Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Н. П. Гиря
Л. Ю. Полякова

СИМЕТРИЧНІ МНОГОЧЛЕНИ

Навчально-методичний посібник з алгебри
для студентів І курсу механіко-математичного факультету

Харків – 2012

УДК 512.622.65(075.8)
ББК 22.144я73
Г51

Рецензенти:

С. Ю. Фаворов — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри теорії функцій та функціонального аналізу Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна;

С. В. Духопельников — кандидат технічних наук, старший викладач кафедри вищої математики НТУ «ХПІ».

Затверджено до друку рішенням Науково-методичної ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 3 від 14.03.2012 р.)

Гиря Н. П.

Г51 Симетричні многочлени : навчально-методичний посібник з алгебри для студентів І курсу механіко-математичного факультету/ Н. П. Гиря, Л. Ю. Полякова. — Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2012. — 28 с.

Методичні вказівки за темою «Симетричні многочлени» призначені надати допомогу студентам І курсу при вивченні поняття симетричного многочлена та під час виконання завдань модульного контролю за відповідним розділом курсу вищої алгебри.

Вступ

Многочлени декількох змінних є природнім узагальненням многочленів однієї змінної. По відношенню до операцій додавання та множення, які виникають при цьому узагальненні, множина многочленів декількох змінних, як і множина многочленів однієї змінної, утворює кільце. Багато інших алгебраїчних властивостей многочленів однієї змінної залишаються незмінними й у випадку декількох змінних. Це, насамперед, властивості степеня та факторіальність кільця, тобто властивість многочленів розкладатися у добуток незвідних множників єдиним чином. Але виникають суттєві відмінності: кільце многочленів декількох змінних не є кільцем головних ідеалів, у ньому неможливе (принаймні в загальному випадку) ділення з остачею; на множині одночленів декількох змінних має бути введеним відношення порядку задля того, щоб розташовувати за цим порядком члени многочлена, тощо.

Для многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ важливим є порядок розташування його змінних. Змінивши порядок, ми отримуємо інший многочлен, хоча й не обов'язково. Наприклад, якщо $f(x, y) = x^2 + y^2$, то многочлен $f(y, x)$ співпадає з многочленом $f(x, y)$. Розгляд цього та подібних прикладів приводить до необхідності вивчення симетрії многочленів.

Поняття симетрії — одне з найбільш змістовних понять математики. У загальному сенсі симетричність об'єкта означає, що він залишається незмінним під дією деякої групи перетворень. У випадку многочленів декількох змінних такою групою перетворень є група підстановок змінних многочлена. Тобто будь-яка перестановка змінних симетричного многочлена не змінює самого многочлена.

Симетричні многочлени мають численні застосування в алгебрі в першу чергу завдяки тому, що природно виникають у формулах Вієта. У числі таких застосувань укажемо обчислення симетричних виразів що містять корені рівнянь, розв'язання симетричних систем рівнянь, знаходження степеневих сум, позбавлення від ірраціональності в знаменнику.

Метою цього навчально-методичного посібника є надання допомоги студентам першого курсу, які опановують поняття симетричного многочлена та вчаться застосовувати його на практиці. У посібнику наведено основні визначення та факти за темою «Симетричні многочлени», а також розв'язання типових прикладів, запропоновано літературу для більш докладного вивчення теми та самостійної роботи. Посібник містить 25 варіантів індивідуальних завдань для здійснення модульного контролю за даною темою.

Многочлени декількох змінних

Визначення. *Многочленом* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем K називається сума скінченного числа різних мономів вигляду $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$, з коефіцієнтами з поля K, де $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — цілі невід'ємні числа, тобто

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{N_1} \sum_{k_2=0}^{N_2} \cdots \sum_{k_n=0}^{N_n} a_{k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n},$$

де $a_{k_1 k_2 \ldots k_n} \in K$, $N_1, \ldots, N_n$ — деякі цілі невід'ємні числа.

Два многочлени вважають *рівними*, якщо їхні коефіцієнти при однакових мономах рівні.

Членом многочлена називають усякий його моном з коефіцієнтом. Таким чином, членами вищевказаного многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ є всі вирази $a_{k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$.

Визначення. Сума $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ називається *степенем монома* або загальним степенем монома $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Визначення. Найбільший зі степенів мономів називається *степенем многочлена* за сукупністю змінних або загальним степенем многочлена.

Многочлени нульового степеня, так само як у випадку многочленів від однієї змінної, — це відмінні від нуля елементи поля K. Нуль також є многочленом, але степінь його не визначається.

Приклад 1. *Многочленом 6-го степеня від трьох змінних є, наприклад, многочлен* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3^2 + x_1^5 x_3 + x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 x_3$. *Степінь монома* $x_1 x_2^2 x_3^2$ *дорівнює 5, степені мономів* $x_1^5 x_3$, $x_2^2 x_3^2$ *та* $x_1^2 x_2^2 x_3$ *дорівнюють 6, 4 та 5 відповідно.*

Визначення. Якщо всі мономи многочлена мають однаковий степінь m, то такий многочлен називається *однорідним* многочленом степеня m або *формою* m-ого степеня. Форми степеня 1 називаються лінійними, а форми степеня 2 — квадратичними.

Приклад 2. *Многочлен* $f(x_1, x_2) = x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$ *від двох змінних* x_1 *та* x_2 *є однорідним, тому що кожен його моном має степінь* 3. *Многочлен* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ *є квадратичною формою від* n *змінних.*

Степенем многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по відношенню до однієї зі змінних x_i або *відносним степенем* називається найвищий показник, з яким x_i входить до членів цього многочлена (цей степінь може бути й нульовим).

Приклад 3. *Степінь многочлена* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3^2 + x_1^5 x_3 + x_2^2 x_3^2$ *по відношенню до змінної* x_3 *дорівнює* 2, *а по відношенню до змінної* x_1 *степінь дорівнює* 5.

На множині мономів від n змінних визначений *лексикографічний порядок*: моном $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ вважається вищим за моном $x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n}$, якщо існує таке $j \le n-1$, що $k_1 = l_1, \ldots, k_{j-1} = l_{j-1}$, $k_j > l_j$.

Таким чином, із двох мономів $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ й $x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n}$ многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, вищим вважатиметься той, у якого показник степеня x_1 більше, а якщо ці показники рівні, то той, у якого показник степеня x_2 більше, і т. д. Тобто перший моном вищий за другий, якщо перша з ненульових різниць $k_i - l_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ додатна.

Члени многочлена порівнюють так само, як і відповідні їм мономи. *Вищим* членом многочлена називають такий його член, який вищий за всі інші члени цього многочлена з точки зору лексикографічного порядку.

Приклад 4. *Запис многочлена*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3^2 + x_1^5 x_3 + x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 x_3$$

в лексикографічному порядку буде мати вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^5 x_3 + x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2.$$

Вищим членом даного многочлена є моном $x_1^5 x_3$.

