Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Н. П. Гиря
Л. Ю. Полякова

ВИЗНАЧНИКИ

Навчально-методичний посібник з алгебри
для студентів I курсу механіко-математичного факультету

Харків — 2012

УДК 519.612(075.8)
ББК 22.143я73
Г51

Рецензенти:

Б. В. Новіков — доктор фізико-математичних наук, професор, провідний науковий співробітник механіко-математичного факультету Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна;

Н. Д. Парфьонова — кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики фізичного факультету Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

Затверджено до друку рішенням Науково-методичної ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 4 від 11.05.12)

Гиря Н. П.

Г51 Визначники : навчально-методичний посібник з алгебри для студентів І курсу механіко-математичного факультету/ Н. П. Гиря, Л. Ю. Полякова. – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2012. – 32 с.

Методичні вказівки за темою «Визначники» призначені надати допомогу студентам І курсу при вивченні методів обчислення визначників та під час виконання завдань модульного контролю за відповідним розділом курсу вищої алгебри.

УДК 519.612(075.8)
ББК 22.143я73

Вступ

Вперше ідея визначника виникла в Г. В. Лейбниця. 1693 р. у листі до Г. Лопиталя Лейбниць виклав спосіб виключення змінних у системі з трьох рівнянь із двома невідомими та вказав умову сумісності такої системи. У сучасних термінах ця умова виглядає як рівність нулю визначника, складеного з коефіцієнтів та правих частин системи. 1750 року Г. Крамер встановив та опублікував правило розв'язання систем лінійних рівнянь із буквеними коефіцієнтами, що спирається на обчислення визначників і тепер називається правилом Крамера. Перше велике дослідження визначників було опубліковано О. Вандермондом 1772 р., а в сучасному значенні термін «визначник» ввів О. Коші 1815 р. Операцію множення визначників і матриць описав К. Ф. Гаусс у зв'язку зі знаходженням формул для послідовно застосованих лінійних перетворень змінних. У середині XIX ст. визначники стали потужним засобом математичних досліджень.

У даному навчально-методичному посібнику розглядається одна з центральних тем курсу вищої алгебри. Визначники використовуються як у самій алгебрі: для розв'язання й дослідження систем лінійних рівнянь, перевірки лінійної незалежності векторів, знаходження власних значень лінійних операторів, дослідження квадратичних форм на знаковизначеність тощо, так і в інших розділах математики. Наприклад, в аналітичній геометрії визначники виникають при обчисленні векторного та мішаного добутку векторів, знаходженні інваріантів кривих та поверхонь другого порядку, в рівняннях прямих, площин, інших ліній і поверхонь. У математичному аналізі виникають функціональні визначники, у тому числі якобіан, за допомогою якого досліджують функціональну залежність. Тому оволодіння методами обчислення визначників є необхідною умовою успіху при розв'язанні багатьох математичних задач.

У навчально-методичному посібнику зібрані основні визначення й факти, що стосуються теми «Визначники». Ми вважаємо, що студенти вже знайомі з поняттям підстановки та її парності. Основна увага приділяється різним методам обчислення визначників, при цьому ми не торкаємося застосувань визначників, які традиційно відносять до інших тем курсу алгебри. Наведені приклади розв'язання задач допоможуть засвоїти всі методи на практиці. Знак ■ позначає кінець розібраного прикладу. Питання для самоперевірки дозволять студентам оцінити, наскільки добре засвоєні основні поняття цієї теми. Також посібник містить 25 варіантів індивідуальних завдань для здійснення модульного контролю.

1. Визначники та їхні властивості

Поняття визначника

Нехай дано квадратну матрицю порядку n з елементами з деякого поля F:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.1)$$

Визначником (детермінантом) матриці A називається значення виразу

$$\sum_{\sigma}(-1)^{I(\sigma)}a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\dots a_{n\sigma_n},$$

у якому сума береться за всіма підстановками $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$, а $I(\sigma)$ означає число інверсій у підстановці σ.

Доданки суми називають *членами* визначника, їхнє число дорівнює кількості різних підстановок n елементів, тобто $n!$. Кожен член визначника є добутком n елементів матриці A, узятих по одному з кожного рядка й кожного стовпця. Член входить у суму зі знаком плюс, якщо підстановка, складена з індексів його співмножників, парна, та зі знаком мінус, якщо ця підстановка непарна. *Порядком* визначника називають порядок відповідної матриці. Подання визначника у вигляді суми членів називають також *розгорнутим виглядом визначника.*

Надалі ми припускаємо, що поле F — це поле комплексних або дійсних чисел, і називаємо його елементи числами. Однак всі властивості й приклади нескладно перенести на випадок довільного поля.

