Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Ямпольський Олександр Леонідович
Шугайло Олена Олексіївна

КАНОНІЧНА ТЕОРІЯ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Навчально-методичний посібник з аналітичної геометрії
для студентів математичних факультетів університетів

Харків – 2020

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.151.5(я7)
К 93

Рецензенти:

В. О. Горькавий – доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник відділу геометрії і диференціальних рівнянь Фізико-технічного інституту низьких температур імені Б. І. Вєркіна НАН України;

Є. В. Петров – кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна.

Затверджено до друку рішенням Навчально-методичної ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № від)

Ямпольський О. Л.

К 93 Канонічна теорія поверхонь другого порядку: навчально-методичний посібник з аналітичної геометрії для студентів математичних факультетів університетів /О.Л. Ямпольський, О.О. Шугайло. – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2020. – с.

Навчальний посібник призначено для самостійної роботи

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.151.5(я7)

Зміст

Вступ

Посібник спрямований перш за все на самостійну роботу в оволодінні методами аналітичної геометрії студентами математичних спеціальностей університетів. Зміст посібника відповідає курсу аналітичної геометрії, що викладається на факультеті математики і інформатики в Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна.

1 Загальні відомості

Поверхнею другого порядку називається геометричне місце точок простору координати яких відносно даної декартової системи координат (x, y, z) задовольняють рівнянню:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0, \quad \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}^2 \neq 0. \quad (1)$$

Група доданків степеня 2 називається *квадратичною частиною* рівняння, група доданків степеня 1 утворює *лінійну частину* рівняння, параметр c називається вільним членом. Найпростіші форми рівняння (1) і системи координат, відносно яких рівняння (1) має найпростішу форму, називаються *канонічними*.

Будова поверхонь другого порядку має відношення до деяких спеціальних класів поверхонь: *поверхонь обертання, поверхонь перенесення, лінійчастих, циліндричних і конічних поверхонь.*

1.1 Поверхні обертання.

Нехай γ – крива в деякій площині π і l – пряма, що лежить в площині π і не перетинає γ. Поверхня, яка утворюється кривою γ при обертанні площини π навколо прямої l називається *поверхнею обертання.* Крива γ називається *профільною кривою*, l – *віссю обертання.*

Запишемо параметричне рівняння поверхні обертання. Приймемо пряму l як вісь Oz, а вісь Ox направимо перпендикулярно осі Oz в площині π, де лежить крива γ. Вісь Oy направимо перпендикулярно xOz. Припустимо, що γ задана рівнянням $x = f(u),\ z = g(u)$. В початковий момент площина π збігається з xOz. Повернемо площину π на деякий кут v, фіксуючи положення осей Ox, Oy і Oz. Для будь-якої точки M координата z при цьому не зміниться. Не зміниться і відстань R від осі обертання Oz до нового положення точки M. Тобто при кожному фіксованому значенні u при обертанні площини π навколо осі Oz точка M, яка в початковий момент мала координати $(f(u), 0, g(u))$, рухається по колу радіуса $R = f(u)$ в площині $z = g(u)$. Параметричне рівняння цього кола $x = R\cos v, y = R\sin v$. Отже параметричне рівняння поверхні обертання:

$$\begin{cases} x(u,v) = f(u)\cos v, \\ y(u,v) = f(u)\sin v, \\ z(u,v) = g(u). \end{cases}$$

Рівняння поверхні обертання отримати особливо легко, якщо крива γ може бути задана у вигляді графіка деякої функції.

Припустимо, що γ лежить в площині xOz і є графіком функції $z = f(x)$ $(x > 0)$. За своїм змістом параметр x є відстанню від осі Oz до точки на графіку. Нехай обертання відбувається навколо осі Oz. Якщо $M(x,y,z)$ – точка на поверхні обертання, то за будовою її координата z є тією ж функцією що визначала профільну криву, але аргументом цієї функції стає відстань від точки до осі обертання Oz. Таким чином, координати точки M зв'язуються рівнянням

$$z = f(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

Якщо профільна крива подана неявно рівнянням $\varphi(z,x) = 0$, то за аналогічних міркувань неявне рівняння поверхні обертання навколо осі Oz набуває вигляду

$$\varphi(z,r) = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3}$$

Слід пам'ятати, що поверхня обертання задається рівняннями (2) або (3) в описаних спеціальних умовах.

Приклад 1.1. *Знайти рівняння поверхні, що утворюється прямою $x - 4z = 0$ при обертанні навколо осі Oz.*

Розв'язок. Пряма, що обертається, перетинає вісь обертання, тож очевидно, що поверхнею обертання буде круглий конус. Скористаємося формулою (2). Профільна крива задана рівнянням $z = \frac{1}{4}x$, тому рівняння поверхні обертання

$$z = \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + y^2} \quad \sim \quad x^2 + y^2 - 16z^2 = 0.$$

Відповідь: $x^2 + y^2 - 16z^2 = 0$ – рівняння круглого конуса.

$\blacksquare$

В наступному прикладі розглянемо ситуацію, коли пряма, що обертається, не перетинає вісь обертання.

Приклад 1.2. *Пряма $x = 1 + 4t,\ y = 2 + 3t,\ z = t$ обертається навколо осі Oz. Знайдіть рівняння поверхні обертання.*

Розв'язок. При обертанні навколо осі Oz точка M з координатами $M(1 + 4t,\ 2 + 3t,\ t)$ рухається по колу, яке лежить в площині $z = t$ та має центр в точці

$M_0(0,0,t)$. Знайдемо радіус цього кола $R = |MM_0| = \sqrt{(1+4t)^2 + (2+3t)^2} = \sqrt{1+8t+16t^2+4+12t+9t^2} = \sqrt{5+20t+25t^2}$. Напишемо параметричне рівняння поверхні обертання:

$$\begin{cases} x = \sqrt{5+20t+25t^2}\cos v, \\ y = \sqrt{5+20t+25t^2}\sin v, \\ z = t, \end{cases} \Rightarrow \; x^2+y^2 = 5+20z+25z^2.$$

Ми отримали неявне рівняння цієї ж поверхні. Нижче ми з'ясуємо, що ця поверхня є однопорожнинним гіперболоїдом обертання з центром в точці $\left(0,0,-\dfrac{2}{5}\right)$.

Відповідь: $x^2+y^2-25\left(z+\dfrac{2}{5}\right)^2 = 1$.

■

1.2 Поверхні перенесення.

Розглянемо площину π_1 і нехай крива $\gamma_1 \subset \pi_1$. Зафіксуємо точку $O \in \gamma_1$ і побудуємо площину π_2, що перетинає площину π_1 по прямий l, яка проходить через точку O. Нехай γ_2 деяка крива в площині π_2, причому $O \in \gamma_2$. Фіксуючи площину π_1 будемо паралельно переносити площину π_2, як тверде тіло, уздовж кривої γ_1 так, щоб точка O під час руху перебувала на кривій γ_1. Поверхня, утворена кривою γ_2 називається *поверхнею перенесення.*

Рівняння поверхні перенесення найлегше отримати якщо площини π_1 і π_2 взаємно перпендикулярні. Приймемо пряму l як вісь Oz, а осі Ox і Oy направимо в площинах π_1 і π_2. Припустимо, що рівняння $\gamma_2 : \; z = f(x)$, а рівняння $\gamma_1 : \; z = g(y)$. Тоді координата z точки M на поверхні перенесення складається з координати $z_1 = f(x)$ в площині π_2 над віссю Ox і координати $z_2 = g(y)$ точки O над віссю Oy в площині π_1. Тобто координата z рухомої точки визначається виразом:

$$z = f(x) + g(y).$$

1.3 Циліндричні поверхні.

Нехай γ – плоска крива, тобто лежить в площині π. Через кожну точку кривої γ проведемо пряму в напрямку вектора $\vec{a}$, який не паралельний площині π. Отримана поверхня називається *циліндричною поверхнею*, або *циліндром*, побудованим над γ. Сама крива називається *направляючою*, а сім'я паралельних прямих називається сім'єю *твірних* циліндра.

Можна записати параметричне рівняння циліндричної поверхні. Нехай крива γ має параметричне (векторне) рівняння $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u) = \{\rho_1(u), \rho_2(u), \rho_3(u)\}$. При фіксованому значенні u ми маємо точку на γ. Напишемо параметричне рівняння прямої через точку $(\rho_1(u), \rho_2(u), \rho_3(u))$ в напрямку вектора $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$:

$$\begin{cases} x(u,v) = \rho_1(u) + va_1, \\ y(u,v) = \rho_2(u) + va_2, \\ z(u,v) = \rho_3(u) + va_3. \end{cases}$$

Це параметричне рівняння циліндричної поверхні з направляючою $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$ і прямолінійними твірними паралельними $\vec{a}$. Векторне рівняння цієї поверхні $\vec{r}(u,v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{a}$.

Якщо прямолінійні твірні перпендикулярні площині π, в якій лежить крива γ, то поверхня називається *прямим циліндром*, побудованим над γ. За типом направляючої циліндрам дають відповідні назви. Наприклад, "прямий круговий циліндр" – циліндр, побудований над колом.

Рівняння прямого циліндра задати дуже легко. Розташуємо в площині π осі координат Ox, Oy, а вісь Oz направимо перпендикулярно π, тобто вздовж твірних циліндра. Нехай $\varphi(x,y) = 0$ – неявне рівняння кривої γ. Тоді для будь-якої точки M з координатами (x,y,z) на циліндричній поверхні, координати (x,y) пов'язані співвідношенням $\varphi(x,y) = 0$, а координата z є довільною, тобто рівняння поверхні формально збігається з рівнянням кривої:

$$\varphi(x,y) = 0.$$

Зауважимо, що циліндрична поверхня є окремим випадком *загальної лінійчастої поверхні*, що задається векторним рівнянням $\vec{r}(u,v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{a}(u)$, або параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x(u,v) = \rho_1(u) + va_1(u), \\ y(u,v) = \rho_2(u) + va_2(u), \\ z(u,v) = \rho_3(u) + va_3(u). \end{cases}$$

Як ми бачимо, в загальному випадку через кожну точку $u = u_0$ кривої, що задана рівнянням $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$ проходить прямолінійна твірна у напрямку вектора $\vec{a}(u_0)$. В загальному випадку прямолінійні твірні лінійчастої поверхні не паралельні між собою. Якщо ж $\vec{a}(u) = \vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{const}}$, то прямолінійні твірні між собою паралельні і лінійчаста поверхня є циліндром.

Приклад 1.3. *Написати рівняння круглого циліндра, твірні якого дотикаються сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ та утворюють рівні кути з осями координат.*

Розв'язок. Вектор, що утворює рівні кути з осями координат, має напрямок $\vec{a} = \{1, 1, 1\}$. Нехай точка (x_0, y_0, z_0) належить сфері, тобто $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$. Проведемо через цю точку прямолінійну твірну циліндра.

$$\begin{cases} x = x_0 + v, \\ y = y_0 + v, \\ z = z_0 + v. \end{cases}$$

При значенні параметра $v = 0$, пряма дотикається сфери, тобто $v = 0$ – кратний корінь рівняння, що задає перетин прямої зі сферою. Отже,

$$(x_0 + v)^2 + (y_0 + v)^2 + (z_0 + v)^2 = 1,$$

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2v(x_0 + y_0 + z_0) + 3v^2 = 1.$$

Оскільки $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$, то $3v^2 + 2v(x_0 + y_0 + z_0) = 1$. $v = 0$ буде кратним коренем цього рівняння, якщо $x_0 + y_0 + z_0 = 0$. Маємо

$$\begin{cases} x = x_0 + v, \\ y = y_0 + v, \\ z = z_0 + v, \\ x_0 + y_0 + z_0 = 0, \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} v = \frac{1}{3}(x + y + z), \\ x_0 = \frac{1}{3}(2x - y - z), \\ y_0 = \frac{1}{3}(2y - x - z), \\ z_0 = \frac{1}{3}(2z - x - y), \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1. \end{cases}$$

Отже, неявне рівняння шуканого циліндра:

$$(2x - y - z)^2 + (2y - x - z)^2 + (2z - x - y)^2 = 9.$$

Відповідь: $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 3$.

