Теорема Коши в для случая, когда на границе области есть простые полюса.

Теорема 1. *Пусть D ограниченная область с кусочно-гладкой границей, $a_1, a_2, \dots, a_k \in D$, $b_1, b_2, \dots, b_n \in \partial D$, при этом в точках $b_1, b_2, \dots, b_n$ граница гладкая. Пусть функция $f(z)$ голоморфна на множестве*

$$D \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \cup_{j=1}^{n} \{z : \ 0 < |z - b_j| < \rho\},$$

при этом во всех точках b_j имеет простые полюса и непрерывна на $\overline{D} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Тогда

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \left(\sum_j \mathrm{res}_{a_j} f + \frac{1}{2} \mathrm{res}_{b_j} f \right).$$

Интеграл по кривой ∂D в окрестности особой точки b_j существует в смысле главного значения, т.е. как конечный предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D \setminus B(b_j, \varepsilon)} f(z)dz.$$

Доказательство. Для упрощения выкладок будем считать, что особая точка b на границе ∂D только одна, общий случай делается последовательным применение ниже изложенного рассуждения.

Пусть ε столь мало, что множество $\partial D \cap \{z : \ |z-b| = \varepsilon\}$ состоит ровно из двух точек $p_1(\varepsilon)$ и $p_2(\varepsilon)$, и обозначим через $l(\varepsilon)$ дугу окружности $|z - b| = \varepsilon$, соединяющую эти точки внутри $\bar{D}$. Таким образом, дуга $l(\varepsilon)$ соединяет точки $p_1(\varepsilon)$ и $p_2(\varepsilon)$, при этом будем считать, что их нумерация, а, значит и направление дуги $l(\varepsilon)$ выбрана так, что при движении по этой дуге от точки $p_1(\varepsilon)$ до точки $p_2(\varepsilon)$ точка b остается слева. Если теперь $\alpha(\varepsilon) = \mathrm{Arg}(p_1 - b)$, $\beta(\varepsilon) = \mathrm{Arg}(p_2 - b))$, то $\alpha(\varepsilon) < \beta(\varepsilon)$, при этом ввиду гладкости кривой в точке b имеем $\beta(\varepsilon) - \alpha(\varepsilon) \to \pi$ при $\varepsilon \to 0$.

Положим $D_\varepsilon = D \setminus B(b, \varepsilon)$. Нетрудно видеть, что $\partial D_\varepsilon = (\partial D \setminus B(b, \varepsilon)) - l(\varepsilon)$ (минус означает, что кривую $l(\varepsilon)$ надо проходить в противоположном направлении, тогда область ∂D_ε будет слева от нее). По теореме Коши о вычетах имеем

$$\int_{\partial D_\varepsilon} f(z)dz = 2\pi i \sum_j \mathrm{res}_{a_j} f.$$

Так как

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \int_{\partial D_\varepsilon} f(z)dz + \int_{l(\varepsilon)} f(z)dz,$$

осталось проверить, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{l(\varepsilon)} f(z)dz = \pi i \ \mathrm{res}_b f. \tag{1}$$

При достаточно малых ε функция f представляется в круге $B(b, \varepsilon)$ в виде

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - b} + g(z),$$

где $g(z)$ голоморфная часть ряда Лорана, а $c_{-1} = \mathrm{res}_b f$. Так как длина дуги $l(\varepsilon)$ стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$, то

$$\left| \int_{l(\varepsilon)} g(z)dz \right| \le \max |g(z)| \cdot \text{длина } l(\varepsilon) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

Далее, параметризуем дугу $l(\varepsilon)$ как $z(t) = b + \varepsilon e^{it}$, $\alpha(\varepsilon) \le t \le \beta(\varepsilon)$. Имеем

$$\int_{l(\varepsilon)} \frac{c_{-1}}{z-b} dz = \int_{\alpha(\varepsilon)}^{\beta(\varepsilon)} \frac{c_{-1} i \varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}} dt = i c_{-1}(\beta(\varepsilon) - \alpha(\varepsilon)) \to i\pi c_{-1} \quad (\varepsilon \to 0),$$

что доказывает (1).

Література

[1] Б.В.Шабат. Введение в комплексный анализ. Т.1, М., «Наука» , 1985.

[2] Е.Титчмарш. Теория функций. М.,«Наука», 1980.

[3] М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.