Для визначника матриці A використовують наступні позначення:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}|.$$

Приклад 1. *Виписати всі члени визначника п'ятого порядку $|a_{ij}|$, які містять добуток $a_{12}a_{35}$ і входять у його розгорнутий вигляд зі знаком плюс.*

Нехай $a_{12}a_{35}$ входить у член $a_{12}a_{2i}a_{35}a_{4j}a_{5k}$. Оскільки індекси елементів визначника, що містяться в одному члені, утворять підстановку, то числа i, j, k повинні бути перестановкою чисел $1, 3, 4$. Із шести можливих підстановок індексів три є парними, а саме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому шуканими членами визначника є $a_{12}a_{21}a_{35}a_{44}a_{53}$, $a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$ й $a_{12}a_{24}a_{35}a_{43}a_{51}$. ■

Приклад 2. *Знайти члени, що містять x^4 й x^3, у розгорнутому вигляді визначника*

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & x & -3x \\ 4 & 5 & -x & 2 \\ 3 & -2x & 4x & 1 \\ x & -3 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Зауважимо, що до елементів кожного з рядків визначника x входить щонайбільше у першому степені, тому x^4 містить лише той член визначника, до якого входять елементи рядків, що містять x, тобто $(-3x)(-x)(-2x)x = -6x^4$. Оскільки індекси елементів цього члена утворюють парну підстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, то до розгорнутого вигляду визначника він входить зі своїм знаком. Випишемо члени визначника, що містять x^3:

Добуток	Підстановка індексів	Знак	Член визначника
$2x(-2x)x$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$-$	$4x^3$
$(-3x)5 \cdot 4x \cdot x$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$-$	$60x^3$

■

Найпростіші властивості визначників

Транспонуванням матриці (визначника) називається операція, при якій стовпці початкової матриці (визначника) записуються у рядки, а рядки — у стовпці нової матриці (визначника) зі збереженням порядку. Транспонування матриці (1.1) дає матрицю

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{n2} \\ & & \dots & \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

Зауважимо, що транспонований визначник містить ті ж члени, що й початковий, причому знак кожного члена визначається парністю такої підстановки індексів, що є оберненою до підстановки індексів члена початкового визначника. Оскільки парність підстановки й оберненої до неї збігаються, ми одержуємо наступну властивість:

Твердження 1.1. *Визначник не змінюється при транспонуванні.*

Твердження 1.1, зокрема, означає, що всі властивості, які справедливі для рядків визначника, виконуються також для стовпців цього визначника. Тому надалі ми будемо формулювати властивості тільки для рядків.

Твердження 1.2. *Якщо всі елементи одного з рядків визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.*

Дійсно, одним із множників кожного члена визначника з нульовим рядком є нуль, тобто визначник дорівнює нулю.

Якщо два рядки визначника поміняти місцями, то в підстановці індексів кожного члена відбудеться одна транспозиція, отже, підстановка змінить знак, тому справедливим є

Твердження 1.3. *Якщо два рядки визначника поміняти місцями, то визначник змінить знак.*

Приклад 3. *Як зміниться визначник, якщо записати його стовпці у зворотному порядку?*

Нехай порядок визначника дорівнює n. Поміняємо місцями останній стовпець визначника з усіма попередніми. Після цього останній стовпець (той, що раніше був передостаннім) переставимо місцями з усіма стовпцями, крім першого, і т. д. Усього буде зроблено

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\tfrac{n(n-1)}{2}$$

обмінів. Тому в силу твердження 1.3 отриманий визначник відрізняється від початкового знаком $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. ■

Якщо визначник містить два однакові рядки, то, помінявши їх місцями, ми не змінимо визначник. З іншого боку, в силу твердження 1.3 визначник має змінити знак. Тому правильним є

Твердження 1.4. *Якщо визначник містить два однакові рядки, то він дорівнює нулю.*

Твердження 1.5. *Якщо всі елементи одного з рядків визначника помножити на одне й те саме число, то весь визначник також помножиться на це число.*

Ця властивість випливає з того, що при множенні елементів рядка на одне й те саме число на це ж число множиться й кожен член визначника. Твердження 1.5 часто використовують у такий спосіб: якщо всі елементи одного з рядків визначника мають спільний множник, то цей множник виносять за знак визначника. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 2a & 3a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Приклад 4. *Як зміниться визначник, якщо кожен його елемент a_{ij} помножити на c^{i-j}, $c \neq 0$?*

