1 Лінійні підпростори (продовження)

Раніше ми зрозуміли, що лінійний підпростір може бути описаний за допомогою базису. Є ще один спосіб задавати лінійний підпростір – за допомогою лінійних рівнянь.

Приклад 1 *№1312 (И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре)*
Знайти систему лінійних рівнянь, які задають лінійний підпростір, натягнутий на дану систему векторів:

$$a_1 = (1, -1, 1, 0),\ a_2 = (1, 1, 0, 1),\ a_3 = (2, 0, 1, 1).$$

Маємо підпростір

$$L = Lin\{a_1, a_2, a_3\} = \{x = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i a_i, \alpha_i \in \mathbb{R}\}.$$

Координати будь-якого вектора $x \in L$ задаються системою лінійних рівнянь відносно невідомих α_i:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = x_1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = x_2 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = x_3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = x_4. \end{cases}$$

Знайдемо умови сумісності даної системи рівнянь. Для цього приведемо розширену матрицю системи до ступінчатого вигляду.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3+(-1)A_1]{A_2+A_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 2 & 2 & x_1 + x_2 \\ 0 & -1 & -1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4+(-1)A_2(\textit{нова})]{A_2\cdot 1/2, A_3+A_2(\textit{нова})}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{x_1+x_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_1 + \frac{x_1+x_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - \frac{x_1+x_2}{2} \end{array}\right).$$

Очевидно, що ранг матриці системи дорівнює двом. Згідно з теоремою Кронекера-Капеллі ця система сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи теж дорівнює двом. А це виконується за умови:

$$\begin{cases} x_3 - x_1 + \frac{x_1+x_2}{2} = 0 \\ x_4 - \frac{x_1+x_2}{2} = 0. \end{cases}$$

Тому лінійний простір задається такою системою рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Зауваження. Необхідна система може бути записана й інакше, тому що звести матрицю до ступінчатого вигляду можна різними способами. Розглянемо у деякому сенсі обернену задачу.

Приклад 2 *Лінійний підпростір заданий системою рівнянь:*

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

Знайти базис підпростору.

Знайдемо загальний розв'язок даної системи рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1+(-1)A_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3+4A_1]{A_2+3A_1}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 21 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3+(-3)A_2]{A_1\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2\cdot(1/7)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1+A_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & \boxed{0} & -2/7 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & 5/7 \end{pmatrix}$$

Задана система рівнянь еквівалентна системі

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - \frac{2}{7}x_4 = 0 \\ x_3 + \frac{5}{7}x_4 = 0. \end{cases}$$

Незалежні невідомі – x_2 та x_4, залежні невідомі x_1 та x_3. Маємо:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + \frac{2}{7}x_4 \\ x_3 = -\frac{5}{7}x_4, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + \frac{2}{7}x_4 \\ x_2 \\ -\frac{5}{7}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_4}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Базис лінійного підпростору – це фундаментальна система розв'язків заданої однорідної системи, тобто

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ і } e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

2 Базис суми та перетину лінійних підпросторів

Означення 1 *Сумою лінійних підпросторів L_1 та L_2 називається підпростір*

$$L_1 + L_2 = \{z = x + y \colon x \in L_1, y \in L_2\}.$$

Означення 2 *Перетином лінійних підпросторів L_1 та L_2 називається підпростір*

$$L_1 \cap L_2 = \{x \colon x \in L_1, x \in L_2\}.$$

Приклад 3 *№1320 (И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре)*
Знайти базиси суми та перетину лінійних підпросторів

$$L_1 = Lin\{a_1, a_2, a_3\},\ L_2 = Lin\{b_1, b_2, b_3\},$$

де

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 2, 1),\ b_1 = (2, 3, -1), \\ a_2 &= (1, 1, -1),\ b_2 = (1, 2, 2), \\ a_3 &= (1, 3, 3),\ b_3 = (1, 1, -3). \end{aligned}$$

Відповідно означенню суми лінійних підпросторів

$$L_1 + L_2 = \{x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 b_1 + \alpha_5 b_2 + \alpha_6 b_3, \alpha_i \in \mathbb{R}\}.$$

Базис $L_1 + L_2$ – це максимальна лінійно незалежна система векторів із $L_1 + L_2$. Для того, щоб її знайти, приведемо матрицю в рядках якої знаходяться вектори a_i, b_i до ступінчатого вигляду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_4 + (-2)A_1]{A_i + (-1)A_1, i=2,3,5,6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_6 + (-A_2)]{A_3 + A_2, A_4 + (-A_2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_6 \cdot (-\frac{1}{2})]{A_i \cdot (-1), i=2,4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_i + (-A_3), i=5,6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки ми отримали три ненульові рядки у ступінчатому вигляді матриці, то $dim(L_1 + L_2) = 3$. Базисом суми підпросторів $L_1 + L_2$ є ці *три ненульові рядки:*

$$e_1 = (1,2,1)$$
$$e_2 = (0,1,2)$$
$$e_3 = (0,0,1).$$

Якщо ми хочемо, щоб базис складався з векторів a_i, b_i, то треба при зведенні матриці до ступінчатого вигляду не змінювати порядок рядків, а в якості базису взяти ті вектори з a_i, b_i, на місці яких при зведенні ми отримали ненульові рядки. В нашому випадку базис $L_1 + L_2$ – це вектори a_1, a_2, b_1.

