

## Лабораторная работа №1. Точные методы решения линейных систем. Вариант I, III.

*Указание. Функции для решения линейных систем методом Гаусса без выбора главного элемента, а также для решения систем с верхнетреугольной и нижнетреугольной матрицами напишите самостоятельно; для решения линейных систем методом Гаусса с частичным доминированием используйте встроенную функцию MatLab `lu()`; для решения линейных систем методом Гаусса с полным доминированием используйте программу 9, стр 88 (Quarteroni, Sacco, Saleri 'Numerical mathematics'). Файлы `LUpivot.m` и `pivot.m` прилагаются.*

**Часть 1.** Примените методы Гаусса без доминирования, с частичным доминированием и с полным доминированием к следующим линейным системам  $Ax = b$ :

(1)

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \epsilon + 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где  $\epsilon = 10^{-15}$ .

(2) Матрица  $A$  размерности  $60 \times 60$   $a_{ij} = 1$  при  $i = j$  или  $j = 60$ ,  $a_{ij} = -1$  при  $i > j$ ,  $a_{ij} = 0$  в остальных случаях. Правая часть  $b$ :  $b_i = 3 - i$  при  $i < 60$ ,  $b_i = 2 - i$  при  $i = 60$ .

Почему разные методы дают разные результаты? Какой из результатов правильный? При выполнении каких действий и почему возникает ошибка?

*Указание. Обратите внимание на  $LU$ -разложение матрицы системы. Используйте теоретические оценки погрешности округления и/или оценки погрешности конкретных действий с плавающей точкой (укажите, каких) для объяснения.*

**Часть 2.** Плохо обусловленные матрицы.

(1) Постройте матрицу Гильберта  $H$   $10 \times 10$  (используйте функцию `hilb`). Возьмите 5 шт. линейно независимых векторов  $x$  и подберите правые части  $b$  так, чтобы вектора  $x$  были точными решениями линейной системы  $Hx = b$ . Решите эти линейные системы с помощью встроенной функции `linsolve`. Насколько вычисленные решения отличаются от точных? То же самое сделайте для матрицы Гильберта  $20 \times 20$ . Насколько вычисленные решения отличаются от точных? Почему? Обратите внимание на число обусловленности матрицы.

(2) Решите линейную систему  $Ax = b$  с

$$A = \begin{pmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Каково ее точное решение  $x$ ? Допустим, Вы получили в качестве приближенного решения этой системы вектор  $\hat{x} = x + \delta x$ ,  $\delta x = (0.001, 0)'$ . Какова невязка для  $\hat{x}$ ? Почему?

Решите линейную систему  $Ax = b$  с той же матрицей  $A$  и правыми частями  $b_1 = (2001, 2001)'$  и  $b_2 = (2002, 2001)'$ . Какова относительная разница правых частей? Какова относительная разница решений?

Для решения системы используйте функцию `linsolve`. Для объяснения эффекта вычислите собственные вектора и собственные числа матрицы  $A$ . Каково число обусловленности этой матрицы. Сравните полученные результаты с результатами пункта 1.