# 1 Системи лінійних рівнянь

Розглянемо систему $m$ лінійних рівнянь відносно $n$ невідомих.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Знаходити розв'язок цієї системи будемо методом Гауса. Розглянемо розширену матрицю системи, тобто матрицю, в якій справа від матриці коефіцієнтів дописано стовпчик вільних членів:

$$\widetilde{A} = (A|b) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

За допомогою допустимих перетворень приведемо цю матрицю до ступінчатого вигляду. Знайдемо ранг матриці системи та розширеної матриці системи.

**Теорема 1.1 (Кронекера Капеллі)** *Система лінійних рівнянь сумісна (має розв'язки) тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи:*

$$rgA = rg\widetilde{A}.$$

Хід подальшого розв'язання системи будемо ілюструвати на прикладі.

**Приклад 1** *№689 (И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре)*

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

*Записуємо розширену матрицю системи та за допомогою припустимих перетворень приводимо її до ступінчатого вигляду.*

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{A_1+(-1)A_2} \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{A_1\times(-1)}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[A_3+(-4)A_1]{A_2+(-3)A_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 22 & 10 & -2 & 20 \end{array} \right) \xrightarrow{A_3+(-2)A_2}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

*Бачимо, що $rgA = rg\widetilde{A} = 2$, тому система сумісна. Оскільки $rgA = 2$, знайдеться ненульовий мінор другого порядку. Наприклад*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

*За допомогою припустимих перетворень зробимо цей мінор одиничним.*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & \boxed{1} & -2 \\ \boxed{0} & 11 & 5 & \boxed{-1} & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{A_1+A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 9 & 4 & \boxed{0} & 8 \\ \boxed{0} & 11 & 5 & \boxed{-1} & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{A_2\times(-1)}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 9 & 4 & \boxed{0} & 8 \\ \boxed{0} & -11 & -5 & \boxed{1} & -10 \end{array}\right)$$

*Отриманий одиничний мінор зветься базисним мінором матриці системи. Запишемо систему рівнянь, що відповідає цій матриці:*

$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 4x_3 \qquad = 8 \\ \quad -11x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \end{cases}$$

*<u>Увага!</u> Ця система еквівалентна вихідній системі. Далі виражаємо ті невідомі, що відповідають одиничному мінору через інші:*

$$\begin{cases} x_1 = 8 - 9x_2 - 4x_3 \\ x_4 = 11x_2 + 5x_3 - 10 \end{cases}$$

*Цими формулами дається повний розв'язок системи, якщо вважати, що $x_2$ та $x_3$ приймають всі значення з поля $F$. Але прийнято повний розв'язок записувати у векторній формі:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 9x_2 - 4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 11x_2 + 5x_3 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \ x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

*Це і є остаточна відповідь.*

Вираз

$$x_2 \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \ x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

є повним розв'язком однорідної системи рівнянь (тобто вихідної системи, в якій у правій частині всіх рівняннь стоять нулі). Вектори

$$\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ і } \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

–це фундаментальна система розв'язків однорідної системи рівнянь, базис повного розв'язку однорідної системи. Вектор

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

– частковий розв'язок неоднорідної системи рівнянь (перевірте це!).

Наведемо деякі факти з теорії. **Розмір підпростору розв'язків однорідної системи рівнянь дорівнює числу невідомих мінус ранг матриці**. В нашому випадку це $4 - 2 = 2$. Невідомі поділяються на дві групи: залежні (ті, які виражаються через інші), в нашому випадку це $x_1$ і $x_4$, та незалежні (ті, через які виражаються інші), в нашому випадку це $x_2$ і $x_3$. Зауважимо, що розподіл на залежні та незалежні невідомі може біти різним, але кількість залежних та незалежних невідомих завжди однакова. Кількість залежних невідомих дорівнює рангу матриці, кількість незалежних невідомих дорівнює числу невідомих мінус ранг матриці.

Домашнє завдання: И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, №№ 690, 693, 693, 726.

