1 Матриці

Матриця розміру $n \times m$ – це прямокутна таблиця

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

елементи якої a_{ij} належать до деякого поля F. Скорочений запис такий:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}.$$

Матриці однакового розміру можна додавати. Додавання поелементне. Якщо $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$, а $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$, то

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}.$$

Матрицю можна помножити на елемент поля F: якщо $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$, то

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}, \alpha \in F.$$

Множення матриць здійснюється за правилом "рядок на стовпчик", а саме: якщо $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$, а $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,l}}$, то

$$C = AB = (c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,l}}.$$

Увага! Помножити матриці A і B можна лише за умови: кількість стовпчиків матриці A повинна дорівнювати кількості рядків матриці B. При цьому кількість рядків матриці AB дорівнює кількості рядків матриці A, а кількість стовпчиків матриці AB дорівнює кількості стовпчиків матриці B.

Приклад 1 *Нехай*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця $C = AB = (c_{ij})_{\substack{i=1,2 \\ j=1,\dots,4}}$ *має вигляд:*

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= 2\cdot 1 + (-1)\cdot 2 = 0\\
c_{12} &= 2\cdot 0 + (-1)\cdot 1 = 1\\
c_{13} &= 2\cdot (-2) + (-1)\cdot 4 = -8\\
c_{14} &= 2\cdot 3 + (-1)\cdot 0 = 6\\
c_{21} &= 3\cdot 1 + 0\cdot 2 = 3\\
c_{22} &= 3\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0\\
c_{23} &= 3\cdot (-2) + 0\cdot 4 = -6\\
c_{24} &= 3\cdot 3 + 0\cdot 0 = 9\\
c_{31} &= 1\cdot 1 + 4\cdot 2 = 9\\
c_{32} &= 1\cdot 0 + 4\cdot 1 = 4\\
c_{33} &= 1\cdot (-2) + 4\cdot 4 = 14\\
c_{34} &= 1\cdot 3 + 4\cdot 0 = 3
\end{aligned}
$$

Тому

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -8 & 6\\ 3 & 0 & -6 & 9\\ 9 & 4 & 14 & 3 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що множення матриць не комутативне. Іноді матриця AB існує, а матриця BA – ні. Але якщо існують обидві матриці, то рівність $AB = BA$ у загальному випадку не виконується. Наведіть приклад для обох цих випадків.

Зазначимо, що завжди можна помножити дві квадратні матриці однакового порядку.

Означення 1 *Матрицею транспонованою до матриці* $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$ *називається матриця*

$$A^t = (a_{ji})_{\substack{j=1,\dots,m\\ i=1,\dots,n}}$$

У цій матриці рядки стали стовпчиками і навпаки.

Приклад 2 *Якщо*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \text{ то } A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3\\ -1 & 2\\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Означення 2 *Матрицею оберненою до квадратної матриці A називається матриця A^{-1}, що задовольняє умову*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

де $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ – *одинична матриця.*

Твердження 1 *Обернена матриця A^{-1} існує тоді і тільки тоді, коли $\det A \neq 0$.*

Твердження 2 *Обернена матриця може бути знайдена за формулою*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}, \end{pmatrix}^t$$

де A_{ij}– алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A.

Приклад 3 *Нехай*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

тоді

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -3 & -5 & 1 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Наведеною формулою зручно користуватися для матриць невеликого розміру (зазвичай, другого або третього порядку).

Існує ще один спосіб знаходження оберненої матриці – метод Гауса. Домовимося припустимими, або елементарними, операціями з рядками матриці A називати такі:

а) зміна місцями рядків;

б) множення рядка на ненульове число;

в) додавання до одного рядка іншого, помноженого на число.

Опишемо алгоритм пошуку оберненої матриці методом Гауса. До матриці A розміру $n \times n$ припишемо справа одиничну E матрицю того ж порядку:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

Ми отримали так звану розширену матрицю розміру $n \times 2n$. За допомогою припустимих операцій з рядками розширеної матриці $(A|E)$ зробимо так, щоб на місці матриці A опинилася матриця E. Тоді на місці матриці E з'явиться матриця A^{-1}: $(E|A^{-1})$.

Приклад 4 *Знайти матрицю A^{-1}, якщо*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_2+(-2)A_1]{A_3+(-3)A_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{A_3 \leftrightarrow A_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{A_3+(-3)A_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_1+(-2)A_3]{A_2+2A_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -13 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -13 & -2 & 6 \\ 11 & 2 & -5 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вправа 1 *Перевірте, що $AA^{-1} = E$.*

Зверніть увагу на те, в якій послідовності ми виконуємо припустимі операції. Спочатку ми повинні на якомусь місці отримати одиницю (у нашому прикладі цього спеціально робити не довелося). Потім переставити рядки так, щоб одиниця опинилася на головній діагоналі. Потім ми множимо рядок з одиницею на відповідні коефіцієнти і додаємо до інших рядків так, щоб усі інші елементи стовпчика з одиницею стали нулями. Потім отримуємо одиницю в іншому стовпчику і повторюємо процедуру, але так, щоб не зіпсувати стовпчики, які ми вже перетворили. Таким чином ми отримаємо матрицю $(E|A^{-1})$. Ще раз зауважимо, що всі припустимі операції здійснюються з рядками **розширеної** матриці.