Сумою двох многочленів $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ й $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається многочлен, коефіцієнти якого отримано додаванням відповідних коефіцієнтів f_1 і f_2. Якщо при цьому якийсь член входить лише до одного з многочленів, то він вважається таким, що входить і до іншого многочлена, але з коефіцієнтом, що дорівнює нулю.

Добутком двох многочленів $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ й $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається многочлен, отриманий почленним множенням f_1 на f_2, а потім зведенням подібних членів.

Щодо введених операцій додавання й множення множина многочленів від змінних $x_1, \ldots, x_n$ утворює комутативне кільце з одиницею. Нулем цього кільця є многочлен, усі коефіцієнти якого дорівнюють нулю, а одиницею — одиниця поля K. Зауважимо також, що зазначена вище побудова кільця многочленів від декількох змінних еквівалента індуктивній побудові кільця $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Дійсно, якщо розглянути кільце многочленів $K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ як кільце коефіцієнтів для многочленів від однієї змінної x_n, то кільце $K[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n]$ є ізоморфним кільцю $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

За аналогією з теорією многочленів однієї змінної справедлива наступна лема.

Лема 5. *Вищий член добутку многочленів дорівнює добутку вищих членів многочленів.*

Звідси зокрема випливає:

Наслідок 6. *Степінь добутку відмінних від нуля многочленів (за сукупністю змінних) дорівнює сумі степенів цих многочленів.*

Зазначимо, що добуток двох ненульових многочленів не може бути нулем, отже, кільце многочленів від n змінних не містить дільників нуля. Ця властивість кільця многочленів збережеться, якщо множиною коефіцієнтів многочленів вибрати не поле, а цілісне комутативне кільце з одиницею.

Симетричні многочлени

Визначення. Многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається симетричним, якщо він не змінюється за жодної перестановки змінних, тобто для кожної підстановки n елементів $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$ виконується рівність

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}).$$

Приклад 7. *Многочлени* $f_1(x_1, x_2) = x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$, $f_2(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$, $f_3(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ *є симетричними, а многочлен* $g(x_1, x_2) = x_1^3 x_2 + x_2^2$ *не є симетричним, оскільки, заміна* x_1 *на* x_2*, а* x_2 *на* x_1 *призводить до многочлена* $x_2^3 x_1 + x_1^2 \neq g(x_1, x_2)$.

Неважко переконатися в тому, що сума й добуток симетричних многочленів є симетричними, а, отже, симетричні многочлени від змінних $x_1, \ldots, x_n$ утворюють підкільце в кільці $K[x_1, \ldots, x_n]$.

Визначення. *Елементарними (основними)* симетричними многочленами від n змінних називають наступні многочлени:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n;\\
&\sigma_2 = \sum_{i<j} x_i x_j = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n;\\
&\sigma_3 = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots + x_{n-2} x_{n-1} x_n;\\
&\ldots\\
&\sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n.
\end{aligned}$$

Очевидно, степінь многочлена σ_k дорівнює k $(1 \geq k \geq n)$. Зазначимо, що кількість доданків многочлена σ_k дорівнює C_n^k.

Теорема 8 (Вієта). *Нехай* $g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *— многочлен з коефіцієнтами з поля* K *від змінної* x*, причому* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *— його корені. Тоді справедливі наступні формули:*

$$\begin{aligned}
&\sigma_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\frac{a_{n-1}}{a_n};\\
&\sigma_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{a_{n-2}}{a_n};\\
&\ldots\\
&\sigma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.
\end{aligned}$$

Справедлива також теорема, обернена до теореми Вієта:

Теорема 9. *Нехай*

$$\begin{gathered}
\sigma_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1,\\
\sigma_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_2,\\
\ldots\\
\sigma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_n
\end{gathered}$$

є значеннями елементарних симетричних многочленів на деякому наборі значень змінних $x_1, \ldots, x_n$*. Тоді многочлен від однієї змінної* $P(x) = x^n - b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots + (-1)^n b_n$ *має своїми коренями набір* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*.*

Приклад 10. *Знайти розв'язки рівняння* $x^{20} - 20x^{19} + \cdots + 1 = 0$.

Перед нами рівняння 20 степеня, в силу основної теореми алгебри воно має рівно 20 коренів (деякі з них можуть бути комплексними). Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ — корені рівняння, тоді за теоремою Вієта маємо $\sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n = 20$, $\sigma_{20} = x_1 x_2 \cdots x_n = 1$. Зауважимо, що середнє арифметичне коренів дорівнює їх середньому геометричному, тому $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, але оскільки сума 20 однакових доданків дорівнює 20, то $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$.

Основна теорема про симетричні многочлени

Теорема 11. *Кожен симетричний многочлен від змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ над полем K можна представити у вигляді многочлена від елементарних симетричних многочленів над полем K. Такий вигляд єдиний.*

Щоб знайти вираз даного симетричного многочлена через елементарні, потрібно виконати наступні дії:

1. Розбити многочлен на однорідні частини (тобто згрупувати всі члени многочлена, що мають однаковий степінь за сукупністю змінних).
2. Виразити кожну однорідну частину через елементарні многочлени окремо, а для цього
   (a) знайти вищий член однорідної частини ($Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$);
   (b) виписати набір показників $k_1, k_2, \dots, k_n$ і скласти всі можливі набори чисел $l_1 \geq l_2 \geq l_3 \geq \dots \geq l_n$, таких що сума $l_1 + l_2 + \dots + l_n$ однакова й дорівнює $k_1 + k_2 + \dots + k_n$, причому моном $x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n}$ не вище монома $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$;
   (c) для кожного набору $l_1, l_2, \dots, l_n$ скласти добуток
   $$\sigma_1^{l_1 - l_2} \sigma_2^{l_2 - l_3} \cdots \sigma_{n-1}^{l_{n-1} - l_n} \sigma_n^{l_n};$$
   (d) однорідну частину прирівняти сумі побудованих таким чином добутків з невизначеними коефіцієнтами;
   (e) коефіцієнт при добутку
   $$\sigma_1^{k_1 - k_2} \sigma_2^{k_2 - k_3} \cdots \sigma_{n-1}^{k_{n-1} - k_n} \sigma_n^{k_n}$$
   взяти рівним старшому коефіцієнту однорідної частини, тобто A; інші коефіцієнти знайти, надаючи різними способами числові значення змінним $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Приклад 12. *Виразити через основні симетричні многочлени многочлен $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3 - x_1^3 x_3 - x_1 x_3^3 - x_2^3 x_3 - x_2 x_3^3 + x_1^2 x_2 x_3 + +x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2$.*

Даний многочлен є однорідним многочленом 4-го степеня, тому розбивати його на однорідні частини не треба, вищий член даного многочлена — це доданок $-x_1^3 x_2$, тобто $k_1 = 3, k_2 = 1, k_3 = 0$, $k_1 + k_2 + k_3 = 4$.

