Это вместо лекции 1.04.

У нас было определение

Определение 1. *Отображение f области D на область G называется конформным, если это диффеоморфизм (т.е биективное непрерывно дифференцируемое отображение, обратное к которому тоже непрерывно дифференцируемо) и которое сохраняет углы между кривыми (т.е. угол между касательными к двум кривым, проходящим через точку z_0, совпадает по величине и направлению с углом между касательными к образам этих кривых в точке $f(z_0)$)*

Было: Любое голоморфное отображение, если оно инъективно (синоним этого слова однолистно) является конформным.

Теорема 1 (локальный критерий конформности)**.** *Если f голоморфна в окрестности точки z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то f конформно отображает некоторую окрестность точки z_0 на окрестность точки $f(z_0)$.*

Доказательство. По теореме Бюрмана-Лагранжа, существует голоморфная функция F в окрестности V точки $f(z_0)$, для которой $F(f(z)) = z$. Образ этой окрестности есть, по теореме об открытости отображения, некоторая окрестность точки z_0. Дифференцируемость и сохранение углов у прямого и обратного отображений следует из голоморфности. ∎

Теорема 2 (глобальный критерий конформности, или принцип соответствия границ)**.** *Пусть D и D^* односвязные области, D^* ограничена, а функция f голоморфна в D, непрерывна в $\bar{D}$ и осуществляет взаимно-однозначное отображение ∂D на ∂D^* с сохранением направления обхода. Тогда f осуществляет конформное отображение D на D^*.*

Доказательство см.[3],с.117-118.

Теорема 3 (голоморфность конформного отображения)**.** *Если f конформно отображает область D на какую-то область, то f голоморфная функция в D.*

Доказательство. Запишем отображение f в виде $f : (x, y) \to (u(x, y), v(x, y))$. Пусть $z_0 = (x_0, y_0) \in D$. Пусть $l_1 = \{x = x_0 + t,\ y = y_0\}$ и $l_2 = \{x = x_0,\ y = y_0 + t\}$ горизонтальная и вертикальная прямые, проходящие через z_0. Уравнение касательной к кривой $f(l_1) = (u(x_0 + t,\ y_0), v(x_0 + t,\ y_0))$ в точке (x_0, y_0) имеет вид $(u'_t, v'_t) = (u'_x, v'_x)$, а к кривой $f(l_2) = (u(x_0,\ y_0+t), v(x_0,\ y_0+t))$ имеет вид $(u'_t, v'_t) = (u'_y, v'_y)$. Так как отображение конформно, то угол между этими касательными будет равен углу между l_1 и l_2, т.е. $\pi/2$, поэтому

$$0 = (u'_x, v'_x)(u'_y, v'_y) = u'_x u'_y + v'_x v'_y. \tag{1}$$

Пусть $l_3 = \{x = x_0 + t,\ y = y_0 + t\}$ и $l_4 = \{x = x_0 - t,\ y = y_0 + t\}$ биссектрисы углов, которые образовали l_1 и l_2. Уравнение касательной к кривой $f(l_3) = (u(x_0 + t,\ y_0 + t), v(x_0 + t,\ y_0 + t))$ в точке (x_0, y_0) имеет вид $(u'_t, v'_t) = (u'_x + u'_y, v'_x + v'_y)$, а к кривой $f(l_4) = (u(x_0 - t,\ y_0 + t), v(x_0 - t,\ y_0 + t))$ имеет вид $(u'_t, v'_t) = (-u'_x + u'_y, -v'_x + v'_y)$. Так как отображение конформно, то угол между этими касательными будет равен углу между l_3 и l_4, т.е. $\pi/2$, поэтому

$$0 = (u'_x + u'_y, v'_x + v'_y)(-u'_x + u'_y, -v'_x + v'_y) = {u'}^2_y - {u'}^2_x + {v'}^2_y - {v'}^2_x. \tag{2}$$

