ЛЕКЦИЯ 4

Тема "Целые функции экспоненциального типа и их нули"

Целая функция $f(z)$ называется функцией экспоненциального типа, если она во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ удовлетворяет неравенству $|f(z)| \le Ce^{A|z|}$ (или в наших обозначениях $M_f(r) \le Ce^{Ar}$) с какими-то положительными константами A, C. По ранее введенным определениям типа и порядка это означает, что она имеет порядок $\rho \le 1$, а при $\rho = 1$ или минимальный ($\sigma = 0$), или нормальный ($0 < \sigma < \infty$) тип.

Очевидные примеры — функции e^z, комплексный косинус, комплексный синус.

Целые функции экспоненциального типа чаще других целых функциях встречаются в приложениях, это в первую очередь связано с тем, что такими являются преобразования Фурье функций с компактным носителем.

Ранее было доказано неравенство $n(t) \le \log M_f(et)$ для считающей функции $n(t) = \#\{z_k : |z_k| \le t\}$ числа нулей z_k функции f (с учетом кратности), откуда следует, что $n(t) = O(t)$ при $t \to \infty$. (Правда, это неравенство доказывалось при условии $f(0) = 1$, но в случае корня в нуле кратности k, переходя к функции $f_1(z) = f(z)/(Cz^k)$, получаем неравенство $n_f(t) \le \log M_f(et) + C$ при $t > 1$, и все равно имеем $n(t) = O(t)$.)

Как следует из доказанной ранее теоремы, каноническое произведение $\Pi(z)$, построенное по точкам $\{a_k\}$, удовлетворяющих условию $n(t) = O(t)$ при $t \to \infty$, имеет тот же порядок, что и считающая функция $n(t)$, т.е. не выше 1, при этом ряд $\sum_k |z_k|^{-1}$ может сходится, в этом случае функция $\Pi(z)$ имеет либо порядок меньше 1, либо минимальный тип при порядке 1. Если же этот ряд расходится, то $\Pi(z)$ не обязано иметь нормальный тип, поэтому может не быть функцией экспоненциального типа (подробности [3], с.19). Таким образом, для того, чтобы $\Pi(z)$ было функцией экспоненциального типа, надо еще какое-то условие, кроме $n(t) = O(t)$, на последовательность $\{a_k\}$. Оно описывается в следующей теореме Линделефа (где мы для простоты считаем, что $f(0) \ne 0$):

Теорема 1 ([3],с.20-21). *Нули $\{z_k\}$ целой функции экспоненциального типа удовлетворяют условию Линделефа*

$$S(r) = O(1) \quad \text{при } r \to \infty \qquad \text{где} \qquad S(r) = \sum_{k:|z_k| \le r} 1/z_k,$$

где нули считаются с учетом кратности.

Замечание Теорему Линделефа можно сформулировать для любого целого порядка, но случай порядка 1, рассматриваемый здесь, наиболее важен. В случае нецелого порядка, как можно показать, каноническое произведение имеет минимальный, нормальный или максимальный тип когда, соответственно, считающая функция нулей имеет при этом порядке минимальный, нормальный или максимальный тип.

Доказательство. Ранее было доказано равенство

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t^{\alpha+1}} dt = \frac{1}{\alpha} \sum_{|z_k| \le r} \frac{1}{|z_k|^\alpha} - \frac{n(r)}{\alpha r^\alpha}.$$

Полагая здесь $\alpha = 1$ и вычитая из этого соотношения аналогичное с $R < r$, получаем

$$\sum_{R<|z_k|\le r} \frac{1}{|z_k|} = \int_R^r \frac{n(t)}{t^2} dt + \frac{n(r)}{r} - \frac{n(R)}{R}.$$

Так как при $t \ge 1$ имеем $n(t)/t < C_1$, то при $1 \le R \le r \le 2R$ получаем, что правая часть неравенства не превосходит

$$C_1 \int_R^r \frac{1}{t} dt + C_1 = C_1(\log r - \log R + \log e) \le C_1 \log 2e,$$

