ЛЕКЦИЯ 5

Тема "Теоремы Фрагмена–Линделефа"

(см. [1],с.286-290, [3]. с.23-30, [4], с.186-191; изложение ближе всего к [3]).

По принципу максимума модуля, если $f(z)$ голоморфная функция в ограниченной области D и непрерывна в замыкании D, то из условия $|f(\zeta)| \le m$ для всех $\zeta \in \partial D$ следует $|f(z)| \le m$ в D. Условие непрерывности в замыкании области можно ослабить, потребовав вместо этого, чтобы для всех $\zeta \in \partial D$

$$\overline{\lim}_{z\in D, z\to\zeta}|f(z)| \le m. \tag{1}$$

Действительно, выберем $\varepsilon > 0$ и и такие окрестности U_ζ точек $\zeta \in \partial D$, чтобы $|f(z)| \le m+\varepsilon$ при $z \in U_\zeta \cap D$. Применяя обычный принцип максимума модуля в области $D \setminus [\cup_{\zeta\in\partial D} U_\zeta]$, в замыкании которой функция $f(z)$ непрерывна, получаем, что в ней $|f(z)| \le m+\varepsilon$, а так окрестности и ε можно сделать сколь угодно малыми, получим $|f(z)| \le m$ во всем D.

Однако для неограниченных областей все это уже неверно. Например, функция $\sin z$ ограничена на вещественной оси, которая есть граница верхней полуплоскости, но в самой верхней полуплоскости неограничена. Однако имеет место

Теорема 1. *[*[3]*,с.23-24,* [4]*,с.186] Пусть функция f голоморфна в области $D \ne \mathbb{C}$ и удовлетворяет условию (1). Тогда если f ограничена в D константой (возможно, существенно большей, чем m), то ее модуль не превосходит m в D.*

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $0 \in \partial D$. Выберем $\varepsilon > 0$ и, пользуясь условием теоремы, $\rho > 0$ так, что $|f(z)| \le m+\varepsilon$ при $z \in D \cap \{z : |z| = \rho\}$. В открытом множестве $D_\rho := \{z \in D : |z| > \rho\}$ рассмотрим функцию

$$g_N(z) = \frac{|f(z)|}{|z|^{1/N}},$$

где N столь большое, что $|z|^{-1/N} < (1+\varepsilon)$, и поэтому во всех точках $\zeta \in \partial D_\rho$

$$\overline{\lim}_{z\in D_\rho, z\to\zeta} g_N(z) \le (m+\varepsilon)(1+\varepsilon).$$

Так как $f(z)$ ограничена в D, то можно выбрать такое большое R, что $g_N(z) < (m+\varepsilon)(1+\varepsilon)$ на $D \cap \{z : |z| = R\}$. Таким образом, во всех граничных точках открытого множества $D_{\rho,R} := \{z \in D : \rho < |z| < R\}$ выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{z\in D_{\rho,R}, z\to\zeta} g_N(z) \le (m+\varepsilon)(1+\varepsilon).$$

Отсюда следует, что в каждой точке $z_0 \in D_{\rho,R}$ имеем $g_N(z_0) \le (1+e)(m+\varepsilon)$. Действительно, N-тая степень функции $g_N(z)$ равна $|f^N(z)/z|$ и, следовательно, есть модуль голоморфной функции в ограниченном открытом множестве $D_{\rho,R}$, а множество $D_{\rho,R}$ можно разбить на ограниченные области, в которых принцип максимума модуля голоморфных функций применим.

Наконец, так как R сколь угодно большое, а ρ сколь угодно малое, получаем, что неравенство $g_N(z_0) \le (1+e)(m+\varepsilon)$ справедливо во всем D. Осталось устремить N в бесконечность, а ε к нулю. Теорема доказана.