■

Вправа 1.1. *Напишіть рівняння круглого циліндра, віссю якого є пряма* $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$, *якщо йому належить точка* $(1, 1, 1)$.

Відповідь: $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy + 2xz + 4yz - 14x - 4y - 22z + 26 = 0$.

1.4 Конічні поверхні

Лінійчаста поверхня, в якої всі прямолінійні твірні перетинаються в одній точці, називається конічною поверхнею. Маємо наступне визначення.

Нехай γ – деяка гладка крива, $M(a, b, c)$ – фіксована точка. Поверхня, що утворена прямими, які проходять через точку M і точки кривої γ, називається *конічною поверхнею*, або *конусом*. Крива γ називається *напрямною кривою*, точка M – *вершиною*, а прямі – *твірними* конічної поверхні. Якщо напрямна крива задана параметричним (векторним) рівнянням $\vec{\varphi}(u) = \{\varphi_1(u), \varphi_2(u), \varphi_3(u)\}$, а $\vec{r}_0 = \{a, b, c\}$ – радіус-вектор точки M, то векторне рівняння прямої, що проходить через дві точки з координатами $(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \varphi_3(u))$ та (a, b, c), буде мати вигляд $\vec{r} = \vec{r}_0 + v\,(\vec{\varphi}(u) - \vec{r}_0)$. Отже, параметричне рівняння конічної поверхні можна подати у вигляді

$$\begin{cases} x(u, v) = a + v\,(\varphi_1(u) - a)\,, \\ y(u, v) = b + v\,(\varphi_2(u) - b)\,, \\ z(u, v) = c + v\,(\varphi_3(u) - c)\,. \end{cases}$$

Ми бачимо, що конічна поверхня є окремим випадком загальної лінійчастої поверхні при $\vec{\rho}(u) = \vec{r}_0 = \overrightarrow{\text{const}}$ та $\vec{a}(u) = \vec{\varphi}(u) - \vec{r}_0$.

Найпростіший вигляд параметричне рівняння конуса матиме, якщо вершиною є початок координат, а напрямна крива лежить в площині $z = 1$ та задана параметричним рівнянням $x = f(u), y = g(u), z = 1$, а саме:

$$\begin{cases} x(u, v) = vf(u), \\ y(u, v) = vg(u), \\ z(u, v) = v. \end{cases}$$

Приклад 1.4. *Напишіть рівняння конічної поверхні, якщо вершина знаходиться у початку координат, а напрямною кривою є коло радіуса 4 у площині* $z = 1$.

Розв'язок. Запишемо параметричне рівняння напрямного кола $x = 4\cos u$, $y = 4\sin u$, $z = 1$ і, відповідно, рівняння конічної поверхні з вершиною в початку координат:

$$\begin{cases} x(u, v) = 4v\cos u, \\ y(u, v) = 4v\sin u, \\ z(u, v) = v, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 16z^2 = 0.$$

Ми в інший спосіб отримали той самий круглий конус, що і в прикладі 1.1.

■

2 Канонічні поверхні другого порядку в E^3.

2.1 Еліпсоїди

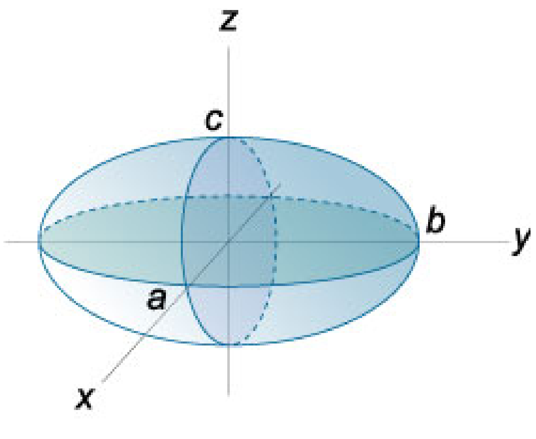

Рис. 1: Еліпсоїд

Геометричне місце точок простору, координати яких щодо деякої прямокутної декартової системи координат задовольняють рівнянню

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a \geq b \geq c),$$

називається *еліпсоїдом.* Дане рівняння називається *канонічним* рівнянням еліпсоїда, а відповідна система координат називається *канонічною*. Рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a \geq b \geq c$$

визначає порожню множину у просторі, але за аналогією з еліпсоїдом говорять, що це рівняння задає *уявний еліпсоїд.*

Величини a, b, c називаються *півосями* еліпсоїда (як дійсного, так і уявного).

Точки $(\pm a, 0, 0), (0, \pm b, 0), (0, 0, \pm c)$ називаються *вершинами* еліпсоїда.

Якщо $a > b > c$, то еліпсоїд називається *тривісним.* Якщо $a = b$, то еліпсоїд

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

називається *еліпсоїдом обертання* (навколо осі Oz).

Якщо $a = b = c = R$, то еліпсоїд є сферою радіусу R з рівнянням

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Еліпсоїд має три площини симетрії (координатні площини), три осі симетрії (осі координат) і єдиний центр симетрії (початок координат).

Твердження 2.1. *Канонічний еліпсоїд обертання* $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ *навколо осі* Oz *є результатом стискання сфери* $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = a^2$ *уздовж осі* $O\tilde{z}$ *з коефіцієнтом стискання* $k = \dfrac{c}{a}$ $(c < a)$.

Доведення. Перетворення простору з координатами $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, що задається формулою

$$\begin{cases} x = \tilde{x}, \\ y = \tilde{y}, \\ z = \frac{c}{a}\tilde{z}, \end{cases}$$

є стисканням простору уздовж осі $O\tilde{z}$ з коефіцієнтом $k = \dfrac{c}{a} < 1$. Якщо точка з координатами $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ лежала на сфері

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = a^2$$

радіуса a, то точка з координатами (x, y, z) буде задовольняти рівнянню

$$x^2 + y^2 + \frac{a^2}{c^2}\, z^2 = a^2 \quad \sim \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$\blacksquare$

Твердження 2.2. *Тривісний еліпсоїд є результатом стискання еліпсоїда обертання* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ *уздовж осі* Oy *з коефіцієнтом* $k = \dfrac{b}{a} < 1$.

Еліпсоїд обертання дійсно утворюється обертанням канонічного еліпса навколо меншої осі. Розглянемо канонічний еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a \geq c)$$

у площині xOz. Поверхня обертання навколо осі Oz отримає рівняння (3)

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

що збігається з рівнянням еліпсоїда обертання.

Розглянемо перерізи еліпсоїда площинами виду $z = h$. У проекції на площину xOy отримаємо сімейство еліпсів

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$$

з півосями

$$\tilde{a} = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \qquad \tilde{b} = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}.$$

Перерізи існують для $|h| \leq c$. Аналогічний вид мають перерізи $y = h$ і $x = h$.

Приклад 2.1. *Дано вершини еліпсоїда* $(8, -3, 0)$, $(-4, -3, 0)$. *Знайдіть рівняння цього еліпсоїда, якщо відомо, що його осі симетрії паралельні осям координат і площина yOz перетинає його по еліпсу:* $x = 0$, $\dfrac{(y+3)^2}{32} + \dfrac{z^2}{8} = 1$.

Розв'язок. Відомо, що вершини знаходяться на осі симетрії, а центр еліпсоїда розташований посередині між вершинами. Отже, пряма $y = -3$, $z = 0$ – вісь симетрії, $(2, -3, 0)$ – центр симетрії. Зауважимо, що якщо осі симетрії еліпсоїда паралельні осям координат, а центр має координати (x_0, y_0, z_0), то рівняння еліпсоїда має вигляд:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1.$$

В нашому випадку:

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y+3)^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Параметр a – це відстань від центра до вершин, тобто $a = 6$. Підставляємо це значення в рівняння еліпсоїда та знаходимо перетин з площиною $x = 0$:

$$\frac{4}{36} + \frac{(y+3)^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \; \Rightarrow \; \frac{(y+3)^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{8}{9}.$$

Порівнюємо це рівняння з відомим рівнянням лінії перетину з площиною $x = 0$, отримуємо:

$$\frac{8}{9}\,b^2 = 32, \quad b^2 = 36; \qquad \frac{8}{9}\,c^2 = 8, \quad c^2 = 9.$$

Отже, рівняння еліпсоїда:

$$\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y+3)^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

■

Вправа 2.1. *Знайдіть рівняння еліпсоїда, якщо його осі співпадають з осями координат, йому належить точка* $(3, 1, 1)$ *та площина* $x = y$ *перетинає його по колу радіуса 2.*

Відповідь: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{3y^2}{16} + \dfrac{z^2}{4} = 1.$

Твердження 2.3. *На тривісному еліпсоїді* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c)$ *існують кругові перерізи.*

Доведення. Розглянемо площину, що проходить через вісь Oy і утворює кут α з віссю Ox. Напрямними векторами такої площини є

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \{0, 1, 0\}, \\ \vec{e}_2 = \{\cos\alpha, 0, \sin\alpha\}. \end{cases}$$

Вектор $\vec{e}_1$ перпендикулярний вектору $\vec{e}_2$, тому в площині $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ утворять базис декартової прямокутної системи координат. Нехай (u, v) – параметри цієї (внутрішньої) системи координат. Формули переходу до зовнішньої системи координат (x, y, z) отримають вираз

$$\begin{cases} x = v\cos\alpha, \\ y = u, \\ z = v\sin\alpha. \end{cases}$$

Внутрішнє рівняння лінії перетину площини з еліпсоїдом отримаємо після підстановки

$$\frac{v^2\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} + \frac{v^2\sin^2\alpha}{c^2} = 1 \quad \sim \quad \frac{u^2}{b^2} + v^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{c^2}\right) = 1.$$

У площині перерізу параметри u і v є декартовими прямокутними координатами. Тому для кожного значення кута α отримане рівняння лінії перерізу є рівнянням еліпса. Покажемо, що серед цих еліпсів є коло. Для цього накладемо умову

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{c^2} = \frac{1}{b^2} \quad \sim \quad \cos^2\alpha\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}.$$

За умовою, $a > b$ і тому $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$. А значить $\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{b^2} < \dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{a^2}$. Звідси випливає, що

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}}} = \pm\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

$\blacksquare$

Вправа 2.2. *Площина*

$$\begin{cases} x = v\cos\alpha - h\sin\alpha, \\ y = u, \\ z = v\sin\alpha + h\cos\alpha \end{cases}$$

знаходиться на відстані $|h|$ від площини, що проходить через вісь Oy. Покажіть, що площина яка паралельна до кругового перерізу еліпсоїда перерізає еліпсоїд по колу з внутрішнім рівнянням

$$u^2 + \left(v \pm h\frac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}{ac}\right)^2 = b^2\left(1 - \frac{h^2b^2}{a^2c^2}\right).$$

При значенні $h = \pm\dfrac{ac}{b}$ круговий переріз вироджується в точку, що називається *омбілічною точкою* еліпсоїда, а площина перерізу стає дотичною до еліпсоїда.