и поэтому при любых r, R таких, что $1 \le R \le r \le 2R$ имеем

$$|S(R) - S(r)| = \left| \sum_{R<|z_k|\le r} \frac{1}{z_k} \right| \le C_1 \log 2e.$$

Поэтому

$$\left| \int_R^{2R} S(r) r dr - \int_R^{2R} S(R) r dr \right| \le \int_R^{2R} |S(r) - S(R)| r dr \le C_2 R^2,$$

а так как

$$\int_R^{2R} S(R) r dr = 3S(R)R^2/2,$$

приходим к соотношению

$$\int_R^{2R} S(r) r dr = 3S(R)R^2/2 + O(R^2). \tag{1}$$

Теперь посчитаем левую часть этого равенства другим способом.

Пусть функция $f(z)$ имеет в точке z_k нуль кратности p, тогда в окрестности этой точки

$$f(z) = c_p(z - z_k)^p + c_{p-1}(z - z_k)^{p-1} + \dots,$$
$$f'(z) = pc_p(z - z_k)^{p-1} + (p-1)c_{p-1}(z - z_k)^{p-2} + \dots.$$

Поэтому в этой окрестности

$$\frac{f'(z)}{zf(z)} = \frac{p/z}{z - z_k} + g(z),$$

где $g(z)$ голоморфная функция, и поэтому вычет в этой точке у функции $\frac{f'(z)}{zf(z)}$ равен p/z_k. Так как вычет в нуле у этой функции равен $f'(0)/f(0)$, то по теореме Коши о вычетах

$$S(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{zf(z)} dz - \frac{f'(0)}{f(0)},$$

(множитель p как раз учитывает кратность каждого слагаемого в $S(r)$). В качестве r может быть взято любое число из промежутка $(R, 2R)$ такое, что на окружности $|z| = r$ нет корней функции, т.е. любое кроме конечного числа значений.

Переходя к параметрической записи окружности $z = re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, приходим к равенству

$$S(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} d\theta - \frac{f'(0)}{f(0)}.$$

Умножая на r, интегрируя по r на интервале $(R, 2R)$ и переходя от полярных координат к прямоугольным, имеем

$$\int_R^{2R} S(r) r dr = \frac{1}{2\pi} \int\int_{R<|x+iy|<2R} \frac{f'(x+iy)}{f(x+iy)} dxdy + O(R^2) \tag{2}$$

(конечное число значений r, где равенство для $S(r)$ не имеет место, можно при интегрировании не учитывать).

Далее, функция $f(z)$ имеет конечное число нулей в рассматриваемом кольце, и в их окрестностях, как было показано выше, функция $f'(z)/f(z)$ ведет себя как $O(|z - z_k|^{-1})$. Но такая особенность интегрируема в двумерной области, поэтому в дальнейших преобразованиях их можно не учитывать. Если же в точке z функция f не обращается в нуль, то в ее окрестности $f'(z)/f(z) = (\mathrm{Log} f(z))'_z$, а так как $\mathrm{Log} f(z)$ голоморфная функция, то

$$(\mathrm{Log} f(z))'_z = (\mathrm{Log} f(z))'_x = (\log|f(z)|)'_x + i(\mathrm{Arg} f(z))_x = (\log|f(z)|)'_x - i(\log|f(z)|)'_y$$

(в последнем равенстве мы воспользовались условиями Коши-Римана для голоморфной в этой окрестности функции $\mathrm{Log} f(z) = \log|f(z)| + i\mathrm{Arg} f(z)$).