Покажем, что из (1) и (2) следует, что u'_x, u'_y, v'_x, v'_y удовлетворяют условиям Коши-Римана. Если все они равны нулю, то это так. Пусть, например, $v'_y \neq 0$ в окрестности точки $z_0 = (x_0, y_0)$. Положим $\lambda = \lambda(x, y) = u'_x/v'_y$. Из (1) получаем $v'_x = -\lambda u'_y$, поэтому (2) принимает вид

$$(1 - \lambda^2)({u'}_y^2 + {v'}_y^2) = 0,$$

поэтому $\lambda = \pm 1$. Если $\lambda = -1$, то функция $f_1(z) = (u_1(x, y), v_1(x, y))$ при $u_1(x, y) = u(x, y)$, $v_1(x, y) = -v(x, y)$ удовлетворяет условиям Коши-Римана: действительно, в этом случае имеем

$$(u_1)'_x = u'_x = -v'_y = (v_1)'_y, \quad (u_1)'_y = u'_y = v'_x = -(v_1)'_x,$$

и функция $f_1(z)$ голоморфна, значит, сохраняет углы и по величине, и по направлению. Но сопряжение меняет направление отсчета углов на противоположное, поэтому $f(z) = \overline{f_1(z)}$ является антиконформным отображением, что противоречит условию. Таким образом, $\lambda = 1$, и условия Коши–Римана для $f(z)$ выполняются. Это рассуждение проходит в каждой точке из D, поэтому по теореме об условиях Коши-Римана $f(z)$ голоморфна в D. ∎

Теорема 4 (принцип симметрии)**.** *Пусть $D \subset \mathbb{C}_+$ область в верхней полуплоскости, граница которой содержит отрезок I вещественной оси $\mathbb{R}$, а D^* область, симметричная D относительно этой оси. Если $f(z)$ конформно отображает область D на область G, непрерывна на $D \cup I$ и вещественна на I, то f продолжается до голоморфной функции в $D \cup I \cup D^*$ и дает конформное отображение этой области на $G \cup f(I) \cup G^*$, где G^* область, симметричная G относительно $\mathbb{R}$.*

Замечание. На самом деле в этой теореме вместо симметрии относительно оси можно рассматривать симметрию относительно дуги окружности при условии, что образ этой дуги попадает на обобщенную окружность. Подробно об этом см.[3],с.158-160.

Доказательство. Заметим, что функция $f_1(z) = \overline{f(\bar{z})}$ будет определена и непрерывна, когда z принадлежит области D^*. Проверим ее голоморфность. Действительно, если $f(z) = (u(x, y), v(x, y))$, то

$$f_1(z) = (u_1(x, y), v_1(x, y)), \qquad \text{где} \qquad u_1(x, y) = u(x, -y), \quad v_1(x, y) = -v(x, -y)$$

и, так как $u(x, y)$, $v(x, y)$ удовлетворяют условиям Коши–Римана, то

$$(u_1)'_x = u'_x = v'_y = (v_1)'_y, \quad (u_1)'_y = -u'_y = v'_x = -(v_1)'_x,$$

что влечет голоморфность $f_1(z)$. Кроме того, она отображает D^* в G^*.

Положим $F(z) = f(z)$ при $z \in D \cup I$ и $F(z) = f_1(z)$ при $z \in D^*$. Эта функция определена и непрерывна в $D \cup I \cup D^*$ и голоморфна в D и D^*. Чтобы проверить ее голоморфность во всей области $D \cup I \cup D^*$, достаточно по теореме Мореры проверить, что интеграл от $F(z)$ по любому замкнутому контуру L в $D \cup I \cup D^*$ есть 0. Добавляя к такому контуру подходящую часть отрезка I один раз слева направо, а затем справа налево, мы добавим к интегралу 0, но теперь новую кривую можно разбить на два замкнутых контура, один из которых лежит в $D \cup I$, а второй в $D^* \cup I$. По теореме Коши, интеграл по каждому из них есть нуль, так что и интеграл от F по L есть нуль, и функция $F(z)$ голоморфна в $D \cup I \cup D^*$. ∎

Дальнейший материал этой лекции полностью совпадает с [1], п.38, с.224-227. Главное определение этой части

Определение 2. *Области D и G называются конформно эквивалентными, если существует конформное отображение области D на область G.*

Надо знать все теоремы этой части с доказательством. Главный результат - теорема Римана

Теорема 5. *Любая односвязная область, граница которой состоит более чем из одной точки, конформно эквивалентна единичному кругу.*

Эта теорема доказывается в [1], п.39-40, с.227-234, но для экзамена ее доказательство не требуется.

Література

[1] Б.В.Шабат. Введение в комплексный анализ. Т.1, М., «Наука» , 1985.
[2] Е.Титчмарш. Теория функций. М.,«Наука», 1980.
[3] М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.