Нехай $\Delta = |a_{ij}|$ — початковий визначник. Тоді

$$|c^{i-j}a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & c^{-1}a_{12} & c^{-2}a_{13} & & c^{-(n-1)}a_{1n} \\ ca_{21} & a_{22} & c^{-1}a_{23} & & c^{-(n-2)}a_{2n} \\ & & & \cdots & \\ c^{n-1}a_{n1} & c^{n-2}a_{n2} & c^{n-3}a_{n3} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Винесемо з k-го рядка множник $c^{-(n-k)}$ $(k=1,\dots,n)$. Потім винесемо з k-го стовпця множник c^{n-k} $(k=1,\dots,n)$ й одержимо, що визначник $|c^{i-j}a_{ij}|$ дорівнює початковому. ■

Наслідком твердження 1.4, 1.5 є наступна властивість:

Твердження 1.6. *Якщо визначник містить два пропорційні рядки, то він дорівнює нулю.*

Сумою двох рядків, що містять елементи $a_1,\dots,a_n$ й $b_1,\dots,b_n$, назвемо рядок, що складається з елементів $a_1+b_1,\dots,a_n+b_n$.

Твердження 1.7. *Нехай k-й рядок визначника є сумою двох рядків: $a_1+b_1,\dots,a_n+b_n$. Тоді визначник може бути розкладений у суму двох визначників, усі рядки яких, крім k-го, збігаються з відповідними рядками початкового визначника, а k-ті рядки дорівнюють $a_1,\dots,a_n$ й $b_1,\dots,b_n$ відповідно.*

Наприклад, $\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Із двох попередніх тверджень безпосередньо випливає

Твердження 1.8. *Якщо до рядка визначника додати інший його рядок, помножений на будь-яке число, то визначник не зміниться.*

Лінійною комбінацією рядків $a_{11}, \dots, a_{1n}$, $a_{21}, \dots, a_{2n}$, $a_{k1}, \dots, a_{kn}$ назвемо усякий рядок вигляду

$$\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_k a_{k1},\ \dots,\ \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots + \lambda_k a_{kn},$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — деякі числа.

Сума декількох рядків — це лінійна комбінація цих рядків, усі коефіцієнти якої дорівнюють 1.

Якщо один з рядків визначника є лінійною комбінацією інших, то за твердженням 1.7 визначник може бути розкладений у суму декількох визначників із пропорційними рядками, а тоді з твердження 1.6 випливає наступна властивість:

Твердження 1.9. *Якщо один з рядків визначника є лінійною комбінацією інших рядків цього визначника, то визначник дорівнює нулю.*

Приклад 5. *Обчислити визначник* $\begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 & \cos^2 x \\ \sin^2 y & 1 & \cos^2 y \\ \sin^2 z & 1 & \cos^2 z \end{vmatrix}$.

Оскільки другий стовпець визначника є сумою першого та третього, то визначник дорівнює нулю. ■

Приклад 6. *Знайти значення кососиметричного визначника непарного порядку, тобто визначника $|a_{ij}|$, елементи якого задовольняють умову: $a_{ij} + a_{ji} = 0$ $(1 \le i, j \le n)$.*

Запишемо загальний вигляд кососиметричного визначника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & & a_{2n} \\ & & \dots & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & & 0 \end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

Розглянемо визначник Δ^t. З одного боку, при транспонуванні елементи кожного рядка визначника змінюють знак, з іншого — визначник не повинен змінитися. Тому $(-1)^n \Delta = \Delta^t = \Delta$. Оскільки n — непарне число, то $\Delta = 0$. ■

Докладніше ознайомитися з матеріалом цього параграфа можна в [1, Гл. 3, §1], [2, Гл. 1, §4], [4, Гл. 1, §1.1.2].

2. Обчислення визначників

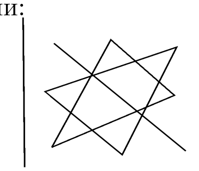
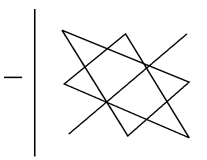
Визначники малих порядків

Визначники порядків 2 та 3 можна обчислити, подавши в розгорнутому вигляді:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \tag{2.1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{2.2}$$

Виписуючи розгорнутий вигляд визначника третього порядку, користуються правилом трикутників, яке стверджує, що елементи, які входять в один член визначника із зазначеним знаком, з'єднано на наступних малюнках лініями:

+  − 

Інше правило виписування розгорнутого вигляду визначника порядку 3 полягає в наступному: під визначником підписують два його перші рядки, після чого зі знаком плюс виписують добуток елементів головної діагоналі й добутки елементів, розташованих уздовж прямих, паралельних до головної діагоналі. Зі знаком мінус — добуток елементів побічної діагоналі й елементів, розташованих уздовж прямих, паралельних до побічної діагоналі так, як показано на малюнку:

$$+\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad -\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Приклад 7. *Обчислити визначники.*

$$1) \begin{vmatrix} a+1 & a \\ a & a+1 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

Обчислимо визначники, подавши їх у розгорнутому вигляді:

1) $\begin{vmatrix} a+1 & a \\ a & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2 - a^2 = 2a+1;$

2) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 24 - 3 + 12 + 4 - 8 - 27 = 2;$

3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = acb + bac + cba - c^3 - b^3 - a^3 = 3abc - a^3 - b^3 - c^3.$ ■

Зведення до трикутного вигляду

Визначники вигляду

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{й} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називають відповідно *верхньо- та нижньотрикутним.* Кожний з цих визначників дорівнює добутку елементів головної діагоналі $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$. Дійсно, усякий інший член визначника містить нульовий елемент, а отже, дорівнює нулю.

Усякий числовий визначник можна звести до трикутного визначника, перетворюючи його рядки відповідно до твердження 1.8.

Приклад 8. *Обчислити визначники.*

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}; \ 2) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \ 3) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & & 2 \\ 2 & 3 & 2 & & 2 \\ 2 & 2 & 3 & & 2 \\ & & & \dots & \\ 2 & 2 & 2 & & 3 \end{vmatrix}.$$

1) Помноживши перший рядок на -1, додамо його до кожного з інших рядків (рівність I). В силу твердження 1.8 визначник при цьому не зміниться. Потім додамо до четвертого рядка другий, помножений на -1 (рівність II). Одержуємо

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{I}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{II}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Отже, шуканий визначник дорівнює $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$.

2) Нехай Δ — початковий визначник. Помножимо другий і четвертий його рядки на 2, при цьому Δ помножиться на 4 (рівність I). Далі помножимо перший рядок на -3, -2, -5 і додамо його до другого, третього, четвертого рядків відповідно (рівність II). Згідно з твердженням 1.8 визначник не зміниться, тому

$$\Delta \overset{\mathrm{I}}{=} \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & -2 & 8 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \\ 10 & -6 & 4 & 6 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{II}}{=} \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -14 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 9 & -16 & -4 \end{vmatrix}.$$

Помноживши третій рядок на -1, додамо його до другого рядка, після чого помножимо другий рядок на -4 й -9 та додамо до третього й четвертого рядків відповідно (рівність III). Зауважимо, що ми перетворили другий рядок для того, щоб зручніше було робити обчислення в третьому та четвертому рядках.

$$\Delta \overset{\mathrm{III}}{=} \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 31 & -3 \\ 0 & 0 & 65 & -13 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{IV}}{=} -\frac{1}{4 \cdot 3} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & -208 \end{vmatrix}.$$

В останньому перетворенні ми змінили порядок третього й четвертого стовпця (визначник змінив при цьому знак), а потім до четвертого рядка, помноженого на 3, додали третій рядок, помножений на -13 (рівність IV). Таким чином, $\Delta = -\frac{2 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (-208)}{4 \cdot 3} = -104$.

3) Нехай n — порядок початкового визначника. Віднімемо з кожного рядка визначника, крім першого, попередній рядок. Далі послідовно додамо до $(n-1)$-го стовпця n-й, до $(n-2)$-го — $(n-1)$-й і т.д., нарешті, до першого стовпця додамо другий стовпець. Одержуємо

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+2(n-1) & 2(n-1) & & 4 & 2 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 3 + 2(n-1) = 2n+1.$ ■

Розкладання визначника за рядком. Теорема Лапласа

Нехай $\Delta = |a_{ij}|$ — визначник порядку n, у якому обрано k рядків та k стовпців. Елементи визначника, що стоять на перетині обраних рядків і стовпців, утворюють квадратну матрицю порядку k, визначник якої називається *мінором* k-го порядку визначника Δ. Мінори першого порядку — це елементи визначника, а мінор порядку n — визначник Δ.

Доповнюючим мінором для мінору M у визначнику Δ називається визначник матриці, отриманої викреслюванням з Δ всіх рядків і стовпців мінору M. Якщо M має порядок k, то його додатковий мінор має порядок $n-k$.

Нехай мінор M розташовано на перетині рядків з номерами $i_1, \dots, i_k$ та стовпців з номерами $j_1, \dots, j_k$, а M' — доповнюючий мінор для M. *Алгебраїчним доповненням* мінору M називається число $A_M = (-1)^S M'$, де $S = (i_1 + \dots + i_k) + (j_1 + \dots + j_k)$.