Можливі наступні варіанти для $l_1, l_2, l_3 : (3, 1, 0)$, $(2, 2, 0)$, $(2, 1, 1)$.

Складемо таблицю з можливих наборів показників та відповідних добутків елементарних многочленів:

Показники степенів						Добутки
x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	
3	1	0	2	1	0	$\sigma_1^2 \sigma_2$
2	2	0	0	2	0	σ_2^2
2	1	1	1	0	1	$\sigma_1 \sigma_3$

Прирівняємо f сумі побудованих добутків з невизначеними коефіцієнтами, з огляду на те, що старший коефіцієнт f дорівнює -1. Одержимо $f(x_1, x_2, x_3) = -\sigma_1^2 \sigma_2 + a\sigma_2^2 + b\sigma_1 \sigma_3$.

Визначимо коефіцієнти a та b, надаючи числові значення змінним x_1, x_2, x_3. Наприклад, на наборі значень $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ маємо $: f(x_1, x_2, x_3) = 2$, а оскільки $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -1$, $\sigma_3 = 0$, то $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = a(-1)^2$, звідки $a = 2$. Ці дії, а також подальші обчислення зручно записати в таблицю:

Значення змінних						$f(x_1, x_2, x_3)$	Значення коефіцієнта
x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3		
1	-1	0	0	-1	0	$2 = a(-1)^2$	$a = 2$
1	1	1	3	3	1	$-3 = -27 + 18 + 3b$	$b = 2$

Остаточно одержуємо $f = -\sigma_1^2 \sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_3$.

Приклад 13. *Знайти значення симетричної функції*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2 + 1}{x_2 x_3} + \frac{x_2^2 + 1}{x_1 x_3} + \frac{x_3^2 + 1}{x_1 x_2},$$

де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 - 2x + 5 = 0$.

Зауважимо, що нам не треба знаходити корені x_1, x_2, x_3 рівняння, даного в умові задачі.

Зведемо доданки у виразі функції f до спільного знаменника:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1^2+1)x_1 + (x_2^2+1)x_2 + (x_3^2+1)x_3}{x_1 x_2 x_3}.$$

Виразимо чисельник та знаменник отриманого дробу через елементарні симетричні многочлени. Очевидно, що знаменник дорівнює σ_3. Позначимо неоднорідний многочлен у чисельнику через $g(x_1, x_2, x_3)$ та розіб'ємо в суму однорідних доданків:

$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Вищий член суми третіх степенів дорівнює x_1^3, а таблиця показників має вигляд:

Показники степенів						
x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	Добутки
3	0	0	3	0	0	σ_1^3
2	1	0	1	1	0	$\sigma_1\sigma_2$
1	1	1	0	0	1	σ_3

Отже, $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \sigma_1^3 + a\sigma_1\sigma_2 + b\sigma_3$. Виконаємо підстановку значень змінних x_1, x_2, x_3 до отриманої рівності:

Значення змінних						
x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	$x_1^2 + x_2^3 + x_3^3$
1	1	0	2	1	0	$2 = 8 + 2a \Rightarrow a = -3$
1	1	1	3	3	1	$3 = 27 - 3\cdot 3\cdot 3 + b \Rightarrow b = 3$

Отже, $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.

Аналогічно, знаходимо, що $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Таким чином,

$$f = \frac{\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 + \sigma_1^2 - 2\sigma_2}{\sigma_3}.$$

За теоремою Вієта визначимо значення елементарних симетричних многочленів $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ від коренів рівняння $x^3 - 2x + 5 = 0$. Маємо: $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -2$, $\sigma_3 = -5$. Підставляючи ці значення у вираз для f, знаходимо шукане значення функції: $f = \frac{3\cdot(-5) - 2\cdot(-2)}{-5} = \frac{11}{5}$.

Моногенні многочлени

Визначення. Симетричний многочлен від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, всі члени якого можуть бути отримані з одного шляхом перестановок змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, називається *моногенним* многочленом.

Зауважимо, що коли $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ — вищий член моногенного многочлена, то цей многочлен зазвичай позначається через $S(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n})$ або просто $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} + \cdots$.

Приклад 14. *Моногенним многочленом від трьох змінних є, наприклад, многочлен* $S(x_1^2 x_2) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2$. *Зазначимо, що в прикладі 7 многочлени* f_1, f_2 *є моногенними, а многочлен* f_3 *не є таким.*

Приклад 15. *Виразити* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = S(x_1^2 x_2)$ *через елементарні симетричні многочлени.*

Зауважимо, що f — моногенний многочлен від n змінних,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= x_1^2 x_2 + \cdots + x_1^2 x_n + x_2^2 x_1 + \cdots + x_2^2 x_n + \cdots + x_n^2 x_1 + \cdots + x_n^2 x_{n-1} =$$
$$= x_1^2 x_2 + \cdots .$$

Вищий член многочлена дорівнює $x_1^2 x_2$, далі виписуємо набори показників і складаємо таблицю:

Показники степенів											
x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	$\cdots$	σ_n	Добутки
2	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	$\sigma_1\sigma_2$
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	σ_3

Отже, $f = \sigma_1\sigma_2 + a\sigma_3$. Виконаємо підстановку значень змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ до отриманої рівності:

Значення змінних									
x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_n	σ_1	σ_2	σ_3	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
1	1	1	0	0	0	3	3	1	$6 = 3\cdot 3 + a \Rightarrow a = -3$

Остаточно одержуємо, що $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$.

Зазначимо, що найбільш зручними підстановками змінних для моногенних многочленів є набори значень, що складаються з нулів та одиниць.

Степеневі суми, формули Ньютона

Визначення. *Степеневими сумами* називаються симетричні многочлени $s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k, k \in \mathbb{N}$.

Приклад 16. *Запишемо декілька перших степеневих сум:*

$$s_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n; \quad s_2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2;$$
$$s_3 = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3; \quad s_4 = x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4.$$

Зв'язок між степеневими сумами та елементарними симетричними многочленами встановлюють формули Ньютона:

1. Для випадку $k \le n$:

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \dots + (-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0.$$

2. Для випадку $k > n$:

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \dots + (-1)^n s_{k-n}\sigma_n = 0.$$

За допомогою цих формул можна послідовно знаходити вирази для степеневих сум через елементарні симетричні многочлени або вирази для елементарних многочленів через степеневі суми. Формули є рекурентними, тому досить складними для використання, адже для того, щоб виразити, наприклад, s_{15}, спочатку маємо знайти вирази для $s_1, s_2, s_3, \dots, s_{14}$.

Розглянемо приклади.

Приклад 17. *Виразити степеневі суми s_2 та s_3 від двох змінних через елементарні симетричні многочлени.*

При $n = 2$ формули Ньютона дають рівності $s_2 - \sigma_1 s_1 + 2\sigma_2 = 0$ і $s_3 - \sigma_1 s_2 + {}$ $+\sigma_2 s_1 = 0$, звідки

$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \quad s_3 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2\sigma_1 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2.$$

Порівняйте ці формули із формулами, знайденими у прикладі 13.