Знайдемо базис перетину підпросторів $L_1 \cap L_2$. Відповідно до означення

$$L_1 \cap L_2 = \{x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}\}.$$

Запишемо систему лінійних рівнянь, яку задовольняють α_i, β_i. Для цього порівняємо відповідні координати векторів $\sum \alpha_i a_i$ та $\sum \beta_i b_i$:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 3\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = -\beta_1 + 2\beta_2 - 3\beta_3. \end{cases}$$

Ми отримали систему лінійних рівнянь відносно невідомих α_i, β_i. Запишемо матрицю цієї системи, але спочатку перенесемо доданки з правої частини рівнянь у ліву. Розв'яжемо систему.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3+(-A_1)]{A_2+(-2)A_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[A_3+(-2)A_2, A_2\cdot(-1)]{A_1+A_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2+A_3, A_1+A_3}$$
$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & 2 & \boxed{0} & -2 & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & -1 & \boxed{0} & -1 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Отримали систему

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 - 2\beta_2 + 2\beta_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ \beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Незалежні невідомі – $\alpha_3, \beta_2, \beta_3$, незалежні – $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$. Маємо:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_3 + 2\beta_2 - 2\beta_3 \\ \alpha_2 = \alpha_3 + \beta_2 - \beta_3 \\ \beta_1 = \beta_2 - 2\beta_3. \end{cases}$$

Знайдемо загальний вигляд вектора з перетину $L_1 \cap L_2$.

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3 = (\beta_2 - 2\beta_3) b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3 = \beta_2 (b_1 + b_2) +$$
$$\beta_3(-2b_1 + b_3) = \beta_2 \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + \beta_3 \left(-2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right) =$$
$$\beta_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = (\beta_2 - \beta_3) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, базис підпростору $L_1 \cap L_2$ – це вектор $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

У попередньому прикладі базис перетину $L_1 \cap L_2$ можна було б знайти, підставляючи у вираз $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ α_1 та α_2, що ми знайшли.

Вправа 1 *Зробіть це.*

Нагадаємо важливу **формулу Грасмана**.

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

Перевіримо, що у прикладі, що розглядався, наведена рівність дійсно виконується. З приведення перших трьох рядків матриці, що складалася з шести рядків до ступінчатого вигляду бачимо, що $\dim L_1 = 2$. Окремо знайдемо $\dim L_2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2 \leftrightarrow A_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3 + (-A_1)]{A_2 + (-2)A_1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_3 + (-A_2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки ненульових рядків два, то $\dim L_2 = 2$. Перевіримо формулу Грасмана:

$$\dim(L_1 + L_2) = 3 = 2 + 2 - 1 = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

3 Лінійні оператори: означення, ядро, образ. Матриця оператора

Означення 3 *Лінійним оператором A на лінійному просторі V над полем F називається відображення $A\colon V \to V$, що задовольняє умови:*

a) $\forall x, y \in V A(x+y) = A(x) + A(y)$*;*

b) $\forall x \in V \forall \alpha \in F A(\alpha x) = \alpha A(x)$*.*

Означення 4 *Ядро лінійного оператора – це множина*

$$KerA = \{x \in V : A(x) = 0\}.$$

Означення 5 *Образ лінійного оператора – це множина*

$$ImA = \{y \in V \exists x \in V : A(x) = y\}.$$

Твердження 1

$$\dim KerA + \dim ImA = \dim V.$$

Означення 6 *Матрицею оператора A в базисі $e_1, e_2, ..., e_n$ зветься матриця $A_e = (a_{ij})_{\substack{i=1,...,n \\ j=1,...,n}}$ елементи якої задаються наступним чином:*

$$A(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, \; j = 1, 2, ..., n.$$

Інакше кажучи, матриця оператора в деякому базисі – це матриця, в стовпчиках якої стоять координати образів базисних векторів у даному базисі. Зверніть увагу, що зазвичай оператор та його матриця позначаються однією і тією ж самою буквою.

Означення 7 *Матрицею переходу від базиса $e_1, e_2, ..., e_n$ до базиса $u_1, u_2, ..., u_n$ називається матриця $T_{e \to u} = (t_{ij})_{\substack{i=1,...,n \\ j=1,...,n}}$, елементи якої задаються наступним чином*

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i, \; j = 1, 2, ..., n.$$

Інакше кажучи, матриця переходу від базиса $e_1, e_2, ..., e_n$ до базиса $u_1, u_2, ..., u_n$ – це матриця, в стовпчиках якої стоять координати векторів нового базиса $u_1, u_2, ..., u_n$ в старому базисі $e_1, e_2, ..., e_n$.