Вправа 2.3. *Знайдіть координати омбілічних точок тривісного еліпсоїда. Проаналізуйте їх розташування в залежності від співвідношення півосей.*

2.2 Однопорожнинний гіперболоїд

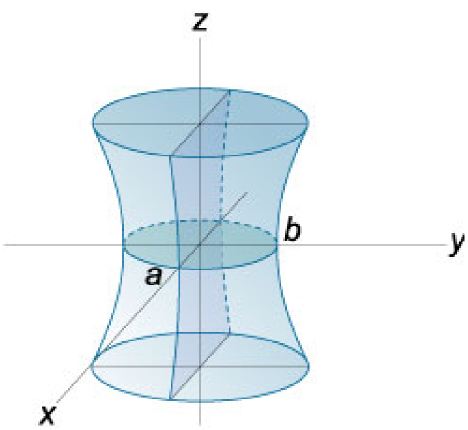

Рис. 2: Однопорожнинний гіперболоїд

Геометричне місце точок простору, координати яких щодо деякої прямокутної декартової системи координат задовольняють рівнянню

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a \geq b > 0,\ c > 0),$$

називається *однопорожнинним гіперболоїдом*. Це рівняння називається *канонічним*, а відповідна система координат називається *канонічною*. Величини a, b, c називаються півосями однопорожнинного гіперболоїда.

Однопорожнинний гіперболоїд має три площини симетрії (координатні площини), три осі симетрії (осі координат) і єдиний центр симетрії (початок координат)

Якщо $a = b$, то гіперболоїд

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

називається канонічним *однопорожнинним гіперболоїдом обертання* (навколо осі Oz).

Однопорожнинний гіперболоїд обертання є поверхнею, що утворена обертанням гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

навколо осі Oz. Тривісний однопорожнинний гіперболоїд є результатом стискання однопорожнинного гіперболоїда обертання уздовж осі Oy з коефіцієнтом $k = \dfrac{b}{a} < 1$. Доведення аналогічне доведенню подібних властивостей у випадку еліпсоїда.

Перерізи однопорожнинного гіперболоїда площинами $z = h$ проектуються на площину xOy у сімейство еліпсів виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$$

з півосями

$$\tilde{a} = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} \geq a, \quad \tilde{b} = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} \geq b.$$

Еліпс з найменшими півосями відповідає перерізу площиною $z = 0$, лежить у площині xOy і називається *горловим еліпсом.* Із зростанням $|h|$ півосі перерізів необмежено зростають.

Перерізи однопорожнинного гіперболоїда площинами $y = h$ проектуються на площину xOz в такий спосіб:

- якщо $|h| < b$, то в проекції отримаємо сімейство гіпербол

  $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}$$

  з півосями

  $$\tilde{a} = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}, \quad \tilde{c} = c\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}};$$

- якщо $|h| = b$, то проекція перерізу має рівняння

  $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

  а значить складається з двох прямих

  $$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \qquad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0;$$

- якщо $|h| > b$, то в проекції отримаємо сімейство спряжених гіпербол

  $$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2}{b^2} - 1$$

з півосями

$$\tilde{a} = a\sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}, \quad \tilde{c} = c\sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}.$$

проекції обох сімейств перерізів мають *асимптотами* проекції перерізів $|h| = b$, тобто прямі

$$z = \pm\frac{c}{a}x.$$

На поверхні однопорожнинного гіперболоїда розташовані 2 сімейства прямих, що лежать у площинах $y = \pm b$ і перетинаються в точках горлового еліпсу. Однопорожнинний гіперболоїд є 2-лінійчастою поверхнею з горловим еліпсом у якості напрямної кривої.

Властивості перерізів $x = h$ аналогічні властивостям перерізів $y = h$.

2.3 Двопорожнинний гіперболоїд

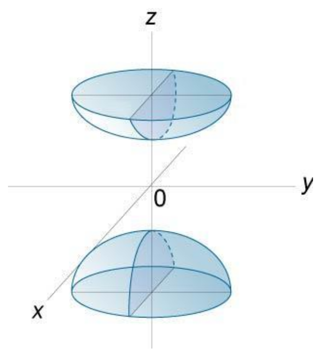

Рис. 3: Двопоржнинний гіперболоїд

Геометричне місце точок простору, координати яких щодо деякої прямокутної декартової системи координат задовольняють рівнянню

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (a \geq b > 0,\ c > 0),$$

називається *двопорожнинним гіперболоїдом.*

Це рівняння називається *канонічними*, а відповідна система координат називається *канонічною.* Величини a, b, c називаються півосями двопорожнинного гіперболоїда. Точки $(0, 0, \pm c)$ називаються вершинами двопорожнинного гіперболоїда.

Двопорожнинний гіперболоїд має три площини симетрії (координатні площини), три осі симетрії (осі координат) і єдиний центр симетрії (початок координат).

Якщо $a = b$, то поверхня називається канонічним *двопорожнинним гіперболоїдом обертання.* Двопорожнинний гіперболоїд обертання є поверхнею, що утворена обертанням гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

навколо осі Oz. Тривісний двопорожнинний гіперболоїд є результатом стискання двопорожнинного гіперболоїда обертання уздовж осі Oy з коефіцієнтом $k = \dfrac{b}{a} < 1$. Доведення аналогічне доведенню подібних властивостей у випадку еліпсоїда.

Перерізи двопорожнинного гіперболоїда площинами $z = h$ проектуються на площину xOy у сімейство еліпсів

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1.$$

- Якщо $|h| < c$, то перерізом є уявний еліпс і значить площина $z = h$ не має спільних точок із двопорожнинним гіперболоїдом;
- Якщо $|h| = c$, то перерізи вироджуються в точки $(0, 0, \pm c)$ – вершини гіперболоїда;
- Якщо $|h| > c$, то перерізи у сімейство дійсних еліпсів з півосями

$$\tilde{a} = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad \tilde{b} = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}.$$

Із зростанням h півосі перерізів необмежено зростають.

Перерізи двопорожнинного гіперболоїда площинами $y = h$ проектуються на площину xOz у сімейство гіпербол

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{h^2}{b^2}$$

з півосями

$$\tilde{a} = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}}, \quad \tilde{c} = c\sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}}.$$

Із зростанням $|h|$ півосі гіпербол необмежено зростають. Прямі

$$z = \pm\frac{c}{a}x$$

є *асимптотами* проекцій перерізів.

Властивості перерізів двопорожнинного гіперболоїда площинами $x = h$ аналогічні властивостям перерізів площинами $y = h$.

Вправа 2.4. *Знайдіть кругові перерізи двопорожнинного гіперболоїда й омбілічні точки на ньому. Проаналізуйте їх розташування в залежності від співвідношення півосей.*

2.4 Конуси

Геометричне місце точок простору, координати яких щодо деякої прямокутної декартової системи координат задовольняє рівнянню

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (a \geq b > 0,\ c > 0),$$

називається *конусом* другого порядку. Це рівняння називається *канонічним* рівнянням конуса, а відповідна система координат називається *канонічною*.

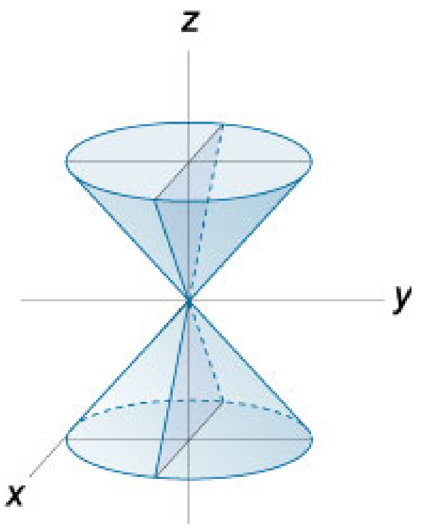

Рис. 4: Конус

Рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

визначає одну точку – початок координат, але за аналогією з конусом говорять, що це рівняння визначає *уявний конус з вершиною в дійсній точці* $(0,0,0)$.

Величини a, b, c називаються *півосями* конуса, а точка $(0,0,0)$ – *вершиною* конуса (як дійсного, так і уявного).

Якщо $a = b$, то конус

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

називається канонічним *конусом обертання.*

Конус обертання є поверхнею, що утворена обертанням прямої

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$$

навколо осі Oz. Дійсно, застосувавши формулу (2), отримаємо рівняння

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} = \frac{z}{c}.$$

Після піднесення до квадрату отримаємо рівняння конуса обертання.

Загальний конус утворюється з конуса обертання стисканням уздовж осі Oy з коефіцієнтом $k = \dfrac{b}{a}$.

Конус (як дійсний, так і уявний) має три площини симетрії (координатні площини), три осі симетрії (осі координат) і єдиний центр симетрії (початок координат, тобто, вершину).

Перерізи конуса площинами $z = h$ проектуються на площину xOy у сімейство еліпсів

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$$

з півосями

$$\tilde{a} = \frac{a}{c}\,|h|, \quad \tilde{b} = \frac{b}{c}|h|.$$

Якщо $h = 0$, то переріз вироджується в точку $(0,0,0)$ – *вершину конусу.*

Перерізи конуса площинами $y = h$ проектуються на площину xOz у сімейство гіпербол

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{b^2}$$

з півосями

$$\tilde{a} = a\,\frac{|h|}{b}, \quad \tilde{c} = c\,\frac{|h|}{b},$$

якщо $h \neq 0$, і в пару прямих

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \sim \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0,$$

якщо $h = 0$.

Властивості перерізів площинами $x = h$ аналогічні властивостям перерізів $y = h$.

Приклад 2.2. *Напишіть рівняння конуса, якщо він має вершину в точці* $(3, 4, 6)$*, його осі симетрії паралельні осям координат і він перетинає площину xOy по еліпсу, осі якого паралельні осям Ox та Oy, причому еліпс дотикається координатних осей.*

Розв'язок. Виходячи з умов на осі симетрії, вершину конуса, а також переріз площиною xOy, маємо наступне рівняння конуса

$$\frac{(x-3)^2}{a^2} + \frac{(y-4)^2}{b^2} - \frac{(z-6)^2}{c^2} = 0.$$

Очевидно, що числа a^2, b^2, c^2 визначаються з точністю до спільного множника, тож щоб отримати у перерізі площиною xOy канонічне рівняння еліпса, візьмемо $c = 6$. Тобто рівняння переріза $\frac{(x-3)^2}{a^2} + \frac{(y-4)^2}{b^2} - \frac{(0-6)^2}{36} = 0$. Оскільки еліпс дотикається координатних осей, то його рівняння $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$. Отже, $a^2 = 9,\ b^2 = 16$ і рівняння конуса

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{16} - \frac{(z-6)^2}{36} = 0.$$

■

Дивіться також **приклад 1.1** і **приклад 1.4**.

Вправа 2.5. *Напишіть параметричне рівняння конічної поверхні з напрямною кривою $y^2 = 2x, z = 1$ та вершиною у початку координат. Перевірте, що це конус другого порядку. Яке буде рівняння цієї поверхні, якщо зробити обертання системи координат на кут $\frac{\pi}{4}$ за годинниковою стрілкою навколо осі Oy?*

Відповідь: $2y^2 - xz = 0$, $\frac{1}{2}\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2 - \frac{1}{2}\tilde{z}^2 = 0$.