Приклад 5 *№852 (И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре)*

Знайти A^{-1}, якщо

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[i=2,3,\dots,n.]{A_i+(-1)A_1,}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_1+\sum_{i=2}^{n} A_i}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[i=2,3,\dots,n.]{A_i\times(-1),}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Домашнє завдання: Знайти AB і BA, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, №№ 790, 801, 803, 811, 814, 821, 836(2 способи), 840(2 способи), 848, 849.

2 Ранг матриці

Означення 3 *Рангом матриці називається найбільший з порядків ненульових мінорів цієї матриці.*

Щоб знайти ранг матриці за означенням треба послідовно шукати ненульові мінори першого, другого,..., n-го порядку. Це доволі кропітка робота, але є більш простий **метод оточення мінорів**. Знаходимо ненульовий мінор першого порядку. Далі розглядаємо лише ті мінори другого порядку, які містять в собі знайдений мінор першого порядку. Якщо всі такі мінори дорівнюють нулю, то ранг дорівнює одиниці. Якщо хоча б один з мінорів другого порядку ненульовий, то розглядаємо лише ті мінори третього порядку, в яких він міститься, і т.д.

Приклад 6 *№608 (И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре)*

Знайти ранг матриці методом оточення мінорів.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо ненульовий мінор першого порядку, наприклад,

$$D_1 = a_{11} = 2 \neq 0.$$

Розглянемо мінори другого порядку, що містять D_1 і подивимось, чи є серед них такий, що не дорівнює нулю. Маємо:

$$D_2^1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0, \ D_2^2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \ D_2^3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Тепер розглянемо лише ті мінори матриці A, що містять D_2^3.

$$D_3^1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \ D_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0, \ D_3^3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки всі такі мінори виявилися рівними нулю, то $rgA = 2$.

Означення 4 *Рядковим рангом матриці називаєтьcя число лінійно незалежних рядків матриці A (r_pA), а стовпчиковим рангом – кількість лінійно незалежних стовпчиків (r_cA).*

Теорема 2.1 (про ранг) *Рядковий та стовпчиковий ранги матриці дорівнюють її рангу.*

Доведення цього факту можна знайти, наприклад у книзі А. Г. Куроша "Курс высшей алгебры". Для того, щоб знайти строковий ранг матриці треба скористатися методом Гауса приведення матриці до ступінчатого вигляду. Відомо (виконайте №615, Проскуряков), що припустимі перетворення не змінюють ранг матриці.

Приклад 7 *№621 (И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре) Знайдіть ранг наступної матриці за допомогою елементарних перетворень:*

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}.$$

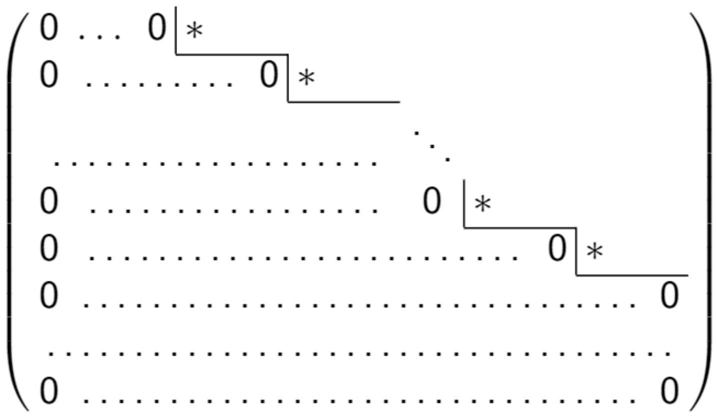
Знайдемо строковий ранг за допомогою таких перетворень:

$$\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2+(-2)A_1} \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{A_2 \leftrightarrow A_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_4+(-47)A_1]{A_2+(-24)A_1, A_3+(-73)A_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & -29 & 12 & 0 & 58 \\ 0 & -87 & 25 & 0 & 174 \\ 0 & -58 & 24 & 0 & 116 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3+(-3)A_2]{A_4+(-2)A_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & -29 & 12 & 0 & 58 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримана матриця має ступінчатий вигляд:



Легко перевірити, що ненульові рядки у ступінчатому вигляді лінійно незалежні (зробіть це!). Тому рядковий ранг дорівнює 3 (три ненульові рядки). Для знаходження стовпчикового рангу достатньо знайти рядковий ранг транспонованої матриці (зробіть це!).

Домашнє завдання: И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, №№ 610, 611, 619, 620.

Консультації Заварзіної О.О. проходитимуть засобами електронної пошти та scype. За потреби звертайтеся за адресою: olesia.zavarzina@yahoo.com.

Консультації Ільїнської І.П. проходитимуть за телефоном, номер телефону у старости групи.