Приклад 18. *Скласти рівняння найменшого степеня, коренями якого є куби коренів квадратного рівняння $x^2 + 6x + 10 = 0$.*

Нехай x_1, x_2 — корені даного рівняння. Складемо нове рівняння $t^2 + bt + c = 0$, коренями якого будуть числа $t_1 = x_1^3, t_2 = x_2^3$. Шукане рівняння записано зведеним рівнянням другого степеня (оскільки коренів у нього повинно бути 2) з невизначеними коефіцієнтами. Завдання полягає в тому, щоб знайти ці коефіцієнти.

За теоремою Вієта для даного в умові рівняння $\sigma_1 = x_1 + x_2 = -6$, $\sigma_2 = x_1x_2 = 10$, тому одержуємо ланцюжок рівностей:

$$-b = t_1 + t_2 = x_1^3 + x_2^3 = s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = -216 - 3 \cdot (-6) \cdot 10 = -36,$$

а тоді $c = t_1t_2 = x_1^3x_2^3 = (x_1x_2)^3 = \sigma_2^3 = 1000$. Для знаходження s_3 ми скористалися формулою, одержаною у прикладі 17.

Шукане рівняння має вигляд: $t^2 + 36t + 1000 = 0$.

Приклад 19. *Знайти суму восьмих степенів коренів рівняння* $x^3 - 2x + 3 = 0$.

Рівняння третього степеня має три корені, тому степенева сума $s_8 = x_1^8 + x_2^8 + x_3^8$. З умови задачі знаходимо $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -2, \sigma_3 = -3$. Скористаємося другою формулою Ньютона, у нашому випадку при $k = 8$, $n = 3$ вона матиме вигляд: $s_8 - s_7\sigma_1 + s_6\sigma_2 - s_5\sigma_3 = 0$. Підставимо відомі значення для σ та одержимо, що $s_8 = 2s_6 - 3s_5$.

Далі зауважимо, що за другою формулою Ньютона

$$s_6 - s_5\sigma_1 + s_4\sigma_2 - s_3\sigma_3 = 0, \quad s_5 - s_4\sigma_1 + s_3\sigma_2 - s_2\sigma_3 = 0.$$

Звідси $s_6 = 2s_4 - 3s_3, s_5 = 2s_3 - 3s_2$.

Підставимо вирази для s_5, s_6 у вираз для s_8 та одержимо

$$s_8 = 4s_4 - 12s_3 + 9s_2.$$

Далі, за другою формулою Ньютона $s_4 - s_3\sigma_1 + s_2\sigma_2 - s_1\sigma_3 = 0$, а за першою формулою Ньютона $s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0$, $s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0$, звідки, з урахуванням $s_1 = \sigma_1 = 0$, маємо: $s_4 = 2s_2, s_3 = -9, s_2 = 4$. Повертаючись до s_8, одержуємо $s_8 = 8s_2 - 12s_3 + 9s_2 = 17s_2 - 12s_3 = 176$.

Відповідь: 176.

Формули Варінга

Оскільки степеневі суми є симетричними многочленами, то кожну суму можна виразити через елементарні симетричні многочлени, але не обов'язково це робити за допомогою формул Ньютона.

Наступні дві формули виражають многочлени s_k $(k = 1, 2, 3, \dots)$ через набір многочленів $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ та навпаки.

Перша формула Варінга:

$$s_k = k\Sigma(-1)^{2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \dots + (n+1)\lambda_n} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n - 1)!\sigma_2^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2} \cdots \sigma_n^{\lambda_n}}{\lambda_1! \cdots \lambda_n!},$$

де підсумовування береться по всіх невід'ємних наборах цілих чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ із властивістю $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = k$.

Приклад 20. *Виразимо s_4. При $k = 4$ необхідно взяти наступні набори:*

1. $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$;
2. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$;
3. $\lambda_1 = \lambda_3 = 1, \lambda_2 = \lambda_4 = \dots = \lambda_n = 0$;
4. $\lambda_2 = 2, \lambda_1 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$;
5. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 1, \lambda_5 = \dots = \lambda_n = 0$;

При таких наборах одержуємо

$$s_4 = 4\left((-1)^8\frac{3!\sigma_1^4}{4!} + (-1)^7\frac{2!\sigma_1^2\sigma_2}{2!1!} + \right.$$
$$\left. + (-1)^6\frac{1!\sigma_1\sigma_3}{1!1!} + (-1)^6\frac{1!\sigma_2^2}{2!} + (-1)^5\frac{3!\sigma_4}{1!}\right) =$$
$$= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4.$$

Навпаки, елементарні симетричні многочлени від n змінних можна виразити через степеневі суми за допомогою **другої формули Варінга**:

$$\sigma_k = \Sigma\frac{(-1)^{\lambda_1+\dots+\lambda_k+k}}{1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots k^{\lambda_k}\lambda_1!\cdots\lambda_n!}s_1^{\lambda_1}\cdots s_k^{\lambda_k},$$

де підсумовування проводиться по тим самим наборам чисел λ_j, що й у першій формулі Варінга.

Приклад 21. *Виразимо σ_3.*

При $k = 3$ необхідно взяти наступні набори:

1. $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$;
2. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$;
3. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = \lambda_5 = \dots = \lambda_n = 0$;

Одержуємо $\sigma_3 = \frac{(-1)^{3+3}}{1^3\cdot 3!}s_1^3 + \frac{(-1)^{1+1+3}}{1\cdot 2\cdot 1!\cdot 1!}s_1s_2 + \frac{(-1)^{1+3}}{3\cdot 1!}s_3 = \frac{1}{6}s_1^3 - \frac{1}{2}s_1s_2 + \frac{1}{3}s_3$.

Розв'язання систем рівнянь та інші застосування

Факти з теорії симетричних многочленів допомагають розв'язувати деякі системи алгебраїчних рівнянь, а саме такі системи, до яких змінні входять симетрично. У цьому випадку підходяща заміна змінних системи через елементарні симетричні многочлени сильно спрощує подальше розв'язання. Далі в прикладах розглядатимуться системи алгебраїчних рівнянь із двома й трьома невідомими.

Приклад 22. *Розв'яжемо систему:* $\begin{cases} x^2 + y = 5; \\ x^6 + y^3 = 65. \end{cases}$

Зауважимо, що змінні x та y входять до системи несиметрично. Щоб це виправити, зробимо заміну $x^2 = u$ $y = v$. Після такої заміни одержимо систему

$$\begin{cases} u + v = 5; \\ u^3 + v^3 = 65, \end{cases}$$

у яку змінні вже входять симетрично.