2.5 Еліптичний параболоїд

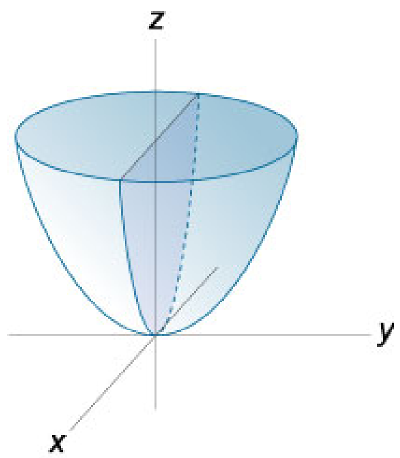

Рис. 5: Еліптичний параболоїд

Геометричне місце точок простору, координати яких щодо деякої прямокутної декартової системи координат задовольняють рівнянню

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p \geq q > 0),$$

називається *еліптичним параболоїдом.*

Це рівняння називається *канонічним* рівнянням еліптичного параболоїда, а відповідна система координат називається *канонічною.* Величини p, q називаються *параметрами*, точка $(0, 0, 0)$ – *вершиною* еліптичного параболоїда.

Еліптичний параболоїд має дві площини симетрії (координатні площини xOz і yOz), одну вісь симетрії (вісь Oz) і не має жодного центра симетрії.

Якщо $p = q$, то поверхня називається канонічним *еліптичним параболоїдом обертання.* Еліптичний параболоїд обертання утворюється обертанням параболи

$$\frac{x^2}{2p} = z$$

навколо осі Oz. Загальний еліптичний параболоїд утворюється стисканням еліптичного параболоїда обертання уздовж осі Oy з коефіцієнтом $k = \sqrt{\frac{q}{p}}$.

Одночасно, *еліптичний параболоїд є поверхнею перенесення*, що утворена параболами

$$z = \frac{x^2}{2p} \quad \text{та} \quad z = \frac{y^2}{2q}\,.$$

Перерізи еліптичного гіперболоїда площинами $z = h > 0$ проектуються на площину xOy у сімейство еліпсів виду

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = h$$

з півосями $\tilde{a} = \sqrt{2ph}$, $\tilde{b} = \sqrt{2qh}$. Переріз $h = 0$ вироджується в точку з координатами $(0, 0, 0)$ – вершину еліптичного параболоїда. Якщо $h < 0$, то площина $z = h$ не має спільних точок з поверхнею еліптичного параболоїда.

Перерізи еліптичного гіперболоїда площинами $y = h$ проектуються на площину xOz у сімейство конгруентних парабол

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{h^2}{2q} = z.$$

Властивості перерізів $x = h$ аналогічні властивостям перерізів $y = h$.

Приклад 2.3. *Напишіть рівняння поверхні другого порядку, якщо площина xOy перетинає її по колу $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 16 = 0$, а площини xOz та yOz по параболам, осі яких паралельні додатному напрямку осі Oz, причому параметр параболи, що лежить в площині xOz дорівнює 3.*

Розв'язок. *Перший спосіб.* Виходячи з виду перерізів координатними площинами, робимо висновок, що дана поверхня є параболоїдом обертання з віссю симетрії паралельною Oz. Виділимо повні квадрати та отримаємо рівняння кола $(x-2)^2+(y-4)^2 = 36$. Вісь параболоїда – пряма $x = 2, y = 4, z = t$, вершина знаходиться в точці $(2, 4, z_0)$, тобто його рівняння

$$\frac{(x-2)^2}{p} + \frac{(y-4)^2}{p} = 2(z - z_0).$$

$p = 3$ – це фокальний параметр параболи, що лежить в площині xOz. Знайдемо перетин параболоїда площиною xOy, отримаємо $-2 \cdot 3 \cdot z_0 = 36$. Отже, $z_0 = -6$ і рівняння параболоїда обертання

$$\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(y-4)^2}{3} = 2(z + 6).$$

Другий спосіб. Скористаємося загальним рівнянням (1) поверхні другого порядку. Виходячи з рівняння перерізу площиною xOy, знайдемо певні коефіцієнти:

$$x^2 + y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz - 4x - 8y + 2b_3z - 16 = 0.$$

Оскільки при перетині площиною $y = 0$ ми отримуємо параболу з віссю паралельною додатному напрямку осі Oz та параметром 3, то $a_{33} = 0$, $a_{13} = 0$, $b_3 = -3$. Далі, з вигляду перерізу площиною $x = 0$ ми отримуємо $a_{23} = 0$. Отже, рівняння поверхні другого порядку

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y - 6z - 16 = 0,$$

яке є рівнянням параболоїда обертання.

■

2.6 Гіперболічний параболоїд

Геометричне місце точок простору, координати яких щодо деякої прямокутної декартової системи координат задовольняють рівнянню

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p, q > 0),$$

називається *гіперболічним параболоїдом.* Це рівняння називається *канонічним* рівнянням гіперболічного параболоїда, а відповідна система координат називається *канонічною.* Величини p, q називаються *параметрами* гіперболічного параболоїда.

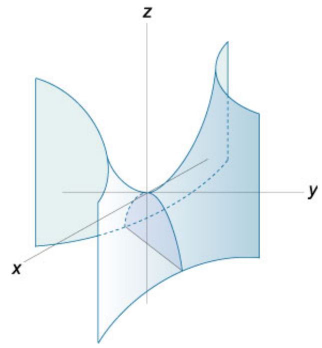

Рис. 6: Гіперболічний параболоїд

Гіперболічний параболоїд має дві площини симетрії (координатні площини xOz і Oyz), одну вісь симетрії (вісь Oz) і не має жодного центра симетрії.

Гіперболічний параболоїд є поверхнею перенесення, що утворена параболами

$$z = \frac{x^2}{2p} \quad \text{та} \quad z = -\frac{y^2}{2q}\,.$$

Перерізи гіперболічного параболоїда площинами $z = h$ проектуються на площину xOy

- при $h > 0$ у сімейство гіпербол

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = h$$

  з півосями

$$\tilde{a} = \sqrt{2ph}, \quad \tilde{b} = \sqrt{2qh};$$

- при $h = 0$ у пару прямих

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = 0;$$

- при $h < 0$ у сімейство гіпербол

$$-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = -h$$

  з півосями

$$\tilde{a} = \sqrt{-2ph}, \quad \tilde{b} = \sqrt{-2qh}.$$

Перерізи гіперболічного параболоїда площинами $y = h$ проектуються на площину xOz у сімейство конгруентних парабол $\dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{h^2}{2q} = z$.

Перерізи гіперболічного параболоїда площинами $x = h$ проектуються на площину xOz у сімейство конгруентних парабол $\dfrac{h^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q} = z$.

2.7 Циліндри

Якщо в якості напрямної кривої циліндричної поверхні обрати будь-яку з 9 кривих 2-го порядку, а твірні спрямувати перпендикулярно до площини, у якій ця крива лежить, то така циліндрична поверхня буде задаватися многочленом 2-го порядку, а значить буде поверхнею 2-го порядку. Спрямуємо вісь Oz декартовой прямокутної системи координат паралельно твірним циліндричної поверхні, а осі Ox і Oy пов'яжемо з осями канонічної системи координат для відповідної кривої. При такому виборі координатної системи рівняння поверхні не буде містити координати z і рівняння циліндра буде збігатися з рівнянням одного з 9 типів рівнянь кривих 2-го порядку.

Розрізняються невироджені і вироджені циліндри 2-го порядку. Вироджені циліндри – це циліндри, що розпадаються на пари площин. За типом напрямної кривої розрізняються і типи невироджених циліндрів.

Еліптичний циліндр.

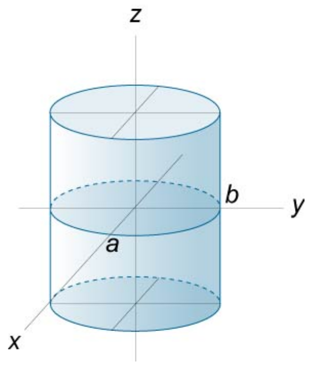

Рис. 7: Еліптичний циліндр

Геометричне місце точок простору, координати яких щодо деякої прямокутної декартової системи координат задовольняють рівнянню

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \geq b > 0),$$

називається дійсним *еліптичним циліндром*, а рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad a \geq b > 0$$

визначає *уявний еліптичний циліндр*. У дійсному евклідовому просторі уявний циліндр є пустою множиною $\varnothing$. Величини a, b називаються півосями еліптичного циліндра (як дійсного, так і уявного).

Еліптичний циліндр має дві фіксовані площини симетрії (площини xOz і Oyz) і сімейство площин симетрії, перпендикулярних твірним; одну фіксовану вісь симетрії (вісь Oz) і сімейство осей симетрії, паралельних до осей Ox і Oy; лінію центрів симетрії – вісь Oz.

Гіперболічний циліндр.

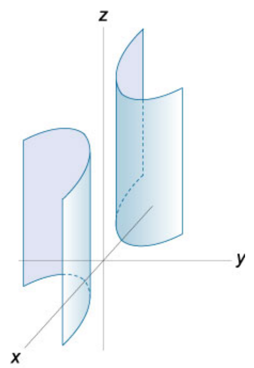

Рис. 8: Гіперболічний циліндр

Геометричне місце точок простору, координати яких щодо деякої прямокутної декартової системи координат задовольняють рівнянню

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0),$$

називається *гіперболічним циліндром.*

Гіперболічний циліндр має дві фіксовані площини симетрії (площини xOz і Oyz) і сімейство площин симетрії, перпендикулярних твірним; одну фіксовану вісь симетрії (вісь Oz) і сімейство осей симетрії, паралельних до осей Ox і Oy; лінію центрів симетрії – вісь Oz.

Параболічний циліндр.

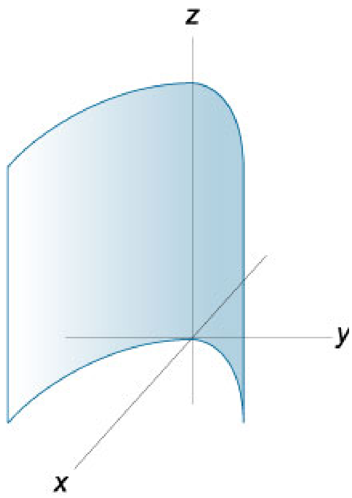

Рис. 9: Параболічний циліндр

Геометричне місце точок простору, координати яких щодо деякої прямокутної декартової системи координат задовольняють рівнянню

$$y^2 = 2p\,z \quad (p > 0),$$

називається *параболічним циліндром.*

Параболічний циліндр має одну фіксовану площину симетрії (площину xOz) і сімейство площин симетрії, що перпендикулярні твірним; має сімейство осей симетрії, що паралельні до осі Ox; не має жодного центра симетрії.

Еліптичний, гіперболічний і параболічний циліндри – це невироджені циліндри другого порядку.

Циліндри, побудовані над парами прямих, утворюють пари площин і складають клас поверхонь другого порядку, *що розпадаються.* Цей клас визначається геометричним місцем точок простору, координати яких щодо деякої прямокутної декартової системи координат задовольняють рівнянню кривої другого порядку, що розпадається. Відповідні рівняння і системи координат називаються *канонічними.* Опишемо всі поверхні другого порядку, що розпадаються.

- **Пара дійсних площин, що перетинаються по прямій** (осі Oz)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (a, b > 0).$$

Поверхня має дві фіксовані площини симетрії (площини xOz та yOz) і сімейство площин симетрії, що перпендикулярні осі Oz; одну фіксовану вісь симетрії (вісь Oz) і сімейство осей симетрії, паралельних до осей Ox і Oy; безліч центрів симетрії, що розташовані на осі Oz.

- **Пара уявних площин, що перетинаються по дійсній прямій** (осі Oz)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (a, b > 0).$$

Поверхня має дві фіксовані площини симетрії (площини xOz та yOz) і сімейство площин симетрії, що перпендикулярні осі Oz; одну фіксовану вісь симетрії (вісь Oz) і сімейство осей симетрії, паралельних до осей Ox і Oy; безліч центрів симетрії, що розташовані на осі Oz.