Все остальные теоремы этой лекции носят общее название "теоремы Фрагмена–Линделефа"

Теорема 2. *[*[1]*,с.287,* [3]*,с.25-26,* [4]*,с.187] Пусть $f(z)$ голоморфная функция внутри угла $S = \{z:\ \rho-\gamma < \mathrm{Arg}z < \rho+\gamma\}$ раствора 2γ (или даже произвольного угла раствора 2γ) такая, что в этом угле $|f(z)| \le Ce^{A|z|^\alpha}$ с $\alpha < \pi/(2\gamma)$. Тогда если для всех $\zeta \in \partial S$ выполняется (1), то $|f(z)| \le m$ в S.*

Доказательство. Повернув угол на $-\rho$ и сдвинув его вершину в нуль, если надо, будем считать $S = \{z:\ |\mathrm{Arg}z| < \gamma\}$. Выберем $\beta,\ \alpha < \beta < \gamma$, и рассмотрим голоморфную в S функцию

$$f_\varepsilon(z) = f(z)e^{-\varepsilon z^\beta}.$$

Так как $\mathrm{Arg}z = \pm\gamma$ на ∂S, то там

$$-\varepsilon \mathrm{Re}\, z^\beta = -\varepsilon \mathrm{Re}\, |z|^\beta e^{i\beta \mathrm{Arg}z} = -\varepsilon |z|^\beta \cos(\beta \mathrm{Arg}z) = -\varepsilon |z|^\beta \cos(\pm\beta\gamma) < 0,$$

так как $\beta\gamma < \pi/2$. Поэтому там $\left|e^{-\varepsilon z^\beta}\right| = e^{\mathrm{Re}\, e^{-\varepsilon z^\beta}} < 1$ и, таким образом, для $\zeta \in \partial S$

$$\overline{\lim}_{z\in S, z\to\zeta} |f_\varepsilon(z)| \le m.$$

С другой стороны, при всех $z \in S$ имеем $|\beta \mathrm{Arg}z| < \beta\gamma < \pi/2$ и поэтому $\cos(\beta \mathrm{Arg}z) > \cos\beta\gamma > 0$, так что

$$|f_\varepsilon(z)| \le Ce^{A|z|^\alpha} e^{-\varepsilon |z|^\beta \cos(\beta \mathrm{Arg}z)} = Ce^{A|z|^\alpha - \varepsilon |z|^\beta \cos(\beta \mathrm{Arg}z)} \le Ce^{A|z|^\alpha - \varepsilon \cos(\beta\gamma)|z|^\beta}.$$

Так как $\alpha < \beta$, то показатель в экспоненте ограничен в S, так что выполнены условия теоремы 1, и $|f_\varepsilon(z)| \le m$ в S. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем утверждение теоремы.

Из этой теоремы с $\gamma = 1/2$ следует

Следствие 1. *Если целая функция $f(z)$ удовлетворяет в плоскости неравенству $|f(z)| \le Ce^{A|z|^\alpha}$ с $\alpha < 1/2$ и ограничена на каком-нибудь луче, то $f(z) \equiv \mathrm{const}$*

Действительно, применяя теорему 2 к развернутому углу $\{z:\ \rho < \mathrm{Arg}z < \rho + 2\pi\}$, где $\{z:\ \mathrm{Arg}z = \rho\}$ это как раз тот луч, где функция $f(z)$ ограничена, получаем, что эта функция ограничена во всей плоскости. Осталось применить теорему Лиувилля.

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha = \pi/(2\gamma)$. При этом ограничимся случаем $\alpha = 1$ и угла S, совпадающего с верхней полуплоскостью $\mathbb{C}_+ = \{z:\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$. Отметим, что $\partial\mathbb{C}_+ = \mathbb{R}$.

Теорема 3. *[*[1]*,с.288,* [3]*,с.27-28,* [4]*,с.188] Пусть $f(z)$ голоморфная функция в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ такая, что в ней $|f(z)| \le Ce^{A|z|}$. Тогда если для всех $\zeta \in \mathbb{R}$ выполняется (1), то*

$$|f(z)| \le me^{A\,\mathrm{Im}\, z}, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим голоморфную в верхней полуплоскости функцию $f_\varepsilon(z) := f(z)e^{i(A+\varepsilon)z}$. Из условия следует, что на мнимой полуоси $i\mathbb{R} = \{z = iy:\ y \ge 0\}$ справедливо неравенство