Введемо нові невідомі $\sigma_1 = u + v, \sigma_2 = uv$, попередньо зазначивши, що $u^3 + v^3 = (u+v)(u^2 - uv + v^2) = (u+v)((u+v)^2 - 3uv)$.

Одержуємо систему:
$\begin{cases} \sigma_1 = 5; \\ \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) = 65. \end{cases}$

Підставляючи значення для σ_1 у друге рівняння, одержуємо $\sigma_2 = 4$.

Звідси маємо, що u та v є коренями рівняння $t^2 - 5t + 4 = 0$, тобто маємо дві можливості: $\begin{cases} u = 1; \\ v = 4, \end{cases}$ або $\begin{cases} u = 4; \\ v = 1. \end{cases}$

Повертаючись до змінних x та y, остаточно одержуємо:
$\begin{cases} x = 1; \\ y = 4, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1; \\ y = 4, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2; \\ y = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2; \\ y = 1. \end{cases}$

Відповідь: $(1, 4)$, $(-1, 4)$, $(2, 1)$, $(-2, 1)$.

Приклад 23. *Розв'яжемо систему рівнянь із трьома невідомими:*
$$\begin{cases} x + y + z = 2; \\ (x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (z+x)(y+x) = 1; \\ x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y) = -6. \end{cases}$$

Зауважимо, що змінні входять до рівняння системи симетричним чином, однак перед заміною змінних розкриємо дужки в другому та третьому рівняннях системи. Одержуємо:

$$\begin{cases} x+y+z=2; \\ x^2+y^2+z^2+3(xy+xz+yz)=1; \\ x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y=-6. \end{cases}$$

Зробимо заміну змінних $\sigma_1 = x+y+z, \sigma_2 = xy+xz+yz, \sigma_3 = xyz$.

Зазначимо, що перші два рівняння системи легко записати за допомогою нових змінних: $\sigma_1 = 2$, і $\sigma_1^2 + \sigma_2 = 1$.

Для того щоб записати третє рівняння системи в нових змінних, виразимо симетричний многочлен $f = x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y$ через елементарні симетричні. Вищим членом многочлена f є доданок x^2y, тому маємо наступну таблицю показників:

Показники степенів						Добутки
x	y	z	σ_1	σ_2	σ_3	
2	1	0	1	1	0	$\sigma_1\sigma_2$
1	1	1	0	0	1	σ_3

Старший коефіцієнт f дорівнює 1, тому одержуємо $f = \sigma_1\sigma_2 + A\sigma_3$.

Для того щоб знайти коефіцієнт A, виберемо набір значень змінних, наприклад, покладемо $x = y = z = 1$. На такому наборі $\sigma_1 = \sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1, f(1,1,1) = 6$. Для A одержуємо лінійне рівняння $9 + A = 6$, звідки $A = -3$.

Остаточно маємо, що $f(x,y,z) = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$, а початкова система перетворюється на систему:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2; \\ \sigma_1^2 + \sigma_2 = 1; \\ \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = -6. \end{cases}$$

Бачимо, що система значно спростилася. Підставляючи спочатку значення σ_1 у друге рівняння, знаходимо, що $\sigma_2 = -3$, далі, підставляючи значення σ_1 й σ_2 у третє рівняння, знаходимо, що $\sigma_3 = 0$. З останнього виходить, що $x = 0$ або $y = 0$, або $z = 0$, однак достатньо розв'язати систему лише для одного випадку, а потім виписати відповіді, з огляду на симетричність входження змінних до рівнянь системи.

Отже, розглянемо випадок, коли $x = 0$. Тоді маємо $\begin{cases} y+z=2; \\ yz=-3. \end{cases}$

Звідси отримуємо наступні відповіді: $\begin{cases} x=0; \\ y=3; \\ z=-1 \end{cases}$ або $\begin{cases} x=0; \\ y=-1; \\ z=3. \end{cases}$

Запишемо інші розв'язки системи, що є перестановками вже отриманих значень:

$$\begin{cases} x=3; \\ y=0; \\ z=-1. \end{cases} \begin{cases} x=-1; \\ y=0; \\ z=3. \end{cases} \begin{cases} x=-1; \\ y=3; \\ z=0. \end{cases} \begin{cases} x=3; \\ y=-1; \\ z=0. \end{cases}$$

Відповідь: $(0,3,-1)$, $(0,-1,3)$, $(3,0,-1)$, $(-1,0,3)$, $(-1,3,0)$, $(3,-1,0)$.

У наступній задачі знайдемо корінь рівняння, не розв'язуючи його безпосередньо, а склавши еквівалентну йому систему рівнянь.

Приклад 24. *Розв'язати рівняння* $z^4 + (1-z)^4 = 1$.

Виконаємо наступну заміну змінних: $z = x, 1 - z = y$, тоді $x^4 + y^4 = 1$, крім того, $x + y = 1$.

Маємо систему

$$\begin{cases} x^4+y^4=1; \\ x+y=1. \end{cases}$$

Зробимо ще одну заміну змінних: $\sigma_1 = x+y, \sigma_2 = xy$, тоді $x^4 + y^4$ виражається через σ_1, σ_2 у такий спосіб: $x^4 + y^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$. Тобто система має вигляд:

$$\begin{cases} \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 1; \\ \sigma_1 = 1. \end{cases}$$

Підставляючи значення σ_1 до першого рівняння, одержуємо рівняння для $\sigma_2 : \sigma_2^2 - 2\sigma_2 = 0$.

Таким чином, маємо: $\begin{cases} \sigma_1 = 1; \\ \sigma_2 = 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} \sigma_1 = 1; \\ \sigma_2 = 2. \end{cases}$

Розв'язуючи першу систему, одержуємо $\begin{cases} x=0; \\ y=1 \end{cases}$ або $\begin{cases} x=1; \\ y=0, \end{cases}$

а розв'язуючи другу, одержуємо $\begin{cases} x=\frac{1+i\sqrt{7}}{2}; \\ y=\frac{1-i\sqrt{7}}{2} \end{cases}$ або $\begin{cases} x=\frac{1-i\sqrt{7}}{2}; \\ y=\frac{1+i\sqrt{7}}{2}. \end{cases}$

Повертаючись до змінної z, одержуємо, що рівняння $z^4 + (1-z)^4 = 1$ має чотири різних корені: $0, 1, \frac{1-i\sqrt{7}}{2}, \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$.

Відповідь: $0, 1, \frac{1-i\sqrt{7}}{2}, \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$.

Формули Вієта використовують також для позбавлення від ірраціональності в знаменнику у виразах вигляду

$$\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)},\ \text{де } \varphi(\alpha)=0,$$

а f, g, φ — деякі многочлени з коефіцієнтами з поля K, причому $\alpha \notin K$.