- **Пара дійсних паралельних площин**

$$y^2 = b^2 \quad (b > 0).$$

Поверхня має одну фіксовану площину симетрії (площина xOz) і безліч площин симетрії, що перпендикулярні площині xOz; безліч осей симетрії (прямі, що паралельні осі Oy та прямі, що лежать у площині xOz); безліч центрів симетрії, розташованих у площині xOz.

- **Пара уявних паралельних площин**

$$y^2 = -b^2 \quad (b > 0).$$

Поверхня має одну фіксовану площину симетрії (площина xOz) і безліч площин симетрії, що перпендикулярні площині xOz; безліч осей симетрії (прямі, що паралельні осі Oy та прямі, що лежать у площині xOz); безліч центрів симетрії, розташованих у площині xOz.

- **Пара площин, що збігаються**

$$y^2 = 0.$$

Поверхня має одну фіксовану площину симетрії (площина xOz) і безліч площин симетрії, що перпендикулярні площині xOz; безліч осей симетрії (прямі, що паралельні осі Oy та прямі, що лежать у площині xOz); безліч центрів симетрії, розташованих у площині xOz.

Вправа 2.6. *Напишіть рівняння еліптичного циліндра з напрямним колом* $x^2+y^2=1, z=0$ *та твірними, які утворюють рівні кути з осями координат. Знайдіть півосі еліпса, якій лежить у площині, перпендикулярній до твірних циліндра.*

Відповідь: $x^2+y^2+2z^2-2xz-2yz-1$; $a=1, b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Сутність класифікаційної теореми полягає в тому, що *вибором відповідної декартової прямокутної системи координат рівняння будь-якої поверхні 2-го порядку може бути зведене до одного з перелічених вище 17 типів рівнянь 2-го порядку.* Тим самим, будь-яка поверхня 2-го порядку є однією з перелічених 17 типів поверхонь.

3 Дотична площина

Дотичною площиною до поверхні S в точці $M_0 \in S$ називається площина, що проходить через точку M_0 і містить дотичні вектори до всіх регулярних кривих[1], які лежать на поверхні і проходять через точку M_0. Якщо лінія подана в параметричній формі, а саме як система гладких функцій $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, то її дотичний вектор має координати $\{x'(t), y'(t), z'(t)\}$.

[1]Крива, або лінія, називається регулярною, якщо в кожній її точці існує дотична

Нехай лінія $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ лежить на поверхні еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Це означає, що для всіх значень параметра t має місце тотожність

$$f(t) = \frac{x^2(t)}{a^2} + \frac{y^2(t)}{b^2} + \frac{z^2(t)}{c^2} - 1 \equiv 0. \tag{4}$$

Як наслідок, $f'(t) \equiv 0$ також. За правилами диференціювання складеної функції

$$\frac{1}{2} f'(t) = \frac{x(t)x'(t)}{a^2} + \frac{y(t)y'(t)}{b^2} + \frac{z(t)z'(t)}{c^2} \equiv 0.$$

Таким чином, в кожній точці лінії, що лежить на еліпсоїді, вектор

$$\vec{n}(t) = \left\{ \frac{x(t)}{a^2}, \frac{y(t)}{b^2}, \frac{z(t)}{c^2} \right\}$$

перпендикулярний до її дотичного вектору.

Якщо дві лінії проходять через точку (x_0, y_0, z_0) на еліпсоїді, то вектор

$$\vec{n} = \left\{ \frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2} \right\}$$

перпендикулярний в цій точці до дотичних векторів обох ліній. З огляду на те, що лінії можуть бути довільними[2], вектор

$$\vec{n} = \left\{ \frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2} \right\}$$

перпендикулярний до дотичного вектору будь-якої регулярної кривої, що лежить на еліпсоїді і проходить через точку (x_0, y_0, z_0). Це означає, що всі такі вектори лежать у площині з вектором нормалі $\vec{n}$. З означення дотичної площини поверхні випливає, що площина

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$$

є дотичною площиною до еліпсоїда в точці (x_0, y_0, z_0) на еліпсоїді. З огляду на те що $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$, рівняння дотичної площини до еліпсоїда може бути спрощене до

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

В аналогічний спосіб виводяться рівняння дотичної площини до всіх інших поверхонь другого порядку, що не розпадаються в пари площин.[3] Рівняння поверхонь та їх дотичних площин подамо в таблиці.

[2] але такі, що проходять через точку (x_0, y_0, z_0)

[3] У випадку розпадних поверхонь дотична площина збігається з відповідною площиною

Рівняння поверхні	Рівняння дотичної площини
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$	$\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}+\dfrac{zz_0}{c^2}=1$
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$	$\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}-\dfrac{zz_0}{c^2}=1$
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$	$\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}-\dfrac{zz_0}{c^2}=-1$
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$	$\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}-\dfrac{zz_0}{c^2}=0 \quad (x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$
$\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$	$\dfrac{xx_0}{p}+\dfrac{yy_0}{q}=z+z_0$
$\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z$	$\dfrac{xx_0}{p}-\dfrac{yy_0}{q}=z+z_0$
$y^2=2px$	$yy_0=p(x+x_0)$
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=1$

Наведені міркування щодо дотичної площини поверхні другого порядку мають природне узагальнення. Нехай поверхня задається рівнянням $\Phi(x,y,z)=0$. Якщо лінія $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$ лежить на поверхні, то її координати задовольняють рівнянню $\Phi(x(t),y(t),z(t))=0$ для всіх значень параметра t. Якщо позначити $f(t)=\Phi(x(t),y(t),z(t))$, то має місце тотожність

$$f(t)=\Phi(x(t),y(t),z(t))\equiv 0. \tag{5}$$

В такому разі $f'(t)\equiv 0$ також. За правилами диференціювання складеної функції

$$f'=\Phi'_x(x(t),y(t),z(t))\,x'+\Phi'_y(x(t),y(t),z(t))\,y'+\Phi'_z(x(t),y(t),z(t))\,z'\equiv 0, \tag{6}$$

де символами Φ'_x, Φ'_y та Φ'_z позначені так звані частинні похідні функції $\Phi(x,y,z)$. Частинна похідна, скажімо за змінною x, обчислюється як похідна від функції $\Phi(x,y,z)$ як функції лише змінної x у припущенні, що змінні y та z при обчисленні є сталими величинами. Наприклад, $(x^2+y^2+z^2)'_x=2x$.

Для функції $\Phi(x,y,z)$ вектор $grad(\Phi)=\{\Phi'_x,\Phi'_y,\Phi'_z\}$ називається *градієнтом* функції $\Phi(x,y,z)$. Із тотожності (6) випливає, що вектор $grad(\Phi)$ є вектором нормалі до дотичної площини (якщо існує) в кожній точці поверхні $\Phi(x, y, z) = 0$.

Отже, в загальному випадку рівняння дотичної площини неявно заданої поверхні $\Phi(x, y, z) = 0$ в точці (x_0, y_0, z_0), що належить поверхні[4], запишеться у вигляді

$$\Phi'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \Phi'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \Phi'_z(x_0, y_0, z_0)(z - x_0) = 0. \quad (7)$$

Вправа 3.1. *Виведіть рівняння дотичної площини канонічних поверхонь другого порядку з рівняння* (7).

Приклад 3.1. *Через пряму* $y = 0, \ z = 1$ *проведіть площини, дотичні до двопорожнинного гіперболоїда*

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{9} = -1,$$

та визначте точки дотику.

Розв'язок. Площини, які проходять через пряму, утворюють жмуток площин. Запишемо його рівняння: $\alpha y + \beta z = \beta$. Запишемо рівняння дотичної площини до двопорожнинного гіперболоїда в невідомій точці (x_0, y_0, z_0), яка належить поверхні:

$$\frac{xx_0}{16} + \frac{yy_0}{8} - \frac{zz_0}{9} = -1.$$

Потрібно знайти таку точку на поверхні, в якій дотична площина належить жмутку площин $\alpha y + \beta z = \beta$, тобто:

$$\frac{x_0}{16} = 0, \quad \frac{y_0}{8} = \alpha, \quad -\frac{z_0}{9} = \beta, \quad -1 = \beta$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 8\alpha, \quad z_0 = 9.$$

Оскільки точка належить поверхні, то

$$\frac{64\alpha^2}{8} - \frac{9^2}{9} = -1, \quad 8\alpha^2 = 8, \quad \alpha = \pm 1.$$

Отже дотичні площини мають рівняння

$$y - z = -1 \quad \text{та} \quad y + z = 1,$$

відповідні точки дотику $(0, 8, 9)$ та $(0, -8, 9)$.

■

[4] тобто $\Phi(x_0, y_0, z_0) = 0$

Вправа 3.2. *Для того, щоб площина* $Ax + By + Cz + D = 0$ *була дотичною до канонічної поверхні 2 порядку в деякій неособливій точці необхідно і достатньо виконання наступних умов*

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, &\qquad a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2 = D^2;\\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, &\qquad a^2A^2 + b^2B^2 - c^2C^2 = D^2, D \neq 0;\\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, &\qquad a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2 = -D^2, D \neq 0;\\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, &\qquad a^2A^2 + b^2B^2 - c^2C^2 = 0, C \neq 0, D = 0;\\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, &\qquad a^2A^2 + b^2B^2 = D^2, C = 0;\\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, &\qquad a^2A^2 - b^2B^2 = D^2, C = 0, D \neq 0;\\
y^2 = 2px, &\qquad pB^2 = 2AD, C = 0;\\
\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, &\qquad pA^2 + qB^2 = 2CD;\\
\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, &\qquad pA^2 - qB^2 = 2CD, C \neq 0.
\end{aligned}$$

Підказка. Розглянемо задачу для випадку еліпсоїда. *Необхідність.* Рівняння дотичної площини до еліпсоїда

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$$

має збігатися з рівнянням площини $Ax + By + Cz + D = 0$, що має місце за умови виконання пропорцій

$$\frac{x_0}{a^2A} = \frac{y_0}{b^2B} = \frac{z_0}{c^2C} = \frac{-1}{D}.$$

В такому разі

$$x_0 = -\frac{a^2A}{D}, \quad y_0 = -\frac{b^2B}{D}, \quad z_0 = -\frac{c^2C}{D}.$$

Але точка (x_0, y_0, z_0) лежить на еліпсоїді. Значить

$$\frac{a^2A^2}{D^2} + \frac{b^2B^2}{D^2} + \frac{c^2C^2}{D^2} = 1 \quad \sim \quad a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2 = D^2.$$

Достатність. Нехай $a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2 = D^2$. Очевидно, що $D \neq 0$. Тоді

$$\frac{a^2A^2}{D^2} + \frac{b^2B^2}{D^2} + \frac{c^2C^2}{D^2} = 1$$

і точка

$$x_0 = -\frac{a^2 A}{D}, \quad y_0 = -\frac{b^2 B}{D}, \quad z_0 = -\frac{c^2 C}{D}$$

лежать на еліпсоїді. Дотична площина в цій точці збігається із заданою.

Приклад 3.2. *При якому значенні m площина $x-2y-2z+m=0$ є дотичною до еліпсоїда $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$.*

Розв'язок. Скористаємося результатом вправи 3.2:

$$144(1)^2 + 36(-2)^2 + 9(-2)^2 = m^2 \quad \sim \quad m^2 = 324 \quad \sim \quad m = \pm 18.$$

Відповідь: $m = \pm 18$.

