

Лабораторная работа №1. Методы решения линейных систем. Вариант II, IV.

Точные методы решения линейных систем

Указание. Функции для решения линейных систем методом Гаусса без выбора главного элемента, а также для решения систем с верхнетреугольной и нижнетреугольной матрицами напишите самостоятельно; для решения линейных систем методом Гаусса с частичным доминированием используйте встроенную функцию MatLab `lu()`; для решения линейных систем методом Гаусса с полным доминированием используйте программу 9, стр 88 (Quarteroni, Sacco, Saleri 'Numerical mathematics'). Файлы `LUpivot.m` и `pivot.m` прилагаются.

Часть 1. Примените методы Гаусса без доминирования, с частичным доминированием и с полным доминированием к следующим линейным системам $Ax = b$:

(1)

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

где $\epsilon = 10^{-16}$.

Матрица A размерности 60×60 $a_{ij} = 1$ при $i = j$ или $j = 60$, $a_{ij} = -1$ при $i > j$, $a_{ij} = 0$ в остальных случаях. Правая часть b : $b_i = 3 - i$ при $i < 60$, $b_i = 2 - i$ при $i = 60$.

Почему разные методы дают разные результаты? Какой из результатов правильный? При выполнении каких действий и почему возникает ошибка?

Указание. Обратите внимание на LU-разложение матрицы системы. Используйте теоретические оценки погрешности округления и/или оценки погрешности конкретных действий с плавающей точкой (укажите, каких) для объяснения.

Часть 2. Плохо обусловленные матрицы.

(1) Постройте матрицу Гильберта H 10×10 (используйте функцию `hilb`).

Возьмите 5 шт. линейно независимых векторов x и подберите правые части b так, чтобы вектора x были точными решениями линейной системы $Hx = b$. Решите эти линейные системы с помощью встроенной функции `linsolve`. Насколько вычисленные решения отличаются от точных? То же самое сделайте для матрицы Гильберта 20×20 . Насколько вычисленные решения отличаются от точных? Почему? Обратите внимание на число обусловленности матрицы.

(2) Решите линейную систему $Ax = b$ с

$$A = \begin{pmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Каково ее точное решение x ? Допустим, Вы получили в качестве приближенного решения этой системы вектор $\hat{x} = x + \delta x$, $\delta x = (0.001, 0)'$. Какова невязка для \hat{x} ? Почему?

Решите линейную систему $Ax = b$ с той же матрицей A и правыми частями $b_1 = (2001, 2001)'$ и $b_2 = (2002, 2001)'$. Какова относительная разница правых частей? Какова относительная разница решений?

Для решения системы используйте функцию `linsolve`. Для объяснения эффекта вычислите собственные вектора и собственные числа матрицы A . Каково число обусловленности этой матрицы. Сравните полученные результаты с результатами пункта 1.