Для цього вираз подають у вигляді:

$$\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\frac{f(\alpha_1)g(\alpha_2)\dots g(\alpha_n)}{g(\alpha_1)g(\alpha_2)\dots g(\alpha_n)},$$

де $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2,\dots,\alpha_n$ — усі корені многочлена $\varphi(x)$, які розглядаються в алгебраїчному замиканні поля K. У такому вигляді знаменник дробу є симетричним многочленом від коренів $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, а отже може бути виражений за формулами Вієта через коефіцієнти многочлена φ, що належать полю K.

Приклад 25. *Позбавитися від ірраціональності в знаменнику дробу* $\frac{\alpha}{\alpha+1}$, *якщо* $\alpha^3-3\alpha+1=0$.

Нехай $\varphi(x)=x^3-3x+1$, а $\alpha_1=\alpha$, α_2,α_3 — його корені, тобто $\varphi(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$. Виконаємо перетворення дробу:

$$\frac{\alpha}{\alpha+1}=\frac{\alpha(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)}$$

Зауважимо, що $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)=-\varphi(-1)=-3$, отже, нам залишається перетворити чисельник дробу таким чином, щоб він не містив α_2,α_3. Нехай $\psi(x)$ — частка від ділення $\varphi(x)$ на $x-\alpha$. Тоді $\psi(x)=x^2+\alpha x+(\alpha^2-3)=(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$, тому

$$(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)=\psi(-1)=\alpha^2-\alpha-2.$$

Підставимо знайдені вирази, врахуємо умову $\alpha^3=3\alpha-1$ та одержимо відповідь:

$$\frac{\alpha}{\alpha+1}=\frac{\alpha(\alpha^2-\alpha-2)}{-3}=\frac{-1}{3}(\alpha^3-\alpha^2-2\alpha)=\frac{1}{3}(\alpha^2-\alpha+1).$$

Індивідуальні завдання

1. Скласти рівняння найменшого степеня, коренями якого є y_1, y_2, y_3.
2. Обчислити значення симетричної функції $f(x_1,x_2,x_3)$.
3. Знайти суму $n-$х степенів коренів даного рівняння.
4. Виразити через елементарні симетричні многочлени даний симетричний многочлен.
5. Розв'язати систему рівнянь над полем $\mathbb{R}$.

Варіант 1

1. $y_1=x_1^3,\ y_2=x_2^3,\ y_3=x_3^3$, де x_1,x_2,x_3 — корені рівняння $x^3+ax^2+bx+c=0$.

2. $f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_1^2}{x_1+1}+\dfrac{x_2^2}{x_2+1}+\dfrac{x_3^2}{x_3+1}$, де x_1,x_2,x_3 — корені рівняння $x^3-x^2+4x-3=0$.

3. $x^3-x^2+2=0$; $n=6$.

4. $(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)$.

5. $\begin{cases} x+y+z=2; \\ x^2+y^2+z^2=6; \\ x^3+y^3+z^3=8. \end{cases}$

Варіант 2

1. $y_1=x_1^3x_2x_3,\ y_2=x_1x_2^3x_3,\ y_3=x_1x_2x_3^3$, де x_1,x_2,x_3 — корені рівняння $x^3+bx^2+cx+d=0$.

2. $f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_1^2}{(x_2+1)(x_3+1)}+\dfrac{x_2^2}{(x_1+1)(x_3+1)}+\dfrac{x_3^2}{(x_1+1)(x_2+1)}$, де x_1,x_2,x_3 — корені рівняння $x^3-2x^2+7x-1=0$.

3. $x^3-2x+3=0$; $n=7$.

4. $(x_1+x_2-x_3)^3+(x_1-x_2+x_3)^3+(-x_1+x_2+x_3)^3$.

5. $\begin{cases} x+y+z=6; \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2}; \\ xyz=8. \end{cases}$

Варіант 3

1. $y_1 = x_1^2 x_2 x_3,\ y_2 = x_1 x_2^2 x_3,\ y_3 = x_1 x_2 x_3^2$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

2. $f = \frac{1}{(x_1^2 - 2x_2x_3)(x_2^2 - 2x_1x_3)} + \frac{1}{(x_2^2 - 2x_1x_3)(x_3^2 - 2x_1x_2)} + \frac{1}{(x_1^2 - 2x_2x_3)(x_3^2 - 2x_1x_2)}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $2x^3 + 6x^2 - x + 1 = 0$.

3. $x^3 - x - 3 = 0$; $n = 7$.

4. $(-x_1 + x_2 + x_3)(x_1 - x_2 + x_3)(x_1 + x_2 - x_3)$.

5. $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91; \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$

Варіант 4

1. $y_1 = \frac{1}{x_1^2},\ y_2 = \frac{1}{x_2^2},\ y_3 = \frac{1}{x_3^2}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

2. $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{(x_2-1)(x_3-1)} + \frac{x_2^2}{(x_1-1)(x_3-1)} + \frac{x_3^2}{(x_1-1)(x_2-1)}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$.

3. $x^3 + x^2 - 5 = 0$; $n = 6$.

4. $x_1^4x_2^2 + x_2^4x_1^2 + x_2^4x_3^2 + x_3^4x_2^2 + x_1^4x_3^2 + x_3^4x_1^2$.

5. $\begin{cases} 10(x^4 + y^4) = -17(x^3y + xy^3); \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

Варіант 5

1. $y_1 = x_1^2x_2^2,\ y_2 = x_2^2x_3^2,\ y_3 = x_1^2x_3^2$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$.

2. $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{(x_1 - x_3)^2}{x_1x_3} + \dfrac{(x_3 - x_2)^2}{x_3x_2} + \dfrac{(x_2 - x_1)^2}{x_2x_1}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 - 5x^2 + 2x - 8 = 0$.

3. $x^4 - 3x + 1 = 0$; $n = 5$.

4. $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$.

5. $\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12; \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}. \end{cases}$

Варіант 6

1. $y_1 = \frac{1}{x_1^2+1},\ y_2 = \frac{1}{x_2^2+1},\ y_3 = \frac{1}{x_3^2+1}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

2. $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1^2}{x_1 - 1} + \dfrac{x_2^2}{x_2 - 1} + \dfrac{x_3^2}{x_3 - 1}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 - 2x^2 + x - 6 = 0$.

3. $x^3 - x - 3 = 0$; $n = 7$.

4. $(2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_1 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2)$.

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 102; \\ xy + x + y = 69. \end{cases}$

Варіант 7

1. $y_1 = x_1 + x_2,\ y_2 = x_1 + x_3,\ y_3 = x_2 + x_3$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

2. $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1^2}{(x_2 - 1)(x_3 - 1)} + \dfrac{x_2^2}{(x_1 - 1)(x_3 - 1)} + \dfrac{x_3^2}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$.

3. $x^3 - x + 8 = 0$; $n = 6$.

4. $(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2)$.

5. $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17; \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$

Варіант 8

1. $y_1 = x_1x_2 + x_3,\ y_2 = x_2x_3 + x_1,\ y_3 = x_1x_3 + x_2$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + ax^2 + b = 0$.