■

Вправа 3.3. *Розв'язати попередню задачу, не використовуючи вправу 3.2, знайти також точки дотику.*

4 Прямолінійні твірні на поверхнях другого порядку

4.1 Прямолінійні твірні на поверхні однопорожнинного гіперболоїда

При вивченні перерізів поверхонь 2-го порядку, можна було помітити, що в деяких випадках, а саме у випадку однопорожнинного гіперболоїда і гіперболічного параболоїда, існували площини, що перетинають ці поверхні по парі прямих. Виявляється, що ці дві поверхні *можуть бути складені* із двох сімейств прямих.

Твердження 4.1. *Однопорожнинний гіперболоїд несе на собі два сімейства прямолінійних твірних, що мають наступні властивості:*

(a) через будь-яку точку поверхні проходить рівно одна пряма кожного сімейства;

(b) будь-які дві твірні різних сімейств лежать в одній площині;

(c) будь-які дві твірні одного сімейства є мимобіжними;

(d) будь-які три твірні одного сімейства не паралельні жодній площині.

Доведення. Рівняння однопорожнинного гіперболоїда має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

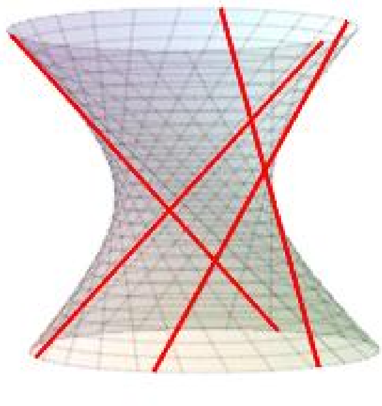

Рис. 10: Прямолінійні твірні на однопорожнинному гіперболоїді.

Зауважимо, що на цій поверхні не може лежати пряма, що паралельна площині xOy, бо перерізи поверхні площинами $z = h$ є сімейством еліпсів. Це означає, що якщо пряма лежить на поверхні, то вона обов'язково *перетинає горловий еліпс*, а її напрямний вектор *не ортогональний* до осі Oz.

Якщо точка $(x_1, y_1, 0)$ належить горловому еліпсу, то її координати задовольняють рівнянню

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = 1.$$

Нехай $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ є напрямним вектором шуканої прямої. Тоді $v_z \neq 0$. Оскільки координати напрямного вектору прямої визначаються з точністю до ненульового коефіцієнта пропорційності, то ми можемо покласти

$$v_z = c.$$

Отже, рівняння прямої, що може лежати на поверхні будемо шукати у вигляді:

$$\begin{cases} x = x_1 + v_x t, \\ y = y_1 + v_y t, \\ z = ct. \end{cases} \tag{8}$$

Підставимо (8) в рівняння гіперболоїда і будемо вимагати, щоб всі точки прямої задовольняли рівнянню гіперболоїда. Отримаємо:

$$\left(\frac{x_1 + v_x t}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + v_y t}{b}\right)^2 - t^2 \equiv 1,$$

$$2\left(\frac{x_1 v_x}{a^2} + \frac{y_1 v_y}{b^2}\right) t + \left(\frac{v_x^2}{a^2} + \frac{v_y^2}{b^2} - 1\right) t^2 \equiv 0.$$

Оскільки це тотожність, всі коефіцієнти при t мають бути нулями. Запишемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{x_1 v_x}{a^2} + \dfrac{y_1 v_y}{b^2} = 0, \\ \dfrac{v_x^2}{a^2} + \dfrac{v_y^2}{b^2} - 1. \end{cases}$$

З першого рівняння виразимо

$$v_y = -\frac{x_1}{y_1}\frac{b^2}{a^2} v_x$$

і підставимо в друге. Отримаємо

$$\frac{v_x^2}{a^2} + \frac{x_1^2}{y_1^2}\frac{b^2}{a^4}v_x^2 = 1 \quad \sim \quad \frac{v_x^2}{y_1^2}\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{x_1^2}{a^2}\right) = 1 \quad \sim \quad \frac{v_x^2}{y_1^2}\frac{b^2}{a^2} = 1.$$

Маємо два розв'язки

$$(1) \left\{ \begin{aligned} v_x &= \frac{a}{b}\,y_1, \\ v_y &= -\frac{b}{a}\,x_1; \end{aligned} \right. \qquad (2) \left\{ \begin{aligned} v_x &= -\frac{a}{b}\,y_1, \\ v_y &= \frac{b}{a}\,x_1. \end{aligned} \right.$$

Таким чином, через кожну точку $(x_1, y_1, 0)$ горлового еліпса однопорожнинного гіперболоїда проходить дві прямі

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= x_1 + \frac{a}{b}\,y_1\ t, \\ y &= y_1 - \frac{b}{a}\,x_1\ t, \\ z &= ct, \end{aligned} \right. \qquad (2) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= x_1 + \frac{a}{b}\,y_1\ t, \\ y &= y_1 - \frac{b}{a}\,x_1\ t, \\ z &= -ct, \end{aligned} \right.$$

що цілком лежать на поверхні. Точки горлового еліпса параметризуються за формулами $x_1 = a\cos\alpha$, $y_1 = b\sin\alpha \quad (\alpha \in [0, 2\pi))$ і, таким чином, на поверхні маємо два однопараметричні сімейства прямих

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= a(\cos\alpha + t\sin\alpha), \\ y &= b(\sin\alpha - t\cos\alpha), \\ z &= ct, \end{aligned} \right. \qquad (2) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= a(\cos\alpha + t\sin\alpha), \\ y &= b(\sin\alpha - t\cos\alpha), \\ z &= -ct, \end{aligned} \right. \qquad (9)$$

Покажемо, що це дійсно шукані сімейства.

(а) Нехай (x_0, y_0, z_0) точка на однопорожнинному гіперболоїді, тобто

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1.$$

Покажемо, що вона лежить на прямій сімейства (1). Для цього достатньо перевірити, що система

$$\left\{ \begin{aligned} x &= a(\cos\alpha + t\sin\alpha) \\ y &= b(\sin\alpha - t\cos\alpha) \\ z &= ct \end{aligned} \right.$$

має єдиний розв'язок відносно t і $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Ясно, що $t_0 = \dfrac{z_0}{c}$, а для знаходження параметра α отримуємо систему

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{x_0}{a} &= \cos\alpha + t_0\sin\alpha, \\ \frac{y_0}{b} &= -t_0\cos\alpha + \sin\alpha, \end{aligned} \right.$$

з якої легко знаходимо потрібний розв'язок

$$\sin\alpha_1 = \frac{\dfrac{z_0}{c}\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b}}{1 + \left(\dfrac{z_0}{c}\right)^2}, \qquad \cos\alpha_1 = \frac{\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}\dfrac{y_0}{b}}{1 + \left(\dfrac{z_0}{c}\right)^2}. \tag{10}$$

Для перевірки коректності розв'язку, перевіримо виконання основної тригонометричної тотожності $\sin^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1 = 1$. Дійсно,

$$\frac{\left(t_0\,\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right)^2}{(1+t_0^2)^2} + \frac{\left(\frac{x_0}{a} - t_0\,\frac{y_0}{b}\right)^2}{(1+t_0^2)^2} = \frac{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}{1+t_0^2} = \frac{1 + \frac{z_0^2}{c^2}}{1+t_0^2} = 1.$$

Аналогічно, що через точку (x_0, y_0, z_0) проходить єдина пряма сімейства (2), для якої

$$\sin\alpha_2 = \frac{-\dfrac{z_0}{c}\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b}}{1 + \left(\dfrac{z_0}{c}\right)^2}, \qquad \cos\alpha_2 = \frac{\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}\dfrac{y_0}{b}}{1 + \left(\dfrac{z_0}{c}\right)^2}. \tag{11}$$

(b) Візьмемо дві прямі різних сімейств:

$$l_1: \quad \vec{r} = \vec{r_1} + \vec{\tau}_1 t, \qquad \vec{r_1} = \{x_1, y_1, 0\}, \quad \vec{\tau}_1 = \left\{\frac{a}{b}y_1, -\frac{b}{a}x_1,\, c\right\};$$
$$l_2: \quad \vec{r} = \vec{r_2} + \vec{\tau}_2 t, \qquad \vec{r_2} = \{x_2, y_2, 0\}, \quad \vec{\tau}_2 = \left\{\frac{a}{b}y_2, -\frac{b}{a}x_2,\, -c\right\}.$$

Умова компланарності l_1 і l_2 має вигляд

$$(\vec{r_1} - \vec{r_2}, \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2) \equiv 0.$$

Розпишемо її в координатах:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & 0 \\ \dfrac{a}{b}y_1 & -\dfrac{b}{a}x_1 & c \\ \dfrac{a}{b}y_2 & -\dfrac{b}{a}x_2 & -c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & 0 \\ \dfrac{a}{b}(y_1 + y_2) & -\dfrac{b}{a}(x_1 + x_2) & 0 \\ \dfrac{a}{b}y_2 & -\dfrac{b}{a}x_2 & -c \end{vmatrix} =$$
$$= -c\left[-\frac{b}{a}(x_1^2 - x_2^2) - \frac{a}{b}(y_1^2 - y_2^2)\right] = abc\left[\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2}\right] =$$
$$= abc\left[\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}\right)\right] \equiv 0,$$

що й треба було перевірити.

(c) Візьмемо дві різні прямі одного сімейства:

$$l_1: \quad \vec{r} = \vec{r_1} + \vec{\tau}_1 t, \qquad \vec{r_1} = \{x_1, y_1, 0\}, \quad \vec{\tau}_1 = \left\{\frac{a}{b}y_1, -\frac{b}{a}x_1,\, c\right\};$$
$$l_2: \quad \vec{r} = \vec{r_2} + \vec{\tau}'_1 t, \qquad \vec{r_2} = \{x'_1, y'_1, 0\}, \quad \vec{\tau}'_1 = \left\{\frac{a}{b}y'_1, -\frac{b}{a}x'_1,\, c\right\}.$$

Умова їх мимобіжності має вигляд:

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{\tau}_1, \vec{\tau}\,'_1) \neq 0.$$

Розпишемо її в координатах:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1' & y_1 - y_1' & 0 \\ \frac{a}{b} y_1 & -\frac{b}{a} x_1 & c \\ \frac{a}{b} y_1' & -\frac{b}{a} x_1' & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_1' & y_1 - y_1' & 0 \\ \frac{a}{b}(y_1 - y_1') & -\frac{b}{a}(x_1 - x_1') & 0 \\ \frac{a}{b} y_1' & -\frac{b}{a} x_1' & c \end{vmatrix} =$$

$$= c\left[-\frac{b}{a}(x_1 - x_1')^2 - \frac{a}{b}(y_1 - y_1')^2\right] = -abc\left[\frac{(x_1 - x_1')^2}{a^2} + \frac{(y_1 - y_1')^2}{b^2}\right] \neq 0$$

тому що $(x_1, y_1, 0)$ і $(x_1', y_1', 0)$ дві різні точки на горловому еліпсі.