Вычисление интеграла по кольцу $R < |z| \le 2R$ проводится отдельно для $(\log|f(z)|)'_x$ и $i(\log|f(z)|)'_y$ с помощью формулы Грина

$$\int\int_G \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{\partial G} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Именно, полагая $P \equiv 0,\ Q = \log|f(x+iy)|$, приходим к равенству

$$\int\int_{R<|x+iy|<2R} \frac{\partial \log|f(x+iy)|}{\partial x} dxdy = \int_{|z|=2R} \log|f(x+iy)|dy - \int_{|z|=R} \log|f(x+iy)|dy,$$

Полагая $P = \log|f(x+iy)|,\ Q \equiv 0$, приходим к равенству

$$\int\int_{R<|x+iy|<2R} -\frac{\partial \log|f(x+iy)|}{\partial y} dxdy = \int_{|z|=2R} \log|f(x+iy)|dx - \int_{|z|=R} \log|f(x+iy)|dx.$$

Опять переходим к параметрической записи окружностей $z = re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi$ при $r = R$ и $r = 2R$, пользуясь тем, что тогда

$$x = r\cos\theta, \quad dx = -r\sin\theta d\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad dy = r\cos\theta d\theta.$$

Получаем

$$\int\int_{R<|x+iy|<2R} \frac{f'(x+iy)}{f(x+iy)} dxdy =$$

$$\int_0^{2\pi} \log|f(2Re^{i\theta})|(2R\cos\theta - i2R\sin\theta)d\theta - \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|(R\cos\theta - iR\sin\theta)d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \log|f(2Re^{i\theta})| 2Re^{-i\theta} d\theta - \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| Re^{-i\theta} d\theta.$$

Таким образом, из (2) следует

$$\int_R^{2R} S(r) r dr \le \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} |\log|f(2Re^{i\theta}||d\theta + \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log|f(Re^{i\theta}||d\theta + O(R^2).$$

Имеем

$$\int_0^{2\pi} |\log|f(2Re^{i\theta}||d\theta = 2\int_0^{2\pi} \log^+|f(2Re^{i\theta}|d\theta - \int_0^{2\pi} \log|f(2Re^{i\theta}|d\theta.$$

Так как f имеет экспоненциальный тип, то первый интеграл в правой части не превосходит $4\pi \log M_f(2R) \leq C_3 R$, а второй по неравенству Йенсена не меньше чем $2\pi \log |f(0)|$. Аналогично оценивается интеграл от функции $|\log |f(Re^{i\theta}||$, и мы получаем оценку

$$\int_R^{2R} S(r) r dr = O(R^2).$$

Отсюда и из (1) следует ограниченность $S(R)$. Теорема доказана

Покажем теперь, что условия Линделефа вместе с условием $n(t) = O(t)$ на последовательность $\{a_k\}$ достаточно для того, чтобы существовала целая функция экспоненциального типа с нулями a_k.

Теорема 2 ([3], с.21-22). *Пусть последовательность комплексных чисел $\{a_k\}$ удовлетворяет условию $n(t) = O(t)$ и условию Линделефа $S(r) = O(1)$ при $t \to \infty$. Тогда построенное по этой последовательности каноническое произведение $\Pi(z) = \prod_k (1 - z/a_k) e^{z/a_k}$ является целой функцией экспоненциального типа.*

Замечание. Мы рассматриваем только случай рода 1, так как если род равен 0, то $\Pi(z)$ имеет либо порядок меньше 1, либо минимальный тип при порядке 1.

Доказательство. Пусть $r = |z|$. Имеем

$$\log |\Pi(z)| = \sum_{|a_k| \leq 2r} \log |1 - z/a_k| + \sum_{|a_k| \leq 2r} \mathrm{Re}(z/a_k) + \sum_{|a_k| > 2r} \log |E(z/a_k, 1)|,$$

где, как раньше, $E(z/a_k, 1) = (1 - z/a_k) e^{z/a_k}$ множитель Вейерштрасса рода 1. Имеем

$$\sum_{|a_k| \leq 2r} \log |1 - z/a_k| \leq \sum_{|a_k| \leq 2r} \log(1 + r/|a_k|) \tag{3}$$