2. $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{(x_1 - x_2)^2}{x_1x_2} + \dfrac{(x_2 - x_3)^2}{x_2x_3} + \dfrac{(x_3 - x_1)^2}{x_3x_1}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 - 3x^2 + 3x - 7 = 0$.

3. $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$; $n = 7$.

4. $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_2^2x_3^2 - 2x_3^2x_1^2$.

5. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35; \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$

Варіант 9

1. $y_1 = x_1^2 x_2^2,\ y_2 = x_2^2 x_3^2,\ y_3 = x_1^2 x_3^2$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

2. $f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)(x_2^2+x_2x_3+x_3^2)} + \frac{1}{(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)(x_1^2+x_1x_3+x_3^2)} + \frac{1}{(x_1^2+x_1x_3+x_3^2)(x_2^2+x_2x_3+x_3^2)}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $2x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$.

3. $x^3 + 3x - 4 = 0$; $n = 6$.

4. $(x_1^2 + x_2x_3)(x_2^2 + x_1x_3)(x_3^2 + x_1x_2)$.

5. $\begin{cases} 9(u^4 + v^4) = 17(u+v)^2; \\ 3uv = -2(u+v). \end{cases}$

Варіант 10

1. $y_1 = x_1 + x_2 + 1,\ y_2 = x_1 + x_3 + 1,\ y_3 = x_2 + x_3 + 1$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

2. $f(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1}{(x_1+x_3+x_1x_3)(x_1+x_2+x_1x_2)} + \frac{x_2}{(x_2+x_3+x_2x_3)(x_1+x_2+x_1x_2)} + \frac{x_3}{(x_1+x_3+x_1x_3)(x_2+x_3+x_2x_3)}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$.

3. $x^3 - 5x^2 + 1 = 0$; $n = 6$.

4. $(x_1 + x_2)^3 + (x_1 + x_3)^3 + (x_2 + x_3)^3$.

5. $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1; \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13. \end{cases}$

Варіант 11

1. $y_1 = \frac{1}{x_1+x_2},\ y_2 = \frac{1}{x_1+x_3},\ y_3 = \frac{1}{x_2+x_3}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$.

2. $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1^2}{x_2+x_3} + \dfrac{x_2^2}{x_1+x_3} + \dfrac{x_3^2}{x_1+x_2}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = 0$.

3. $x^3 + 3x - 1 = 0$; $n = 7$.

4. $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2$.

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34; \\ x + y + xy = 23. \end{cases}$

Варіант 12

1. $y_1 = \frac{x_1x_2}{x_3},\ y_2 = \frac{x_1x_3}{x_2},\ y_3 = \frac{x_2x_3}{x_1}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

2. $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1}{(x_1-x_3)^2(x_1-x_2)^2} + \dfrac{x_2}{(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2} + \dfrac{x_3}{(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + x^2 + 4x - 6 = 0$.

3. $x^3 - 4x^2 + 2 = 0$; $n = 6$.

4. $x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_2^3x_3^3$.

5. $\begin{cases} x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 136; \\ x^3y + xy^3 = 30. \end{cases}$

Варіант 13

1. $y_1 = \frac{x_1+x_2}{x_3},\ y_2 = \frac{x_2+x_3}{x_1}, y_3 = \frac{x_1+x_3}{x_2}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

2. $f = \dfrac{x_1}{(x_1^2+x_3^2)(x_1^2+x_2^2)} + \dfrac{x_2}{(x_2^2+x_3^2)(x_1^2+x_2^2)} + \dfrac{x_3}{(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 - x^2 - 4x + 2 = 0$.

3. $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$; $n = 6$.

4. $(x_1 - x_2)^4 + (x_1 - x_3)^4 + (x_2 - x_3)^4$.

5. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 97; \\ x + y = 5. \end{cases}$

Варіант 14

1. $y_1 = x_1x_2 - x_3,\ y_2 = x_2x_3 - x_1,\ y_3 = x_1x_3 - x_2$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

2. $f = \dfrac{x_1^2}{(x_1+x_3)(x_1+x_2)} + \dfrac{x_2^2}{(x_2+x_3)(x_1+x_2)} + \dfrac{x_3^2}{(x_1+x_3)(x_2+x_3)}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 - 4x^2 + 3x + 3 = 0$.

3. $x^3 - 4x + 2 = 0$; $n = 7$.

4. $(x_1^2 - 2x_2x_3)(x_2^2 - 2x_1x_3)(x_3^2 - 2x_1x_2)$.

5. $\begin{cases} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 3; \\ \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2x_3} = 3; \\ \frac{1}{x_1x_2x_3} = 1. \end{cases}$

Варіант 15

1. $y_1 = \frac{x_3}{x_1+x_2},\ y_2 = \frac{x_1}{x_2+x_3},\ y_3 = \frac{x_2}{x_1+x_3}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 - ax^2 - bx - c = 0$.

2. $f(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_3}{(x_1^2-x_2x_3)(x_2^2-x_1x_3)} + \frac{x_1}{(x_2^2-x_1x_3)(x_3^2-x_1x_2)} + \frac{x_2}{(x_1^2-x_2x_3)(x_3^2-x_1x_2)}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 - 4x^2 + 2x - 5 = 0$.

3. $x^3 - 2x^2 + 5 = 0$; $n = 6$.

4. $(x_1 + x_2 - 2x_3)^3 + (x_1 - 2x_2 + x_3)^3 + (-2x_1 + x_2 + x_3)^3$.

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 92; \\ xy + 2x + 2y = 56. \end{cases}$

Варіант 16

1. $y_1 = \frac{x_1+x_2}{x_3^2},\ y_2 = \frac{x_1+x_3}{x_2^2},\ y_3 = \frac{x_2+x_3}{x_1^2}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$.

2. $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{(x_2-1)(x_3-1)}{x_1^2} + \dfrac{(x_1-1)(x_3-1)}{x_2^2} + \dfrac{(x_1-1)(x_2-1)}{x_3^2}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$.

3. $x^3 + x - 2 = 0$; $n = 7$.

4. $(x_1 + x_2 - 3x_3)^3 + (x_1 - 3x_2 + x_3)^3 + (-3x_1 + x_2 + x_3)^3$.

5. $\begin{cases} 2(x + y) = 5xy; \\ 8(x^3 + y^3) = 65. \end{cases}$

Варіант 17

1. $y_1 = x_1^2 - x_2x_3,\ y_2 = x_2^2 - x_1x_3, y_3 = x_3^2 - x_1x_2$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

2. $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1^2}{x_1-2} + \dfrac{x_2^2}{x_2-2} + \dfrac{x_3^2}{x_3-2}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 - x^2 + x - 4 = 0$.

3. $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$; $n = 6$.

4. $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$.