(d) Візьмемо три прямі одного сімейства:

$$\begin{aligned} l_1: &\quad \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{\tau}\, t, \\ l_2: &\quad \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{\tau}\,' t, \\ l_3: &\quad \vec{r} = \vec{r}_3 + \vec{\tau}\,'' t, \end{aligned}$$

де $\vec{r}_1 = \{x_1, y_1, 0\}$, $\vec{r}_2 = \{x_1', y_1', 0\}$, $\vec{r}_3 = \{x_1'', y_1'', 0\}$. Ці прямі не паралельні жодній площині, якщо в жодній точці вектори $\vec{\tau}, \vec{\tau}\,', \vec{\tau}\,''$ не компланарні, тобто

$$(\vec{\tau}, \vec{\tau}\,', \vec{\tau}\,'') \neq 0.$$

Розпишемо цю умову в координатах (для визначенності візьмемо прямолінійні твірні з першого сімейства, для прямих з другого сімейства потрібно замість c взяти $-c$):

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{b} y_1 & -\frac{b}{a} x_1 & c \\ \frac{a}{b} y_1' & -\frac{b}{a} x_1' & c \\ \frac{a}{b} y_1'' & -\frac{b}{a} x_1'' & c \end{vmatrix} = \frac{a}{b}\left(-\frac{b}{a}\right) c \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_1' & x_1' & 1 \\ y_1'' & x_1'' & 1 \end{vmatrix} = -c \begin{vmatrix} y_1 - y_1'' & x_1 - x_1'' \\ y_1' - y_1'' & x_1' - x_1'' \end{vmatrix}.$$

Останній визначник дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $\vec{r}_1 - \vec{r}_3 \parallel \vec{r}_2 - \vec{r}_3$. Це означає, що точки з радіусами-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ лежать на одній прямій, що неможливо, бо вони різні і лежать на горловому еліпсі.

$\blacksquare$

Зауваження. На практиці рівняння прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда іноді краще шукати в інший спосіб. Запишемо рівняння однопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \sim \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2},$$

і розкладемо ліву і праву частини на множники:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

Розглянемо наступну систему лінійних рівнянь:

$$(\lambda)\quad \begin{cases} \lambda_1\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\lambda_2\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ \lambda_2\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\lambda_1\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ \lambda_1^2+\lambda_2^2\neq 0. \end{cases}$$

Кожне лінійне рівняння задає у просторі площину. Дані площини не паралельні, отже ця система з двох лінійних рівнянь задає пряму. Покажемо, що ця пряма лежить на однопорожнинному гіперболоїді. Дійсно, якщо точка належить цій прямій, то вона задовольняє кожне з лінійних рівнянь системи, отже задовольняє добутку цих рівнянь, тобто рівнянню однопорожнинного гіперболоїда.

Це твердження справедливе для будь-яких λ_1, λ_2, які не дорівнюють нулю одночасно. Отже, ми отримали рівняння одного сімейства прямолінійних твірних на однопорожнинному гіперболоїді.

Рівняння другого сімейства:

$$(\mu)\quad \begin{cases} \mu_1\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\mu_2\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ \mu_2\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\mu_1\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ \mu_1^2+\mu_2^2\neq 0. \end{cases}$$

Зауваження. Прямі різних сімейств, що перетинаються в точці (x_0, y_0, z_0) однопорожнинного гіперболоїда визначають єдину площину. Ця площина є дотичною до поверхні, бо містить дотичні вектори до прямолінійних твірних. Отже, дотична площина до поверхні є єдиною площиною, що перетинає поверхню в точці дотику по двом прямолінійним твірним.

Приклад 4.1. *Знайти прямолінійні твірні поверхні* $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{25}=1$, *які проходять через точку* $(2,\ 1,\ 5)$.

Розв'язок. *Перший спосіб.* Запишимо рівняння першого сімейства прямолінійних твірних (λ) та підставимо координати точки $(2,\ 1,\ 5)$:

$$\begin{cases} \lambda_1\left(\frac{x}{2}-\frac{z}{5}\right)=\lambda_2\left(1-y\right), \\ \lambda_2\left(\frac{x}{2}+\frac{z}{5}\right)=\lambda_1\left(1+y\right), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1\cdot 0=\lambda_2\cdot 0, \\ \lambda_2\cdot 2=\lambda_1\cdot 2, \end{cases} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2.$$

Можемо взяти будь-які числа, які задовольняють цій рівності, наприклад: $\lambda_1 = \lambda_2 = 10$. Отримуємо рівняння прямолінійної твірної з першого сімейства:

$$\begin{cases} 5x - 2z = 10 - 10y, \\ 5x + 2z = 10 + 10y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 10, \\ 2z = 10y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = t, \\ z = 5t, \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{5}.$$

Рівняння другого сімейства (μ):

$$\begin{cases} \mu_1 \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{z}{5}\right) = \mu_2 \left(1 + y\right), \\ \mu_2 \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{z}{5}\right) = \mu_1 \left(1 - y\right), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 \cdot 0 = \mu_2 \cdot 2, \\ \mu_2 \cdot 2 = \mu_1 \cdot 0, \end{cases} \Rightarrow \ \mu_2 = 0, \ \forall \ \mu_1.$$

Візьмемо $\mu_1 = 10$, $\mu_2 = 0$. Отримуємо рівняння прямолінійної твірної з другого сімейства:

$$\begin{cases} 5x - 2z = 0, \\ 0 = 10 - 10y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 2z, \\ y = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t, \\ y = 1, \\ z = 5t, \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{5}.$$

Другий спосіб. Точка $(2, 1, 5)$ лежить на поверхні. Півосі гіперболоїда $a = 2$, $b = 1$, $c = 5$. Рівняння шуканих твірних мають вигляд (9). При цьому $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$ задаються формулами (10) і (11), відповідно. Обчислимо

$$\sin\alpha_1 = \frac{\dfrac{z_0}{c}\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b}}{1 + \left(\dfrac{z_0}{c}\right)^2} = \frac{\dfrac{5}{5}\dfrac{2}{2} + \dfrac{1}{1}}{1 + \left(\dfrac{5}{5}\right)^2} = 1, \quad \cos\alpha_1 = 0,$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{-\dfrac{z_0}{c}\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b}}{1 + \left(\dfrac{z_0}{c}\right)^2} = \frac{-\dfrac{5}{5}\dfrac{2}{2} + \dfrac{1}{1}}{1 + \left(\dfrac{5}{5}\right)^2} = 0, \quad \cos\alpha_2 = 1.$$

і запишемо рівняння твірних

$$(1) \quad \begin{cases} x = 2t, \\ y = 1, \\ z = 5t, \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = -t, \\ z = -5t. \end{cases}$$

Канонічні рівняння запишуться у вигляді

$$(1) \quad \frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{5}, \qquad (2) \quad \frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{5}.$$

■

Приклад 4.2. *Дано однопорожнинний гіперболоїд* $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$. *Через його твірну* $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ *і точку* $(0,3,0)$ *проведено площину. Знайти іншу пряму перетину цієї площини з гіперболоїдом.*

Розв'язок. Площина, що перетинає гіперболоїд по двом прямолінійним твірним, є дотичною площиною. Знайшовши точку дотику, можемо скористатися рівняннями (9) з параметрами (10) та (11).

Запишемо рівняння заданої площини

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -12(x-2)-8y+6z=0 \quad \sim \quad 6x+4y-3x-12=0$$

і будемо вимагати, щоб ця площина збігалася з дотичною площиною гіперболоїда в певній точці (x_0,y_0,z_0), тобто з площиною $\frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{9}-\frac{z_0z}{16}-1=0$. Для цього необхідно і достатньо виконання пропорцій

$$\frac{x_0}{24}=\frac{y_0}{36}=\frac{-z_0}{-48}=\frac{-1}{-12} \quad \sim \quad \frac{x_0}{2}=\frac{y_0}{3}=\frac{z_0}{4}=1.$$

Отже шукана точка дотику $(2,3,4)$. За формулами (10) та (11) знаходимо

$$\sin\alpha_1=1,\ \cos\alpha_1=0; \qquad \sin\alpha_2=0,\ \cos\alpha_2=1.$$

Маємо дві твірні

$$(1) \quad \begin{cases} x=2t, \\ y=3, \\ z=4t, \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} x=2, \\ y=-3t, \\ z=-4t. \end{cases}$$

Твірна (2) збігається із заданою, а твірна (1) є шуканою.

Відповідь: $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z}{4}$.

■

Вправа 4.1. *Розв'яжіть цю задачу, не використовуючи формули (9).*

4.2 Прямолінійні твірні на поверхні гіперболічного параболоїда

Твердження 4.2. *На поверхні гіперболічного параболоїда лежать два сімейства прямих. При цьому*

(a) *через будь-яку точку гіперболічного параболоїда проходить рівно одна пряма кожного сімейства;*

(b) *будь-які дві прямі різних сімейств перетинаються;*

(c) *будь-які дві прямі одного сімейства мимобіжні;*

(d) *будь-які три прямі одного сімейства паралельні до деякої площини.*

Доведення. (a) Розглянемо рівняння гіперболічного параболоїда

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p, q > 0$$

і для зручності подальших обчислень зробимо заміну $p \to a^2$ і $q \to b^2$. Тоді рівняння запишеться у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Нехай точка (x_0, y_0, z_0) лежить на параболоїді, тобто $\dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2} = 2z_0$. Будемо шукати пряму

$$l : \begin{cases} x = x_0 + v_x t, \\ y = y_0 + v_y t, \\ z = z_0 + v_z t, \end{cases}$$

яка б цілком лежала на поверхні. Виконаємо підстановку

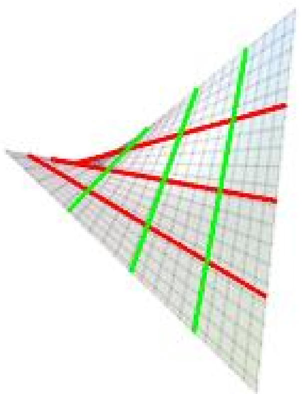

Рис. 11: Прямолінійні твірні на гіперболічному параболоїді.

$$\frac{(x_0 + v_x t)^2}{a^2} - \frac{(y_0 + v_y t)^2}{b^2} = 2(z_0 + v_z t),$$

$$2\Big(\frac{v_x x_0}{a^2} - \frac{v_y y_0}{b^2} - v_z\Big)t + \Big(\frac{v_x^2}{a^2} - \frac{v_y^2}{b^2}\Big)t^2 = 0.$$

Оскільки це тотожність за параметром t, отримуємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{v_x x_0}{a^2} - \dfrac{v_y y_0}{b^2} = v_z, \\ \dfrac{v_x^2}{a^2} - \dfrac{v_y^2}{b^2} = 0. \end{cases}$$

Друге рівняння розкладемо на множники і отримаємо два розв'язки з точністю до коефіцієнта пропорційності $v_x = a, v_y = -b;\quad v_x = a, v_y = b$. Тоді з першого рівняння $v_z = \dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b};\quad v_z = \dfrac{x_0}{a} - \dfrac{y_0}{b}$. Таким чином, напрям прямої, що лежить на поверхні, визначається векторами

$$\vec{\tau}_1 = \Big\{a, -b, \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\Big\}, \qquad \vec{\tau}_2 = \Big\{a, b, \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\Big\}.$$

Отже, через кожну точку (x_0, y_0, z_0) гіперболічного параболоїда проходить дві прямолінійні твірні

$$l_1 : \begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 - bt, \\ z = z_0 + \Big(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b}\Big)t, \end{cases} \qquad l_2 : \begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + \Big(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{y_0}{b}\Big)t. \end{cases} \tag{12}$$

Покажемо, що прямі типу l_1 і типу l_2 утворюють два однопараметричні сімейства прямолінійних твірних. Для цього покладемо

$$\lambda = \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}, \qquad \mu = \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}.$$

На кожній з прямих типу l_1 або l_2 початкова точка (x_0, y_0, z_0) може бути обрана довільно. Пряма типу l_1 перетне переріз гіперболічного параболоїда площиною $x = 0$ при $t = -\dfrac{x_0}{a}$. При цьому

$$y_1 = y_0 + b\Big(-\frac{x_0}{a}\Big) = b\Big(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\Big) = b\lambda, \quad z_1 = -\lambda^2/2.$$

