матрицею*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Чи є цей оператор діагоналізовним?

Знайдемо власні числа:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 = 0.$$

Отже, $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 1$.

Знайдемо власні вектори. Для цього потрібно знайти розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь з матрицею $A - \lambda E$.

$$A - \lambda_{1,2}E = A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1+(-A_2)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3+6A_1]{A_2+5A_1}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_1\cdot(-1)]{A_2\cdot 1/3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1+2A_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & -\frac{1}{3} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{2}{3}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = 0$ *мають вигляд*

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, c \neq 0.$$

Умова $\neq 0$ *иключає нульовий вектор. Тепер розглянемо випадок* $\lambda = 1$.

$$A - \lambda_3 E = A - E = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_1\leftrightarrow A_3]{A_3+(-A_2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -8 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3+(-3)A_1]{A_2+(-5)A_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2\cdot 1/3} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & -1 & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = 1$ мають вигляд

$$b\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, b \neq 0.$$

Таким чином, існує всього два лінійно незалежних власних вектори у тръохвимірному просторі $\mathbb{R}^3$, тобто базису з власних векторів не існує, тому оператор не діагоналізовний.

Приклад 2 *Знайти власні числа та власні вектори лінійного оператора, який в деякому базисі задаєтьcя матрицею*

$$A = \begin{pmatrix}7 & -12 & 6\\10 & -19 & 10\\12 & -24 & 13\end{pmatrix}.$$

Чи є оператор діагоналізовним? Якщо так, то виписати матрицю переходу від даного базиса до базиса з власних векторів.

Знайдемо власні числа.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix}7-\lambda & -12 & 6\\10 & -19-\lambda & 10\\12 & -24 & 13-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 =$$
$$(\lambda-1)(\lambda^2-1) = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0.$$

Отже, $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = -1$. Знайдемо власні вектори.

$$A - \lambda_{1,2}E = A - E = \begin{pmatrix}6 & -12 & 6\\10 & -20 & 10\\12 & -24 & 12\end{pmatrix} \xrightarrow[A_3\cdot 1/12]{A_1\cdot 1/6, A_2\cdot 1/10}$$
$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\1 & -2 & 1\\1 & -2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[A_3+(-A_1)]{A_2+(-A_1)} \begin{pmatrix}\boxed{1} & -2 & 1\end{pmatrix}$$

Отже,

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_2 - x_3\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_{1,2} = 1$ мають вигляд

$$\alpha\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, |\alpha| + |\beta| \neq 0.$$

Умова $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ виключає нульовий вектор.

$$A-\lambda_3E=A+E=\begin{pmatrix}8&-12&6\\10&-18&10\\12&-24&14\end{pmatrix}\xrightarrow[i=1,2,3]{A_i\cdot 1/2}\begin{pmatrix}4&-6&3\\5&-9&5\\6&-12&7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{A_1+(-A_2)}\begin{pmatrix}-1&3&-2\\5&-9&5\\6&-12&7\end{pmatrix}\xrightarrow[A_3+6A_1]{A_2+5A_1}\begin{pmatrix}-1&3&-2\\0&6&-5\\0&6&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[A_2\cdot 1/6]{A_1\cdot(-1)}$$

$$\begin{pmatrix}1&-3&2\\0&1&-\frac{5}{6}\end{pmatrix}\xrightarrow{A_1+3A_2}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{5}{6}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x_3\\\frac{5}{6}x_3\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{6}x_3\begin{pmatrix}3\\5\\6\end{pmatrix}.$$

Власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_3=-1$ мають вигляд

$$\gamma\begin{pmatrix}3\\5\\6\end{pmatrix},\gamma\neq 0.$$

Відповідно до Твердження 3, власні вектори, що відповідають $\lambda=1$, і власні вектори, що відповідають $\lambda=-1$, лінійно незалежні. Тому існує базис із власних векторів u_1,u_2,u_3.

$$u_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},u_3=\begin{pmatrix}3\\5\\6\end{pmatrix}.$$

Матриця оператора в цьому базисі має вигляд

$$A_u=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Матриця переходу від базиса e_1,e_2,e_3 до базиса u_1,u_2,u_3 має вигляд

$$T_{e\to u}=\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&0&5\\0&1&6\end{pmatrix}.$$

Увага! Порядок власних векторів у базисі u_1,u_2,u_3 такий самий, як порядок власних чисел на головній діагоналі матриці. Тобто в базисі u_3,u_1,u_2 матриця оператора буде мати вигляд:

$$A_u=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

а матриця переходу матиме наступний вигляд:

$$T_{e\to u} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вправа 1 *Перевірте формулу*

$$A_u = T_{e\to u}^{-1} A_e T_{e\to u}$$

для базисів u_1, u_2, u_3 *та* u_3, u_1, u_2.

Домашнє завдання: И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, №№ 1466,1467.