Обчислимо алгебраїчне доповнення мінору $M = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$, розташованого у перших двох рядках, другому й третьому стовпцях визначника 2) з прикладу 8:

$$A_M = (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -13.$$

Твердження 2.1. (Розкладання визначника за рядком або стовпцем). *Нехай A_{ij} — алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} визначника $\Delta = |a_{ij}|$. Для всіх $1 \le i, j \le n$*

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}; \qquad (2.3)$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \qquad (2.4)$$

Приклад 9. *Обчислити визначники*

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & b \\ 1 & a & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ x & y & z & t \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

1) Розкладемо визначник за другим стовпцем, а потім результат — за останнім стовпцем й одержимо

$$(-1)^{3+2} a \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & b \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-a)(-b) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = ab.$$

2) Розкладаючи визначник за третім рядком, одержуємо

$$x \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} - t \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 10x + 16y + t. \quad \blacksquare$$

Припустимо, що, перетворюючи рядки визначника, ми одержали в деякому стовпці всі елементи, крім одного, рівними нулю, подібно до того, як це робиться при використанні методу зведення до трикутного вигляду. Зауважимо, що, розкладаючи тепер отриманий визначник за цим стовпцем, ми зможемо звести обчислення початкового визначника до обчислення визначника на одиницю меншого порядку.

Приклад 10. *Обчислити визначник 1) прикладу 8, знижуючи його порядок.*

Помноживши перший рядок на -1, додамо його до кожного з інших рядків (рівність I). Потім розкладемо визначник за першим стовпцем (рівність II). Отриманий визначник порядку 3 обчислимо, подавши в розгорнутому вигляді (рівність III):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{I}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{II}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{III}}{=} 4. \quad \blacksquare$$

Узагальненням формул 2.3, 2.4 є наступна теорема.

Теорема 2.2. (Лапласа). *Нехай у визначнику Δ порядку n обрано k рядків (стовпців), $1 \le k \le n-1$. Сума добутків усіх мінорів порядку k, що містяться в обраних рядках, на їхні алгебраїчні доповнення дорівнює визначнику Δ.*

Приклад 11. *Обчислити визначник* $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Розглянемо перший та другий рядки визначника. Єдиний ненульовий мінор, що міститься в цих рядках, — це мінор $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$. Тому за теоремою Лапласа маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-18) = -72. \quad \blacksquare$$

Розглянемо так званий *блочнотрикутний визначник*, тобто визначник вигляду

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & * & & * \\ 0 & A_2 & & * \\ 0 & 0 & \dots & * \\ 0 & 0 & & A_n \end{vmatrix},$$

у якому $A_1, A_2, \dots, A_n$ — квадратні матриці, головні діагоналі яких — це ділянки головної діагоналі визначника Δ. З теореми Лапласа випливає, що $\Delta = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdots \det A_n$.

Метод виділення лінійних множників

Метод виділення лінійних множників застосовують у тому випадку, коли визначник є многочленом від однієї змінної деякого степеня k, і всі корені цього многочлена можна знайти, не записуючи визначник у розгорнутому вигляді.

Приклад 12. *Обчислити визначники.*

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3-x^2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 7-x^2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}.$$

1) Нехай початковий визначник дорівнює $f(x)$. Очевидно, $\deg f(x) = 4$. Зауважимо також, що при $x = \pm 1$ другий рядок визначника збігається з першим, отже, ± 1 — корінь $f(x)$, а при $x = \pm 2$ третій рядок збігається із четвертим, тобто ± 2 — два інші корені $f(x)$. Отже, маємо $f(x) = c(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$, де c — коефіцієнт многочлена при x^4. Два члени визначника містять x^4 — це $3\cdot(3-x^2)(7-x^2)\cdot 2$ та $(-3)\cdot 1\cdot(3-x^2)(7-x^2)$. Отже, $c = 6 - 3 = 3$. Тобто $f(x) = 3(x^2-1)(x^2-4)$.

