

Это вместо лекции 18.03.

Вам надо записать в конспекте ответы на следующие вопросы:

- (1) Что происходит с областью при отображении $w = z + c$ ($c \in \mathbb{R}$ или $c \in \mathbb{C}$)?
- (2) Что происходит с областью при отображении $w = kz$ ($k > 0$)?
- (3) Что происходит с областью при отображении $w = e^{i\alpha}z$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) (поворот на угол α против часовой стрелки вокруг начала координат, например, умножение на i поворот на угол $\pi/2$, так как $i = e^{i\pi/2}$)
- (4) Общий случай линейного отображения сводится к последовательному применению этих правил, например $w = 2iz + 3 - i$ есть последовательное применение поворота на $\pi/2$ вокруг нуля против часовой стрелки, растяжению в 2 раза сдвигу вправо на 3 единицы и вниз на 1 единицу.

Предлагается все это проверить на круге $|z - i| < 1$ и полосе $|\Re z| < 1$.

Здесь и далее \mathbb{C} комплексная плоскость или все комплексные числа, \mathbb{R} вещественная прямая или все вещественные числа.

Дальше надо описать свойства дробно-линейного отображения $w = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad \neq cd$ см.[1] с.48–59, [2] с.199–203, [3] с.128–140. Ссылки буду давать как правило на [1], в остальных книгах найдете сами в указанном диапазоне страниц.

(В [2] такое отображение называется линейным.)

Очевидно, точка $z_0 = -d/c$ есть простой полюс.

- (5) Дробно-линейное отображение есть суперпозиция линейного, обратного (т.е. $w = 1/z$) и еще одного линейного (см.[1] с.52, формула (1))
Следствие: Оно переводит обобщенную окружность в обобщенную окружность.
Вопрос: При каком условии обобщенная окружность перейдет в прямую?
- (6) Дробно-линейное отображение есть гомеоморфизм $\bar{\mathbb{C}}$ на $\bar{\mathbb{C}}$ и конформно во всех точках \mathbb{C} ([1], теоремы 1 и 2).
- (7) Совокупность всех дробно-линейных отображений образует группу ([1], теорема 3).
- (8) Точки, симметричные относительно обобщенной окружности. Сохранение симметрии при дробно-линейном отображении ([1], с.53-55, включая теорему 2)
- (9) Дробно-линейные изоморфизмы и автоморфизмы ([1], с.55-57, включая теоремы 1 и 2)
- (10) Общий вид изоморфизма верхней полуплоскости на единичный круг и единичного круга на себя ([1], с.57-59).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б.В.Шабат. Введение в комплексный анализ. Т.1, М., «Наука», 1985.
- [2] Е.Титчмарш. Теория функций. М., «Наука», 1980.
- [3] М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.