

# Лабораторная работа №1. Точные методы решения линейных систем.

## 1 К повторению

Системы линейных алгебраических уравнений. Необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости СЛАУ. Определитель матрицы. Собственные вектора и собственные числа матрицы (алгебра).

## 2 Дополнительные сведения

Функции для решения линейных систем методом Гаусса без выбора главного элемента, а также для решения систем с верхнетреугольной и нижнетреугольной матрицами напишите самостоятельно; для решения линейных систем методом Гаусса с частичным доминированием используйте встроенную функцию MatLab `lu()`; для решения линейных систем методом Гаусса с полным доминированием используйте программу 9, стр 88 (Quarteroni, Sacco, Saleri 'Numerical mathematics'). Файлы `LUpivot.m` и `pivot.m` прилагаются. Для вычисления числа обусловленности матрицы используйте функцию `Cond()`.

## 3 Указания к выполнению

### 3.1 Тестирование

Напишите самостоятельно функции для решения линейных систем с верхне- и нижнетреугольной матрицами. В качестве аргументов каждая функция должна принимать матрицу и вектор правой части, а возвращать вектор - решение соответствующей системы или сообщение о вырожденности матрицы. Протестируйте функцию на небольших (из 3-х уравнений) системах, которые легко решить аналитически. Выпишите ниже примеры (2-3 шт. с невырожденными матрицами, 1 с вырожденной), на которых Вы тестировали функции.

Напишите самостоятельно функцию, разлагающую матрицу  $A$  в произведение верхне- и нижнетреугольной матрицы методом Гаусса без доминирования. В качестве аргумента функция должна принимать матрицу  $A$ , а возвращать матрицы-множители  $L$ ,  $U$  или сообщение о встретившемся нулевом диагональном элементе матрицы. Протестируйте функцию на небольших ( $3 \times 3$ ) матрицах, для которых такое разложение легко сделать аналитически. Выпишите ниже примеры (2-3 шт. с невырожденными матрицами, 1 с вырожденной), на которых Вы тестировали функцию.

## 3.2 Часть 1

- (1) Выполняется в Octave. Возможно использование двоичного калькулятора, работающего с числами с плавающей точкой. Используя двоичное отображение чисел (`format bit`) для чисел двойной точности, выведите все промежуточные вычисления, производимые при выполнении LU-разложение матрицы  $A$  методом Гаусса без доминирования. Требуется умение выделять мантису и показатель в этой записи. Укажите, каким действиям метода Гаусса (записанным в точных десятичных числах) они соответствуют.

Встретились ли Вам арифметические действия, при которых сильно понижалась относительная точность вычислений? абсолютная точность? Укажите на эти действия, поясните, по каким именно причинам стала возможна такая потеря точности. Аналогично проведите решение получившихся верхне- и нижнетреугольных систем линейных уравнений.

Встретились ли Вам арифметические действия, при которых сильно понижалась относительная точность вычислений? абсолютная точность? Укажите на эти действия, поясните, по каким именно причинам стала возможна такая потеря точности.

Что изменится при применении методов Гаусса с частичным и полным доминированием? Используя двоичное отображение чисел, выполните  $lu$ -разложение матрицы  $A$  вышеупомянутыми методами. Выведите промежуточные результаты.

- (2). Используя двоичное отображение для чисел двойной точности, выполните  $lu$ -разложение матрицы  $A$  методом Гаусса без доминирования и с частичным доминированием (на отдельном листе, выбросив часть внутренних строк). Можно сделать вручную. Чем отличается  $lu$ -разложение матрицы  $A$ , сделанные этими двумя методами? Встретились ли Вам арифметические действия, при которых сильно понижалась относительная точность вычислений? абсолютная точность? Укажите на эти действия, поясните, по каким именно причинам стала возможна такая потеря точности.

Аналогично проведите решение получившихся верхне- и нижнетреугольных систем линейных уравнений. Встретились ли Вам арифметические действия, при которых сильно понижалась относительная точность вычислений? абсолютная точность? Укажите на эти действия, поясните, по каким именно причинам стала возможна такая потеря точности.

Что изменится при применении метода Гаусса с полным доминированием? Используя двоичное отображение для чисел двойной точности (в двоичной системе), выполните  $lu$ -разложение матрицы  $A$  вышеупомянутым методом.

*Указание. Помнить теоретические оценки абсолютной и относительной точности сложения и умножения чисел с плавающей точкой.*

### 3.3 Часть 2

- (1) Вычислите число обусловленности матрицы Гильберта  $H_{10}$  размера  $10 \times 10$  и  $H_{20}$  размера  $20 \times 20$  с помощью функции `Cond`. Выпишите ниже

Вычислите максимальные относительные погрешности для решений обеих систем и выпишите ниже.

Вычислите невязки для полученных решений. Каковы их нормы? Для вычисления нормы вектора (и матрицы) пользуйтесь функцией `norm`.

Выпишите ниже максимальные нормы невязок.

Выпишите теоретическую оценку относительной точности решения через невязку.

Насколько отличаются реальные относительные погрешности и их оценки? За счет чего относительные погрешности решений так велики?

- (2) Вычислите собственные вектора и собственные числа матрицы  $A$ . Выпишите их ниже

Разложите по базису из собственных векторов матрицы встречающиеся в задании вектора решений и правых частей. Выполните все действия задания на бумаге, используя разложение по базису из собственных векторов.

Выпишите теоретическую оценку сверху и снизу относительной точности решения через невязку.

Достигаются ли они в предложенной задаче?