2) Розглянемо визначник як многочлен f від однієї змінної x. Якщо поміняти місцями перші два рядки, а потім перші два стовпці, то визначник не змінить знаку. З іншого боку, ми одержимо визначник $f(-x)$. Отже, $f(x)$ — парний многочлен другого степеня за x. Оскільки $x = 0$, очевидно, є його коренем, то $f(x) = cx^2$, де коефіцієнт c залежить від y і не залежить від x. Аналогічне міркування щодо змінної y показує, що шуканий визначник дорівнює x^2y^2 (числовий коефіцієнт при цьому добутку дорівнює 1). ■

Метод рекурентних співвідношень

Суть методу рекурентних співвідношень полягає в тому, щоб виразити визначник Δ_n порядку n через визначники того ж вигляду, але меншого порядку, перетворюючи його або розкладаючи за рядком (стовпцем). Одержавши рекурентне співвідношення для послідовності визначників $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ та, при необхідності, обчисливши кілька перших членів цієї послідовності, знаходять формулу загального члена Δ_n, розв'язуючи рекурентне рівняння.

Приклад 13. *Обчислити визначник 3) прикладу 8 за допомогою методу рекурентних співвідношень.*

Представимо число 3 у нижньому рядку у вигляді $3 = 2 + 1$ та розкладемо вихідний визначник Δ_n у суму двох:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & & 2 \\ 2 & 3 & 2 & & 2 \\ 2 & 2 & 3 & & 2 \\ & & & \dots & \\ 2 & 2 & 2 & & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & & 0 \\ 2 & 3 & 2 & & 0 \\ 2 & 2 & 3 & & 0 \\ & & & \dots & \\ 2 & 2 & 2 & & 1 \end{vmatrix}.$$

Віднімаючи в першому визначнику останній стовпець з усіх інших, знаходимо, що цей визначник дорівнює 2. Розкладаючи другий визначник за останнім стовпцем, одержуємо $\Delta_n = 2 + \Delta_{n-1}$. Таким чином, послідовність визначників $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ є арифметичною прогресією, перший член якої дорівнює 3, а різниця дорівнює 2. Отже, $\Delta_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$. ■

Множення визначників

Добутком квадратних матриць $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$ порядку n називається матриця $C = (c_{ij})$ того ж порядку, елементи якої обчислюються за правилом:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Оскільки елемент c_{ij} отримано множенням елементів i-го рядка матриці A на j-й стовпець матриці B, говорять, що матрицю C отримано множенням рядків матриці A на стовпці матриці B.

Для визначника добутку матриць справедлива наступна теорема:

Теорема 2.3. *Нехай A, B — квадратні матриці порядку n. Тоді* $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Приклад 14. *Обчислити визначники.*

1) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ & & \dots & \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}$.

1) Нехай D — шуканий визначник. Обчислимо квадрат цього визначника. Маємо

$$D^2 = D\cdot D^t = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix}.$$

Перемножуючи за правилом «рядок на стовпець», одержуємо визначник, всі елементи головної діагоналі якого дорівнюють $a^2+b^2+c^2+d^2$, а елементи поза головною діагоналлю — нулі. Тому

$$D^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4.$$

Звідси $D=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$, оскільки a^4, очевидно, входить в D зі знаком плюс.

2) Позначимо шуканий визначник через D_n. Зауважимо, що $D_1 = \cos(\alpha_1-\beta_1)$. При $n\geq 2$ подамо D_n у вигляді добутку визначників:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 0 & & 0 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & 0 & & 0 \\ & & & \dots & \\ \cos\alpha_n & \sin\alpha_n & 0 & & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & & \cos\beta_n \\ \sin\beta_1 & \sin\beta_2 & & \sin\beta_n \\ 0 & 0 & & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix}.$$

Отже, $D_2 = \sin(\alpha_2-\alpha_1)\sin(\beta_2-\beta_1)$, і $D_n=0$ при $n\geq 3$, оскільки в цьому випадку кожний із множників містить нульовий рядок або стовпець, тобто дорівнює нулю. ■

Докладніше ознайомитися з матеріалом цього параграфа можна в [2, Гл. 1, §§2, 5, 6], [1, Гл. 1, §1, Гл. 3, §2], [3, §§1.4, 1.5, 1.11], [4, Гл. 1, §1.1.3], [5, Отд.1, §5].

3. Визначники спеціального вигляду

Визначник Вандермонда

Визначником Вандермонда називається визначник вигляду

$$W(x_1,x_2,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^{n-1} \\ & & & \dots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-1} \end{vmatrix}, \qquad (3.1)$$

а також транспонований до нього. Обчислимо визначник (3.1), подавши його як многочлен степеня $n-1$ від змінної x_n. Очевидно, що для всіх $j=1,\dots,n-1$ при $x_n=x_j$ визначник дорівнює нулю. Зауважимо також, що старшим коефіцієнтом многочлена буде алгебраїчне доповнення елемента x_n^{n-1}, тобто $W(x_1,\dots,x_{n-1})$. Отже, $W(x_1,x_2,\dots,x_n) = W(x_1,\dots,x_{n-1})(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})$.