Залікове завдання №3

1. Чи є множина L лінійним підпростором простору $\mathbb{R}^4$? Якщо так, знайти його базис та розмірність.

1. $L = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_2 = 0, x_1 = 3x_4, x_3 + x_4 = 0\}.$

2. $L = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_1 = 0, x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$

3. $L = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_3 = 0, x_2 = 3x_4, x_1 - 5x_2 = 0\}.$

4. $L = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_4 = 0, x_3 = 2x_1, x_1 - 2x_2 = 0\}.$

5. $L = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_1 = 0, 2x_2 + x_3 = 0, x_3 = x_4\}.$

6. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_2 = 0, x_1 + 5x_3 = 0, x_2 - 2x_3 = 0\}.$

7. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_3 = 0, 2x_1 + 3x_2 = 0, x_1 = x_4\}.$

8. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_4 = 0, 3x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_3 = 0\}.$

9. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_1 = 0, x_2 + 7x_3 = 0, x_2 + x_4 = 0\}.$

10. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_2 = 0, 5x_1 - 6x_3 = 0, x_1 = 4x_4\}.$

11. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_3 = 0, x_1 + x_2 + x_4 = 0\}.$

12. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_4 = 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}.$

13. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_1 = 0, x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0\}.$

14. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_2 = 0, x_1 + x_3 = 0, x_3 - 10x_4 = 0\}.$

15. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_3 = 0, x_1 - 8x_2 = 0, x_2 + x_4 = 0\}.$

16. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_4 = 0, 2x_1 + 3x_2 = 0, x_2 - x_3 = 0\}.$

17. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_1 = 0, x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_2 - x_3 = 0\}.$

18. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_2 = 0, 6x_1 - x_3 = 0, x_1 + 2x_4 = 0\}.$

19. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_3 = 0, x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 0\}.$

20. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_4 = 0, x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0\}.$

21. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_1 = 0, x_2 - 7x_3 = 0, x_3 + 4x_4 = 0\}.$

22. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_2 = 0, x_1 + 3x_3 + 4x_4 = 0, x_1 + 3x_3 - 4x_4 = 0\}.$

23. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_3 = 0, x_1 + 2x_2 - 8x_4 = 0\}.$

24. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_4 = 0, x_1 + 3x_2 = 0, x_2 - 4x_3 = 0\}.$

25. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_1 = 0, 2x_2 + 5x_3 = 0, x_3 - 4x_4 = 0\}.$

26. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_2 = 0, 3x_1 + 7x_3 = 0, x_3 - 4x_4 = 0\}.$

27. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_3 = 0, x_1 + 8x_2 = 0, x_1 - 4x_4 = 0\}.$

28. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_4 = 0, x_1 - 2x_2 + 11x_3 = 0\}.$

29. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_1 = 0, x_2 + 3x_3 = 0, x_4 - 2x_3 = 0\}.$

30. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_2 = 0, x_1 + 4x_3 - 7x_4 = 0\}.$

31. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_3 = 0, 2x_1 + 13x_2 = 0, 2x_2 - x_4 = 0\}.$

32. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_4 = 0, x_1 - 6x_2 + 26x_3 = 0\}.$

33. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_1 = 0, x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0, x_2 + 2x_4 = 0\}.$

34. $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_2 = 0, x_1 - 2x_3 = 0, x_2 + 9x_4 = 0\}.$

2. Знайти базиси суми та перетину підпросторів $L_1 = Lin\{a_1, a_2, a_3\}$ та $L_2 = Lin\{b_1, b_2, b_3\}$ і перевірити формулу Грасмана.

1.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$
$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

7.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

8.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

9.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

10.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

11.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

12.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

13.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

14.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$b_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

15.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$b_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

16.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

17.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

18.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

19.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

20.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix},$$
$$b_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

21.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$b_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

22.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

23.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

24.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

25.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

26.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

27.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

28.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

29.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

30.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

31.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

32.

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\7\\-1\\0\end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix}3\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix}2\\-7\\2\\-1\end{pmatrix},$$
$$b_1 = \begin{pmatrix}5\\-7\\3\\-2\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix}5\\-8\\3\\-3\end{pmatrix}.$$

33.

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$
$$b_1 = \begin{pmatrix}3\\1\ 1\\1\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\2\\0\end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

34.

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\4\\0\\-1\end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix}5\\0\\1\\0\end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix}4\\-4\\1\\1\end{pmatrix},$$
$$b_1 = \begin{pmatrix}3\\-8\\1\\2\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix}3\\-8\\8\\2\end{pmatrix}.$$

3. Довести, що $A\colon V \to V$ є лінійним оператором над полем $\mathbb{R}$, знайти його матрицю в базисі з ортів осей координат, знайти ядро та образ, базиси ядра та образу. Перевірити, що виконується формула з Твердження 1. (Мається на увазі Твердження 1 із завдання для самойстійної роботи №4)

1. $V = \mathbb{R}^2$, A – проекція на бісектрису першого та третього квадрантів.