Будем считать, что $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \dots$ и a_k последний корень в круге $|z| \leq 2r$, так что $k = n(2r)$. Заметим, что

$$\int_\alpha^\beta \frac{r dt}{t(r+t)} = \int_\alpha^\beta \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+r} \right) dt = \log(1 + r/\alpha) - \log(1 + r/\beta),$$

Поэтому правая часть (3) равна

$$\int_{|a_1|}^{|a_2|} \frac{r dt}{t(r+t)} + 2 \int_{|a_2|}^{|a_3|} \frac{r dt}{t(r+t)} + 3 \int_{|a_3|}^{|a_4|} \frac{r dt}{t(r+t)} + \dots + k \int_{|a_k|}^{2r} \frac{r dt}{t(r+t)} + k \log(1 + r/(2r)) =$$

$$\int_{|a_1|}^{|a_2|} \frac{n(t) r dt}{t(r+t)} + \int_{|a_2|}^{|a_3|} \frac{n(t) r dt}{t(r+t)} + \int_{|a_3|}^{|a_4|} \frac{n(t) r dt}{t(r+t)} + \dots + \int_{|a_k|}^{2r} \frac{n(t) r dt}{t(r+t)} + n(2r) \log(3/2))$$

Так как $n(t) \leq C_0 t$ при $t > |a_1|$, то последняя сумма не превосходит

$$C_0 \int_0^{2r} \frac{r dt}{r+t} + C_0 2r \log(3/2) = C_0 r (\log(r + 2r) - \log r + 2 \log(3/2)) = C_0 2 \log(9/2) r.$$

Поэтому

$$\sum_{|a_k| \leq 2r} \log |1 - z/a_k| \leq C_1 |z|. \tag{4}$$

Далее, виду условия Линделефа,

$$\left|\sum_{|a_k|\le 2r}\operatorname{Re}(z/a_k)\right| \le \left|\operatorname{Re} z \sum_{|a_k|\le 2r} a_k^{-1}\right| \le r|S(2r)| = O(r). \tag{5}$$

Наконец, при $|z/a_k| = r/|a_k| < 1/2$ можно воспользоваться оценкой множителя Вейерштрасса $|\log|E(z/a_k,1)|| \le 2(r/|a_k|)^2$, поэтому

$$\left|\sum_{|a_k|>2r}\log|E(z/a_k,1)|\right| \le 2r^2 \sum_{|a_k|>2r}\frac{1}{|a_k|^2}$$

Теперь воспользуемся доказанным ранее равенством

$$\int_0^R \frac{n(t)}{t^{\alpha+1}}dt = \frac{1}{\alpha}\sum_{|a_k|\le R}\frac{1}{|a_k|^\alpha} - \frac{n(R)}{\alpha R^\alpha}$$

при $\alpha = 2$ и вычтем из него такое же равенство с $2r < R$ вместо R. Мы получим

$$\frac{1}{2}\sum_{2r<|a_k|\le R}\frac{1}{|a_k|^2} = \int_{2r}^R \frac{n(t)}{t^3}dt + \frac{n(R)}{2R^2} - \frac{n(2r)}{2(2r)^2}.$$

Переходя здесь к пределу при $R \to \infty$ и пользуясь тем, что по условию $n(t) \le Ct$ при $t > 1$, получаем

$$2r^2 \sum_{|a_k|>2r}\frac{1}{|a_k|^2} \le 4r^2 \int_{2r}^\infty \frac{n(t)}{t^3}dt \le Cr.$$

Поэтому

$$\left|\sum_{|a_k|>2r}\log|E(z/a_k,1)|\right| = O(r) \qquad (r \to \infty). \tag{6}$$

Из (4), (5), (6) следует $\log|\Pi(z)| \le O(|z|)$, что означает, что эта функция имеет экспоненциальный тип. Теорема доказана.

Література

[1] Б.В.Шабат. Введение в комплексный анализ. Т.1, М., «Наука» , 1985.
[2] М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.
[3] P.Koosis. The logatithmic integral, p.1.Cambridge University Press, 1988.