Теорема 3.1

$$A_u = T_{e \to u}^{-1} A_e T_{e \to u}.$$

Приклад 4 *Оператор A в $\mathbb{R}^2$ здійснює послідовно центральну симетрію та проекцію на вісь Ox_1. Перевірити, що A – це лінійний оператор, знайти його ядро, образ, перевірити формулу з Твердження 1. Знайти матрицю оператора в базисі з ортів координатних осей.*

При центральній симетрії вектор $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *переходить у вектор* $\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$, *а вектор* $\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ – *у вектор* $\begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Тому*

$$A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Первіримо, що A – *це лінійний оператор.*

$$A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}) = A(\begin{pmatrix} x_1 + z_1 \\ x_2 + z_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -x_1 - z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) + A(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix});$$

$$A(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = A(\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\alpha x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}).$$

Знайдемо ядро A.

$$KerA = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon Ax = 0\} = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$
$$\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = 0\} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Таким чином, ядро оператора співпадає з віссю Ox_2. *Зрозуміло, що* $\dim KerA = 1$, *а базис* $KerA$ – *це, наприклад, вектор* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Знайдемо образ оператора A.

$$ImA = \{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\} =$$
$$\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\} =$$
$$\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon y_1 = -x_1, y_2 = 0\} = \{\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} : y_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Таким чином, ImA *співпадає з віссю* Ox_1, $\dim ImA = 1$, *базис* ImA – *це, наприклад, вектор* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Зрозуміло, що*

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2 = 1 + 1 = \dim KerA + \dim ImA.$$

Знайдемо матрицю оператора A *в базисі* e_1, e_2, *де* $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Для цього знайдемо образи векторів* e_1, e_2 *під дією оператора* A.

$$Ae_1 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2.$$

$$Ae_2 = A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2.$$

Коордтинати векторів Ae_1 та Ae_2 в базисі e_1, e_2 записуємо в стовпчики матриці A_e :

$$A_e = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Приклад 5 *Оператор заданий матрицею в деякому базисі:*

$$A_e = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & -3\end{pmatrix}.$$

Знайти його ядро та образ, базиси ядра та образу, перевірити формулу Твердження 1.

Ядро складається з розв'язків системи

$$A_e\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо систему:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow[A_3+(-2)A_1]{A_2+A_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[A_3+A_2]{A_2\cdot(-1), A_1+A_2} \begin{pmatrix}\boxed{1} & -2 & \boxed{0}\\ \boxed{0} & -2 & \boxed{1}\end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2\\ x_3 = 2x_2\end{cases};$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_2\\x_2\\2x_2\end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$KerA = \{\alpha\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} : \alpha\in\mathbb{R}\},$$

базис $KerA$: $e_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $dimKerA = 1$.

Нагадаємо, що

$$ImA = \{y\in\mathbb{R}^3\ \exists x\in\mathbb{R}^3\colon Ax = y\}.$$

Тому для знаходження ImA потрібно знайти умови, за яких система рівнянь

$$Ax = y$$

сумісна.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & y_1 \\ -1 & 2 & 0 & y_2 \\ 2 & 2 & -3 & y_3 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3+(-2)A_1]{A_2+A_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & y_1 \\ 0 & 2 & -1 & y_1+y_2 \\ 0 & 2 & -1 & y_3-2y_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{A_3+(-A_2)} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & y_1 \\ 0 & 2 & -1 & y_1+y_2 \\ 0 & 0 & 0 & y_3-3y_1-y_2 \end{array}\right).$$

Оскільки ранг матриці системи дорівнює двом, то система сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці дорівнює двом, тобто за умови

$$-3y_1 - y_2 + y_3 = 0.$$

Це і є лінійне рівняння, яке задає образ A. Знайдемо базис ImA.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 3y_1+y_2 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, базис образу A – це

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \ \text{та} \ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, dimImA = 2.$$

Бачимо, що

$$dimKerA + dimImA = 1 + 2 = 3 = dim\mathbb{R}^3.$$

Приклад 6 *Матриця оператора A в базисі e_1, e_2 має вигляд:*

$$A_e = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю оператора A в базисі u_1, u_2, $u_1 = e_1 + 2e_2, u_2 = e_1 - e_2$.

Спочатку запишемо матрицю переходу від базиса e_1, e_2 до базиса u_1, u_2. Для цього запишемо координати векторів u_1, u_2 в базисі e_1, e_2 у стовпчики матриці:

$$T_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Відповідно до формули оберненої матриці

$$T_{e\to u}^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$A_u = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -11 & 13 \end{pmatrix}.$$

Домашнє завдання: И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, №№ 1313, 1284, 1434, 1448, 1452.

Консультації Заварзіної О.О. проходитимуть засобами електронної пошти та Scype. За потреби звертайтеся за адресою: olesia.zavarzina@yahoo.com.
Консультації Ільїнської І.П. проходитимуть за телефоном, номер телефону у старости групи.