5. $\begin{cases} x + y + z = 9; \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1; \\ xy + xz + yz = 27. \end{cases}$

Варіант 18

1. $y_1 = x_1^3,\ y_2 = x_2^3,\ y_3 = x_3^3$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

2. $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{(x_1+x_2)^3}{x_1x_2} + \dfrac{(x_1+x_3)^3}{x_1x_3} + \dfrac{(x_2+x_3)^3}{x_2x_3}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 - 4x^2 + x + 7 = 0$.

3. $x^4 + x^3 + 2 = 0$; $n = 5$.

4. $x_1^3(x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + x_2^3(x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4) + x_3^3(x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_4) + x_4^3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.

5. $\begin{cases} 4(x + y) = 3xy; \\ x + y + x^2 + y^2 = 26. \end{cases}$

Варіант 19

1. $y_1 = x_1^2 + x_2x_3\ \ y_2 = x_2^2 + x_1x_3,\ y_3 = x_3^2 + x_1x_2$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

2. $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{(x_1-x_3)^2}{x_1+x_3} + \dfrac{(x_3-x_2)^2}{x_3+x_2} + \dfrac{(x_2-x_1)^2}{x_2+x_1}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 - 6x^2 + x - 2 = 0$.

3. $x^3 + x^2 + 4 = 0$; $n = 6$.

4. $(x_1 + x_2)x_1^2x_2^2 + (x_1 + x_3)x_1^2x_3^2 + (x_2 + x_3)x_2^2x_3^2$.

5. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 8; \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$

Варіант 20

1. $y_1 = \frac{1}{x_1^2+1},\ y_2 = \frac{1}{x_2^2+1},\ y_3 = \frac{1}{x_3^2+1}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

2. $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1^3+x_2^3}{x_1x_2} + \dfrac{x_1^3+x_3^3}{x_1x_3} + \dfrac{x_2^3+x_3^3}{x_2x_3}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$.

3. $x^3 + 2x - 6 = 0$; $n = 6$.

4. $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 3x_1^2x_2^2 + 3x_2^2x_3^2 + 3x_3^2x_1^2$.

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6; \\ x^3 + y^3 + z^3 - xyz = -4; \\ xy + yz + xz = -3. \end{cases}$

Варіант 21

1. $y_1 = 2-(x_1+x_2),\ y_2 = 2-(x_1+x_3),\ y_3 = 2-(x_2+x_3)$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$.

2. $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1^2-x_2x_3}{x_1}+\dfrac{x_2^2-x_1x_3}{x_2}+\dfrac{x_3^2-x_1x_2}{x_3}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3+2x^2+2x-1=0$.

3. $x^3-x+7=0$; $n=7$.

4. $x_1^3(x_2+x_3+x_4)+x_2^3(x_1+x_3+x_4)+x_3^3(x_1+x_2+x_4)+x_4^3(x_1+x_2+x_3)$.

5. $\begin{cases} x+y+xy=7; \\ x^2+y^2+xy=13. \end{cases}$

Варіант 22

1. $y_1 = \frac{1}{x_1}+x_2x_3,\ y_2 = \frac{1}{x_2}+x_1x_3, y_3 = \frac{1}{x_3}+x_1x_2$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3+bx^2+cx+d=0$.

2. $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1+1}{x_1^2}+\dfrac{x_2+1}{x_2^2}+\dfrac{x_3+1}{x_3^2}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3-x^2+4x-3=0$.

3. $x^4+3x-2=0$; $n=5$.

4. $x_1^2x_2^2(x_1^2+x_2^2)+x_1^2x_3^2(x_1^2+x_3^2)+x_2^2x_3^2(x_2^2+x_3^2)$.

5. $\begin{cases} x+y+z=0; \\ x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3; \\ xyz=2. \end{cases}$

Варіант 23

1. $y_1 = x_1+x_2-1,\ \ y_2 = x_1+x_3-1,\ y_3 = x_2+x_3-1$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3+ax^2+bx+c=0$.

2. $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1+1}{x_2x_3+1}+\dfrac{x_2+1}{x_1x_3+1}+\dfrac{x_3+1}{x_1x_2+1}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $2x^3+x^2-3x-2=0$.

3. $x^3+2x^2+1=0$; $n=7$.

4. $x_1x_2(x_1^3+x_2^3)+x_1x_3(x_1^3+x_3^3)+x_2x_3(x_2^3+x_3^3)$.

5. $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=10; \\ (xy-1)(x+y)=3. \end{cases}$

Варіант 24

1. $y_1 = \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2},\ y_2 = \frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3},\ y_3 = \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_3}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3+bx^2+cx+d=0$.

2. $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1^3+x_2^3}{x_3}+\dfrac{x_1^3+x_3^3}{x_2}+\dfrac{x_2^3+x_3^3}{x_1}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3+x^2-5x-7=0$.

3. $x^3+2x^2+3=0$; $n=6$.

4. $x_1^3(x_2+x_3)+x_2^3(x_1+x_3)+x_3^3(x_1+x_2)$.

5. $\begin{cases} x+y+z=6; \\ xy+yz+zx=11; \\ (x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2=4. \end{cases}$

Варіант 25

1. $y_1 = \frac{1}{x_1^2-1},\ y_2 = \frac{1}{x_2^2-1},\ y_3 = \frac{1}{x_3^2-1}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3-ax^2-bx-c=0$.

2. $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1^2+x_2^2-x_1x_2}{x_3}+\dfrac{x_1^2+x_3^2-x_1x_3}{x_2}+\dfrac{x_2^2+x_3^2-x_2x_3}{x_1}$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3-4x^2+3x+1=0$.

3. $x^4-x^2+2=0$; $n=5$.

4. $x_1^3x_2^3+x_1^3x_3^3+x_2^3x_3^3+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^3$.

5. $\begin{cases} x^5+y^5=33; \\ x+y=3. \end{cases}$

Список літератури

[1] Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1971. – 432 с.

[2] Винберг Э. Б. Симметрия многочленов/ Э. Б. Винберг. – М. : Изд-во МЦНМО, 2001. – 24 с.

[3] Болтянский В. Г. Симметрия в алгебре / В. Г. Болтянский, Н. Я. Виленкин. – М. : Изд-во МЦНМО, 2002. – 240 с.

[4] Мишина А. П. Справочная математическая библиотека. Высшая алгебра / А. П. Мишина, И. В. Проскуряков. – М. : Физматгиз, 1962. – 300 с.

[5] Фаддеев Д. К. Сборник задач по высшей алгебре / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. – М. : Гостехиздат, 1955. – 288 с.

Навчальне видання

Гиря Наталія Петрівна
Полякова Людмила Юріївна

СИМЕТРИЧНІ МНОГОЧЛЕНИ

Навчально-методичний посібник з алгебри
для студентів І курсу механіко-математичного факультету

Комп'ютерне верстання *Н. П. Гиря*
Коректор *Л. Є. Стешенко*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат $60 \times 84/16$. Ум. друк. арк. 1,16. Тираж 100 пр. Зам. № 266/11.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
61022, м. Харків, пл. Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна.
Тел. 705-24-32