$$|f_\varepsilon(iy)| \le Ce^{Ay-(A+\varepsilon)y} = Ce^{-\varepsilon y},$$

поэтому она ограничена константой C_ε на этой полуоси, при этом для $\zeta \in \mathbb{R}$ для f_ε выполняется неравенство (1), так как $\left|e^{i(A+\varepsilon)x}\right| = 1$. Заметим, что любой квадрант в полуплоскости имеет раствор $\pi/2$ и поэтому к функции $f_\varepsilon(z)$ в каждом из квадрантов $\{z : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\}$ и $\{z : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z < 0\}$ применима теорема 2 с $\gamma = \pi/4$ и $\alpha = 3/2$. Таким образом, мы получаем, что во всей полуплоскости $\mathbb{C}_+$ выполняется неравенство $|f_\varepsilon(z)| \le \max\{m, C_\varepsilon\}$. Теперь можно к функции $f_\varepsilon(z)$ применить теорему 2 с $\gamma = \pi/2$ (так как $\mathbb{C}_+$ есть угол раствора π) и $\alpha = 1/2$. Так как граница $\mathbb{C}_+$ есть $\mathbb{R}$, то неравенство (1) уже выполняется с константой m, и мы получаем

$$|f_\varepsilon(z)| = |f(z)|e^{-(A+\varepsilon)\mathrm{Im}\ z} \le m.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем утверждение теоремы.

Замечание. Условие $|f(z)| \le Ce^{A|z|}$ можно заменить на

$$\overline{\lim}_{z\in\mathbb{C}_+, z\to\infty} \log|f(z)|/|z| < \infty \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{y\to+\infty} \log|f(iy)/y \le A,$$

при этом ни утверждение теоремы, ни ее доказательство не изменятся.

Приведем теперь теорему Фрагмена-Линделефа для полосы.

Теорема 4. *[[4],с.190] Пусть функция $f(z)$ голоморфна в полосе $S = \{z = x+iy : |y| < \pi/(2\gamma)\}$ и при $\alpha < \gamma$*

$$|f(z)| = O\left(e^{e^{\alpha|z|}}\right) \quad |x| \to \infty,\ z \in S.$$

Если условие (1) выполняется на границе полосы $\partial S = \{z : |y| = \pi/(2\gamma)\}$, то $|f(z)| \le m$ в S.

Доказательство. Выберем β, $\alpha < \beta < \gamma$, и положим $f_\varepsilon(z) = f(z)e^{-\varepsilon e^{\beta z}}$. Так как в S имеем $|y| < \pi/(2\gamma)$, то

$$-\varepsilon \mathrm{Re}\ e^{\beta z} = -\varepsilon e^{\beta x}\cos\beta y \le -\varepsilon e^{\beta x}\cos(\beta\pi/(2\gamma) < 0,$$

то $\left|e^{-\varepsilon e^{\beta z}}\right| < 1$, и функция $f_\varepsilon(z)$ удовлетворяет условию (1) при $\zeta \in \partial S$. Далее,

$$|f_\varepsilon(z)| = O\left(e^{e^{\alpha(|x|+\pi/(2\gamma))} - \varepsilon\mathrm{Re}\, e^{\beta z}}\right) = O\left(e^{e^{\pi/(2\gamma)}e^{\alpha|x|} - \varepsilon e^{\beta x}\cos(\beta\pi/(2\gamma))}\right).$$

Так как $\alpha < \beta$, то это выражение стремиться к 0 при $x \to +\infty$, поэтому функция $f_\varepsilon(z)$ ограничена в полуполосе $S^+ = \{z \in S : \operatorname{Re} z > 0\}$. Так как еще $f_\varepsilon(z)$ непрерывна при $z = iy$, $|y| < \pi/(2\gamma)$ и ее предел при $y \to \pm\pi/(2\gamma)$ не превосходит по модулю m, то применима теорема 1, по которой в полуполосе S^+,

$$|f_\varepsilon(z)| \le \max\{M, m\} \quad \text{где} \quad M = \sup_{|y|<\pi/(2\gamma)} |f(iy)| \ge \sup_{|y|<\pi/(2\gamma)} |f_\varepsilon(iy)|.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем что это же неравенство справедливо в S^+ и для функции $f(z)$. Рассматривая вместо функции $f_\varepsilon(z)$ функцию $f(z)e^{\varepsilon e^{\beta z}}$, получаем такое же неравенство для функции $f(z)$ в полуполосе $S^- = \{z \in S : \mathrm{Re}\ z < 0\}$. Теперь можно применить теорему 1 для ограниченной функции $f(z)$ в всей полосе S. Это завершает доказательство теоремы.