## 2 Правило Крамера

Розглянемо систему $n$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Позначимо через $\Delta$ визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$\Delta_j$, $j = 1, 2, ..., n$ – визначник, який відрізняється від $\Delta$ тільки тим, що замість $j$-го стовпчика у ньому стоїть стовпчик вільних членів

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

**Теорема 2.1 (Правило Крамера)** *Якщо $\Delta \neq 0$, то система рівнянь має єдиний розв'язок:*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},\ j = 1, 2, ..., n.$$

**Приклад 2** *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 = -4. \end{cases}$$

*Оскільки*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -13 \neq 0,$$

*то*

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{18}{13},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{53}{13},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{15}{13}.$$

Домашнє завдання: И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 561.

Залікове завдання №2

1. Знайти обернену матрицю двома способами: за формулами для оберненої матриці й методом Гауса.

1. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 841.
2. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 842.
3. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 843.
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

9. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 410(c).

10. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 410(e).

11. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -1 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 3 & -9 & -2 \\ 9 & -8 & -4 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \\ -3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ -2 & -5 & -3 \\ 3 & 10 & 5 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & 10 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -2 & -5 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -6 & -5 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -6 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи півнянь методом Гауса. Відповідь має бути записана у векторній формі.

1. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 691.
2. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 694.
3. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 695.
4. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 696.
5. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 697.
6. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 699.
7. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 700.
8. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 701.
9. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 702.
10. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 706.
11. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 712.
12. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 713.
13. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 714.
14. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 715.

15. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 716.

16. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 717.

17. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 718.

18. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 719.

19. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 720.

20. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 444(a).

21. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 444(c).

22. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 444(e).

23. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 444(f).

24. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 444(h).

25. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 444(j).

26. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.51 №2.4(c).

27. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.51 №2.4(d).

28. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.51 №2.8(c).

29. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.51 №2.4(f).

30. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.51 №2.4(g).

31. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.51 №2.4(h).

32. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.51 №2.4(i).

33. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.51 №2.4(j).

34. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.51 №2.4(k).

3. Знайти загальний розв'язок однорідної системи рівнянь методом Гауса (при перетворенні матриці стовпчик вільних членів записувати не потрібно). Відповідь має бути записана у векторній формі.

1. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 724.
2. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 725.
3. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 726.
4. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 728.
5. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 730.
6. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 731.
7. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 732.
8. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 735.
9. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 736.
10. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 737.
11. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 738.
12. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 739.
13. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 740.
14. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 443(b).
15. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 443(c).
16. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 443(d).
17. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 443(e).
18. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 443(f).
19. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 449(a).

20. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 449(b).

21. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 449(c).

22. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 449(d).

23. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.53 №2.7(a).

24. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.53 №2.7(b).

25. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.53 №2.7(c).

26. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.53 №2.7(d).

27. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.53 №2.7(e).

28. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.53 №2.7(f).

29. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.53 №2.7(g).

30. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 736.

31. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 737.

32. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 738.

33. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 739.

34. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 740.

4\. Розв'язати систему, використовуючи правило Крамера.

1. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 554.
2. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 555.
3. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 556.
4. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 557.
5. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 558.

6. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 559.
7. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 560.
8. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 562.
9. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, № 563.
10. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 400(a).
11. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 400(b).
12. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 400(c).
13. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 400(d).
14. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 400(e).
15. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 400(f).
16. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 408(a).
17. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 408(b).
18. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 408(a).
19. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 408(b).
20. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 400(g).
21. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 400(h).
22. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 400(i).
23. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 400(k).

24. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, № 400(l).

25. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.49 №2.1(d).

26. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.49 №2.1(e).

27. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.49 №2.1(f).

28. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.49 №2.1(g).

29. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.49 №2.1(h).

30. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.49 №2.1(j).

31. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.49 №2.1(k).

32. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.49 №2.3(h).

33. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.49 №2.3(i).

34. Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова, Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений, стр.49 №2.3(j).

**Консультації Заварзіної О.О. проходитимуть засобами електронної пошти та scype. За потреби звертайтеся за адресою: olesia.zavarzina@yahoo.com.**