2. $V = \mathbb{R}^2$, A – проекція на бісектрису першого та третього квадрантів.

3. $V = \mathbb{R}^2$, A – проекція на бісектрису другого та четвертого квадрантів.

4. $V = \mathbb{R}^2$, A – проекція на бісектрису другого та четвертого квадрантів.

5. $V = \mathbb{R}^2$, A – проекція на вісь Ox_1.

6. $V = \mathbb{R}^2$, A – проекція на вісь Ox_2.

7. $V = \mathbb{R}^2$, A – симетрія відносно осі Ox_1.

8. $V = \mathbb{R}^2$, A – симетрія відносно осі Ox_2.

9. $V = \mathbb{R}^3$, A – проекція на вісь Ox_1.

10. $V = \mathbb{R}^3$, A – проекція на вісь Ox_2.

11. $V = \mathbb{R}^3$, A – проекція на вісь Ox_3.

12. $V = \mathbb{R}^3$, A – симетрія відносно осі Ox_1.

13. $V = \mathbb{R}^3$, A – симетрія відносно осі Ox_2.

14. $V = \mathbb{R}^3$, A – симетрія відносно осі Ox_3.

15. $V = \mathbb{R}^3$, A – проекція на площину x_1Ox_2.

16. $V = \mathbb{R}^3$, A – проекція на площину x_1Ox_3.

17. $V = \mathbb{R}^3$, A – проекція на площину x_2Ox_3.

18. $V = \mathbb{R}^3$, A – симетрія відносно площини x_1Ox_2.

19. $V = \mathbb{R}^3$, A – симетрія відносно площини x_1Ox_3.

20. $V = \mathbb{R}^3$, A – симетрія відносно площини x_2Ox_3.

21. $V = \mathbb{R}^2$, A – проекція на вісь Ox_1.

22. $V = \mathbb{R}^2$, A – проекція на вісь Ox_2.

23. $V = \mathbb{R}^2$, A – симетрія відносно осі Ox_1.

24. $V = \mathbb{R}^2$, A – симетрія відносно осі Ox_2.

25. $V = \mathbb{R}^3$, A – проекція на вісь Ox_1.

26. $V = \mathbb{R}^3$, A – проекція на вісь Ox_2.

27. $V = \mathbb{R}^3$, A – проекція на вісь Ox_3.

28. $V = \mathbb{R}^3$, A – симетрія відносно осі Ox_1.

29. $V=\mathbb{R}^3$, A – симетрія відносно осі Ox_2.

30. $V=\mathbb{R}^3$, A – симетрія відносно осі Ox_3.

31. $V=\mathbb{R}^3$, A – проекція на площину x_1Ox_2.

32. $V=\mathbb{R}^3$, A – проекція на площину x_1Ox_3.

33. $V=\mathbb{R}^3$, A – проекція на площину x_2Ox_3.

34. $V=\mathbb{R}^3$, A – симетрія відносно площини x_1Ox_2.

4. Лінійний оператор заданий матрицею в базисі $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Знайти його ядро та образ, базис ядра та образу, перевірити формулу з Твердження 1. Знайти власні числа та вектори. Чи є оператор діагоналізовним? Якщо так, то знайти матрицю переходу від базиса $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ до базиса $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ з власних векторів, матрицю оператора в базисі $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ та перевірити формулу

$$A_u = T^{-1}_{e\to u} A_e T_{e\to u}.$$

1. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1118. Необхідно відповісти на запитання про діагоналізовність оператора над полями $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$.

2. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1119. Необхідно відповісти на запитання про діагоналізовність оператора над полями $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$.

3. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1120. Необхідно відповісти на запитання про діагоналізовність оператора над полями $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$.

4. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1471.

5. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1101.

6. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1102.

7. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1103.

8. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1104.

9. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1109.

10. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1110.

11. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1111.

12. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1112.

13. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1470.
14. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1473.
15. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1479.
16. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1481.
17. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1483.
18. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1509.
19. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1510.
20. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1511.
21. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1512.
22. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1097.
23. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1479.
24. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1470.
25. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 1473.
26. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 1032(g).
27. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 1047(a).
28. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 1047(b).
29. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 1047(f).
30. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 1047(g).
31. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 1047(l).
32. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 1047(m).
33. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 1047(n).
34. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 1032(j).

Увага! У завданні №4 треба зробити те, що написано в цьому завданні, а не те, що написано в підручнику.

Консультації Заварзіної О.О. проходитимуть засобами електронної пошти та Scype. За потреби звертайтеся за адресою: olesia.zavarzina@yahoo.com. Консультації Ільїнської І.П. проходитимуть за телефоном, номер телефону у старости групи.