Аналогічно, пряма типу l_2 перетне цей же переріз в точці

$$x_2 = 0, \quad y_2 = -b\mu, \quad z_2 = -\mu^2.$$

Отже, прямі типу l_1 і l_2 складають два однопараметричні сімейства прямих

$$(\lambda) : \begin{cases} x = at, \\ y = b\lambda - bt, \\ z = -\lambda^2/2 + \lambda t; \end{cases} \qquad (\mu) : \begin{cases} x = at, \\ y = -b\mu + bt, \\ z = -\mu^2/2 + \mu t, \end{cases}$$

що і складає *доведення (a).*

Напрямні вектори прямих кожного із сімейств мають вигляд

$$\vec{\tau}(\lambda) = \{a, -b, \lambda\}, \qquad \vec{\tau}(\mu) = \{a, b, \mu\}.$$

(b) Розглянемо дві прямі різних сімейств:

$$l(\lambda) : \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{\tau}(\lambda)t, \quad l(\mu) : \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{\tau}(\mu)t,$$

де $\vec{r}_1 = \big\{0, b\lambda, -\lambda^2/2\big\}$ і $\vec{r}_2 = \big\{0, -b\mu, -\mu^2/2\big\}$. Умова компланарності цих прямих має вигляд $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{\tau}(\lambda), \vec{\tau}(\mu)) = 0$. Записуючи це в координатній формі, знаходимо

$$\begin{vmatrix} 0 & -b(\lambda+\mu) & (\lambda^2-\mu^2)/2 \\ a & -b & \lambda \\ a & b & \mu \end{vmatrix} = (1/2)(\lambda+\mu) \begin{vmatrix} 0 & -2b & \lambda-\mu \\ 0 & -2b & \lambda-\mu \\ a & b & \mu \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Отже, прямі лежать в одній площині, а о скільки напрямні вектори прямих $\vec{\tau}(\lambda)$ і $\vec{\tau}(\mu)$ з очевидністю не паралельні, то прямі перетинаються.

(c) Розглянемо дві прямі одного сімейства:

$$l(\lambda_1): \ \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{\tau}(\lambda_1)t, \quad l(\lambda_2): \ \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{\tau}(\lambda_2)t,$$

де $\vec{r}_1 = \{0, b\lambda_1, -\lambda_1^2/2\}$ і $\vec{r}_2 = \{0, b\lambda_2, -\lambda_2^2/2\}$.

Ці прямі є мимобіжними, якщо $\big(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{\tau}(\lambda_1), \vec{\tau}(\lambda_2)\big) \neq 0$. У координатній формі знаходимо

$$\begin{vmatrix} 0 & b(\lambda_2-\lambda_1) & (\lambda_1^2-\lambda_2^2)/2 \\ a & -b & \lambda_1 \\ a & -b & \lambda_2 \end{vmatrix} = (\lambda_1-\lambda_2)\begin{vmatrix} 0 & -b & (\lambda_1+\lambda_2)/2 \\ 0 & 0 & (\lambda_1-\lambda_2) \\ a & -b & \lambda_2 \end{vmatrix} =$$

$$= -ab(\lambda_1-\lambda_2)^2 \neq 0$$

бо $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Аналогічну властивість мають прямі сімейства (μ).

(d) Достатньо помітити, що вектор $\vec{n} = \{b, a, 0\}$ має ту очевидну властивість, що $\langle\vec{\tau}(\lambda), \vec{n}\rangle \equiv 0$ для будь-яких значень параметра λ. Отже, кожна пряма з сімейства (λ) паралельна до площини з вектором нормалі $\vec{n}$.

Аналогічно, кожна пряма з сімейства (μ) паралельна до площини з вектором нормалі $\vec{n} = \{b, -a, 0\}$.

■

Аналогічно випадку однопорожнинного гіперболоїда, прямолінійні твірні на поверхні гіперболічного параболоїда можна шукати за іншим алгоритмом. Розглянемо рівняння гіперболічного параболоїда

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p, q > 0$$

і для зручності подальших обчислень зробимо заміну $2p \to a^2$ і $2q \to b^2$. Тоді рівняння запишеться у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

і ліва частина рівняння може бути розкладена на множники

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z.$$

Звідси випливає, що на поверхні гіперболічного параболоїда є два сімейства прямих:

$$(\lambda)\begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = z, \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \lambda, \end{cases} \qquad (\mu)\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \mu, \\ \mu\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = z. \end{cases} \tag{13}$$

Кожному значенню параметрів λ і μ відповідає визначена пряма на поверхні. І навпаки, кожній точці на гіперболічному параболоїді відповідає значення параметрів

$$\lambda_0 = \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \quad \text{і} \quad \mu_0 = \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}.$$

Зауваження. Прямі різних сімейств, що перетинаються в точці (x_0, y_0, z_0) гіперболічного параболоїда, визначають єдину площину. Ця площина є дотичною до поверхні, бо містить дотичні вектори до прямолінійних твірних. Отже, дотична площина до гіперболічного параболоїда є єдиною площиною, що перетинає поверхню в точці дотику по двом прямолінійним твірним.

Приклад 4.3. *Знайдіть рівняння площини, яка паралельна площині $x - y + z - 5 = 0$ та перетинає гіперболічний параболоїд $\dfrac{y^2}{36} - \dfrac{z^2}{4} = 2x$ по двом прямолінійним твірним. Знайдіть канонічні рівняння цих твірних.*

Розв'язок. *Перший спосіб.* Запишемо рівняння паралельної площини $x - y + z + c = 0$. Знайдемо її перетин з гіперболічним параболоїдом.

$$\frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{4} = 2y - 2z - 2c, \quad x = y - z - c,$$

$$\left(\frac{y^2}{36} - 2y + 36\right) - \left(\frac{z^2}{4} - 2z + 4\right) = -2c + 36 - 4,$$

$$\left(\frac{y}{6} - 6\right)^2 - \left(\frac{z}{2} - 2\right)^2 = 32 - 2c.$$

Ця крива другого порядку розпадається на пару прямих, які перетинаються, якщо $32 - 2c = 0$. Тобто $c = 16$. Отже площина, яку ми шукаємо, має рівняння $x - y + z + 16 = 0$. Дві прямі, які лежать в цій площині та є перетином з параболоїдом:

$$\frac{y}{6} - 6 - \frac{z}{2} + 2 = 0 \ \text{ та } \ \frac{y}{6} - 6 + \frac{z}{2} - 2 = 0,$$

$$\text{або } \ y - 3z - 24 = 0 \ \text{ та } \ y + 3z - 48 = 0.$$

Рівняння цих прямих у просторі:

$$\begin{cases} y - 3z - 24 = 0, \\ x - y + z + 16 = 0, \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} y + 3z - 48 = 0, \\ x - y + z + 16 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо канонічні рівняння. Для першої прямої:

$$\begin{cases} y - 3z - 24 = 0, \\ x - y + z + 16 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3z + 24, \\ x = 2z + 8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t + 8, \\ y = 3t + 24, \\ z = t, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{x - 8}{2} = \frac{y - 24}{3} = \frac{z}{1}.$$

Для другої прямої:

$$\left\{\begin{array}{l} y+3z-48=0, \\ x-y+z+16=0, \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-3z+48, \\ x=-4z+32, \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=4t+32, \\ y=3t+48, \\ z=-t, \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\frac{x-32}{4}=\frac{y-48}{3}=\frac{z}{-1}.$$

Відповідь: $\dfrac{x-32}{4}=\dfrac{y-48}{3}=\dfrac{z}{-1}$, $\dfrac{x-8}{2}=\dfrac{y-24}{3}=\dfrac{z}{1}$.

Другий спосіб. Площина, що перетинає параболоїд по двом прямолінійним твірним, є дотичною площиною. Знайшовши точку дотику, можемо скористатися рівняннями (12). Заданий параболоїд не є канонічним, але за аналогією маємо, що для гіперболічного параболоїда

$$\frac{y^2}{36}-\frac{z^2}{4}=2x$$

рівняння дотичної площини в точці (x_0, y_0, z_0) має вигляд

$$\frac{yy_0}{36}-\frac{zz_0}{4}=x+x_0 \sim x-\frac{yy_0}{36}+\frac{zz_0}{4}+x_0=0.$$

Для того, щоб ця площина була паралельна до заданої площини $x-y+z-5=0$ необхідно і достатньо виконання пропорцій

$$1=\frac{y_0}{36}=\frac{z_0}{4}.$$

Таким чином, $y_0=36$, $z_0=4$, а з рівняння параболоїда знаходимо $x_0=16$. Рівняння шуканих твірних запишемо за формулами (12), а саме

$$l_1: \left\{\begin{array}{l} x=16+8t, \\ y=36+6t, \\ z=4-2t, \end{array}\right. \quad l_2: \left\{\begin{array}{l} x=16+4t, \\ y=36+6t, \\ z=4+2t. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\dfrac{x-16}{4}=\dfrac{y-36}{3}=\dfrac{z-4}{-1}$, $\dfrac{x-16}{2}=\dfrac{y-36}{3}=\dfrac{z-4}{1}$.

Перевірте, що відповіді, отримані у перший та другий спосіб, збігаються.

∎

Приклад 4.4. *Дано гіперболічний параболоїд* $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=2z$. *Через його твірну* $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{0}$ *і точку* $(1,1,1)$ *проведено площину. Знайти іншу пряму перетину цієї площини з параболоїдом.*

Розв'язок. Площина, що перетинає параболоїд по двом прямолінійним твірним, є дотичною площиною. Знайшовши точку дотику, можемо скористатися рівняннями (12).

Запишемо рівняння заданої площини

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3x - 4y + z = 0$$

і будемо вимагати, щоб ця площина збігалася з дотичною площиною параболоїда в певній точці (x_0, y_0, z_0), тобто з площиною $\dfrac{x_0 x}{16} - \dfrac{y_0 y}{9} - z - z_0 = 0$. Для цього необхідно і достатньо виконання пропорцій

$$\frac{x_0}{48} = \frac{y_0}{36} = -1 = \frac{-z_0}{0} \quad \Rightarrow \quad x_0 = -48,\ y_0 = -36,\ z_0 = 0.$$

Маємо рівняння твірних

$$l_1 : \begin{cases} x = -48 + 4t, \\ y = -36 - 3t, \\ z = -24t; \end{cases}, \qquad l_2 : \begin{cases} x = -48 + 4t, \\ y = -36 + 3t, \\ z = 0. \end{cases}$$

Пряма l_2 збігається із заданою, а пряма l_1 є шуканою.

Відповідь: $\dfrac{x+48}{4} = \dfrac{y+36}{-3} = \dfrac{z}{-24}$.

■

Вправа 4.2. *Розв'язати цю задачу не використовуючи формулу* (12).

Література

[1] Борисенко О. А. Аналітична геометрія/О. А. Борисенко, Л. М. Ушакова. – Х.: Основа, 1993. – 192 с.

[2] Кириченко В. В. Збірник задач з аналітичної геометрії/За редакцією В. В. Кириченка. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2013. – 200 с.

Навчальне видання

Ямпольський Олександр Леонідович
Шугайло Олена Олексіївна

КАНОНІЧНА ТЕОРІЯ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Навчально-методичний посібник з аналітичної геометрії
для студентів 1-го курсу математичних спеціальностей університетів.

Коректор М. С. Хащина
Комп'ютерне верстання О.Л. Ямпольський
Макет обкладинки І. М. Дончик

Формат 60×84/16. Умов. друк. арк. 8888 . Наклад 88888 прим. Зам. № 88888.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
61077, м. Харків, м. Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
тел. 705-24-32