Проведемо аналогічні міркування для всіх визначників $W(x_1,\dots,x_k)$, де $k=n-1,n-2,\dots,2$ й одержимо формулу для обчислення визначника Вандермонда:

$$W(x_1,x_2,\dots,x_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i). \qquad (3.2)$$

Приклад 15. *Обчислити визначник* $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 25 & 9 & 16 \\ 8 & 125 & -27 & 64 \end{vmatrix}$.

Позначимо початковий визначник Δ. Переставивши місцями перші два рядки Δ, ми одержимо визначник Вандермонда. Таким чином,

$$\Delta = -W(2,4,-3,5) = -(4-2)(4-5)(4+3)(-3-5)(-3-2)(5-2) =$$
$$= -2\cdot(-1)\cdot 3\cdot 7\cdot(-8)\cdot(-5)\cdot 3 = 1680. \quad ■$$

Приклад 16. *Обчислити визначники.*

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & & n \\ 1 & 2^3 & & n^3 \\ & & \dots & \\ 1 & 2^{2n-3} & & n^{2n-3} \\ 1 & 2^{2n-1} & & n^{2n-1} \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^{n-2} & x_2^n \\ & & & \dots & & \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$.

1) Виносячи з j-го стовпця число j за знак визначника, одержимо, що шуканий визначник дорівнює

$$n! \cdot W(1, 2^2, \ldots, n^2) = n! \prod_{1 \le j < i \le n} (i^2 - j^2) = n! \prod_{1 \le j < i \le n} (i - j) \prod_{1 \le j < i \le n} (i + j).$$

2) Нехай D — шуканий визначник. Розглянемо допоміжний визначник, що є многочленом від змінної y:

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} & x_2^n \\ & & & \ldots & & & \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & y & y^2 & & y^{n-2} & y^{n-1} & y^n \end{vmatrix}.$$

Розкладаючи $W(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ за останнім рядком, знайдемо, що коефіцієнтом при y^{n-1} є $(-1)^{n+(n-1)} D = -D$. Оскільки

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = (y - x_1) \cdots (y - x_n) \prod_{1 < i \le j < n} (x_j - x_i),$$

а за теоремою Вієта коефіцієнтом многочлена $(y - x_1) \cdots (y - x_n)$ при y^{n-1} слугує сума коренів цього многочлена зі знаком мінус, то одержуємо $D = \prod\limits_{1 < i \le j < n} (x_j - x_i) \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. ■

Визначник Якобі

Визначником Якобі називається визначник вигляду

$$J_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & c_n & a_n \end{vmatrix}. \tag{3.3}$$

Розкладаючи визначник (3.3) за останнім рядком, а потім за останнім стовпцем, одержимо рекурентне співвідношення

$$J_n = a_n J_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1} J_{n-2}, \quad n \ge 3, \tag{3.4}$$

причому $J_1 = a_1$, $J_2 = a_1 a_2 - b_1 c_1$.

Зупинимося на окремому випадку визначника Якобі, у якому $a_j = a$, $b_j = b$, $c_j = c$ для всіх $1 \le j \le n$. У цьому випадку співвідношення (3.4) має вигляд $J_n = a J_{n-1} - bc J_{n-2}$ $(n \ge 3)$, при початкових умовах $J_1 = a$, $J_2 = a^2 - bc$, тобто є лінійним рекурентним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Наведемо спосіб розв'язання лінійних рекурентних рівнянь вигляду

$$J_n = p J_{n-1} + q J_{n-2}, \quad n \ge 3, \tag{3.5}$$

де p, q — незалежні від n числові коефіцієнти, а J_1, J_2 — початкові умови.

Якщо $q = 0$, то $J_n = p J_{n-1}$, тобто послідовність $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ є геометричною прогресією, отже, $J_n = J_1 p^{n-1}$.

Якщо $q \ne 0$, то слід розв'язати квадратне рівняння $x^2 = px + q$. Нехай α, β — його корені.

1. Якщо $\alpha \ne \beta$, то розв'язання рівняння (3.5) має вигляд $J_n = C_1 \alpha^n + C_2 \beta^n$, коефіцієнти якого C_1, C_2 можна знайти з системи лінійних рівнянь

$$J_1 = C_1 \alpha + C_2 \beta; \qquad J_2 = C_1 \alpha^2 + C_2 \beta^2,$$

отриманих підстановкою $n = 1$, $n = 2$ у вираз для J_n.