В дальнейшем нам понадобится еще одна теорема подобного типа.

Теорема 5. *[[3],с.29-30] Пусть функция $f(z)$ голоморфна в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ и непрерывна в ее замыкании, при этом*

$$|f(z)| \le Ce^{A|z|},\ z \in \mathbb{C}, \qquad |f(x)| \le M,\ x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) \to 0 \ \text{ при } \ x \to \infty.$$

Тогда $f(z) \to 0$ *при* $x \to \infty$ *равномерно в каждой горизонтальной полосе* $0 \le y \le L$.

Доказательство. По теореме 3 имеем $|f(z)| \le Me^{A\operatorname{Im} z}$ в $\mathbb{C}_+$. Полагаем для $K > 0$ и $B > A$

$$g_K(z) = \frac{z}{z+iK}e^{iBz}f(z).$$

Так как $|z| < |z+iK|$ при $z \in \mathbb{C}_+$, то там

$$|g_K(z)| \le Me^{A\operatorname{Im} z + B\operatorname{Re} iz} = Me^{-(B-A)\operatorname{Im} z} \le M.$$

Улучшим эту оценку. По данному $\varepsilon > 0$ выберем и зафиксируем Y столь большое, чтобы $e^{-(B-A)Y} < \varepsilon/M$. Тогда при $\operatorname{Im} z > Y$

$$|g_K(z)| \le \left|\frac{z}{z+iK}\right| e^{-(B-A)\operatorname{Im} z}M < \varepsilon.$$

Выберем теперь и зафиксируем $X > 0$ так, чтобы $|f(x)| < \varepsilon$ при $x > X$. Заметим, что выбор X и Y не зависел от K, поэтому K можно сделать достаточно большим, чтобы при $0 \le y \le Y$

$$\left|\frac{X+iy+iK}{X+iy}\right| = \sqrt{\frac{X^2+y^2+2Ky+K^2}{X^2+y^2}} \ge \sqrt{1+\frac{K^2}{X^2+Y^2}} > \frac{M}{\varepsilon}.$$

Поэтому для таких K и y выполняется

$$|g_K(X+iy)| \le \left|\frac{X+iy}{X+iy+iK}\right| e^{-(B-A)y}M < \varepsilon.$$

Как было отмечено выше, это же неравенство выполняется и при $y > Y$. Кроме того, $|g_K(x)| \le |f(x)| < \varepsilon$ при $x \ge X$. Таким образом, во всех граничных точках квадранта $\{\operatorname{Re} z > X, \operatorname{Im} z > 0\}$ ограниченная в нем голоморфная функция $g_K(z)$ удовлетворяет неравенству $|g_K(z)| < \varepsilon$. Применяя теорему 1, заключаем, что во всем этом квадранте выполняется неравенство $|g_K(z)| < \varepsilon$. Следовательно, там выполняется неравенство

$$|f(z)| \le \left|\frac{z+iK}{z}\right| e^{(B-A)\operatorname{Im} z}|g_K(z)| < \left|\frac{z+iK}{z}\right| e^{(B-A)\operatorname{Im} z}\varepsilon.$$

Далее, при $\operatorname{Re} z > K$ имеем

$$\left|\frac{z+iK}{z}\right| = \left|1+\frac{iK}{z}\right| \le 1+\frac{K}{|z|} \le 2,$$

и, следовательно, при $x > \max\{X, K\}$ и $0 \le y \le L$

$$|f(z)| < 2e^{(B-A)L}\varepsilon.$$

Так как выбор $\varepsilon > 0$ был произволен, то это и означает, что $f(x+iy) \to 0$ равномерно по $O \le \operatorname{Im} z \le L$. Теорема доказана.

Література

[1] Б.В.Шабат. Введение в комплексный анализ. Т.1, М., «Наука» , 1985.

[2] М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.

[3] P.Koosis. The logatithmic integral, p.1.Cambridge University Press, 1988.

[4] Е.Титчмарш. Теория функций. М.,«Наука», 1980.