2. Якщо $\alpha = \beta$, то розв'язання рівняння (3.5) слід шукати у вигляді $J_n = (C_1 + C_2(n-1))\alpha^n$, де коефіцієнти C_1, C_2 визначають із умов

$$J_1 = C_1 \alpha; \qquad J_2 = (C_1 + C_2)\alpha^2.$$

Приклад 17. *Обчислити визначники порядку n.*

$$1) \begin{vmatrix} 8 & 5 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 5 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

1) Нехай J_n — шуканий визначник. При $n \ge 3$ маємо рекурентне співвідношення $J_n = 6J_{n-1} - 5J_{n-2}$, причому $J_1 = 8$, $J_2 = 8 \cdot 6 - 1 \cdot 5 = 43$. Оскільки коренями рівняння $x^2 = 6x - 5$ є числа 1 та 5, то $J_n = C_1 + C_2 \cdot 5^n$, де C_1 та C_2 задовольняють умови

$$C_1 + 5C_2 = 8, \qquad C_1 + 25C_2 = 43.$$

Отже, $C_1 = \frac{7}{4}$, $C_2 = -\frac{3}{4}$ та $J_n = \frac{-3+7\cdot 5^n}{4}$. ■

2) Нехай J_n — шуканий визначник. Тоді в силу (3.4) маємо $J_n = 2J_{n-1} - J_{n-2}$ при $n \geq 3$, $J_1 = 2$, $J_2 = 3$. Цьому рекурентному співвідношенню відповідає рівняння $x^2 = 2x - 1$, що має число 1 коренем другої кратності. Тому розв'язання рекурентного співвідношення має вигляд $J_n = C_1 + C_2(n-1)$, де C_1, C_2 задовольняють умови

$$J_1 = 2 = C_1, \qquad J_2 = 3 = C_1 + C_2.$$

Таким чином, $C_1 = 2$, $C_2 = 1$, і $J_n = 2 + (n-1) = n + 1$.

Циркулянт

Циркулянтом називають визначник вигляду

$$C_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & & a_{n-2} \\ & & & \cdots & \\ a_2 & a_3 & a_4 & & a_1 \end{vmatrix}. \tag{3.6}$$

Справедлива формула

$$C_n = f(\varepsilon_0)f(\varepsilon_1)\cdots f(\varepsilon_{n-1}), \tag{3.7}$$

де $f(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$, а $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$ — всі значення кореня степеня n з одиниці ($k = 0, 1, \ldots, n-1$).

Щоб одержати формулу (3.7), розглянемо добуток циркулянта (3.6) та визначника Вандермонда $W = W(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$. Зауважимо, що добуток k-го рядка циркулянта ($k > 1$) на j-й стовпець визначника Вандермонда в силу рівності $\varepsilon_j^n = 1$ можна подати у вигляді

$$a_{n-k+2} + a_{n-k+3}\varepsilon_j + \cdots + a_n\varepsilon_j^{k-2} + a_1\varepsilon_j^{k-1} + \cdots + a_{n-k+1}\varepsilon_j^n =$$
$$= \varepsilon_j^{k-1}(a_1 + a_2\varepsilon_j + \cdots + a_n\varepsilon_j^{n-1}) = \varepsilon_j^{k-1} f(\varepsilon_j).$$

Отже,

$$C_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & & a_n \\ a_n & a_1 & & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & & a_{n-2} \\ & & \cdots & \\ a_2 & a_3 & & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & & \varepsilon_{n-1} \\ & & \cdots & \\ \varepsilon_0^{n-1} & \varepsilon_1^{n-1} & & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} f(\varepsilon_0) & f(\varepsilon_1) & & f(\varepsilon_{n-1}) \\ \varepsilon_0 f(\varepsilon_0) & \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & & \varepsilon_{n-1} f(\varepsilon_{n-1}) \\ & & \cdots & \\ \varepsilon_0^{n-1} f(\varepsilon_0) & \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & & \varepsilon_{n-1}^{n-1} f(\varepsilon_{n-1}) \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} f(\varepsilon_i) W.$$

Скорочуючи обидві частини на визначник Вандермонда (який не дорівнює нулю, оскільки всі ε_j різні), одержуємо формулу (3.7).

Зазначимо, що визначник вигляду

$$C'_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & & a_2 \\ & & & \cdots & \\ a_n & a_1 & a_2 & & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

може бути зведений до циркулянта C_n зміною порядку рядків з номерами $2, 3, \ldots, n$ на протилежний (див. приклад 3). Таким чином, $C'_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} C_n$.

Приклад 18. *Обчислити визначник*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & b & & b \\ b & a & b & & b \\ & & & \cdots & \\ b & b & b & & a \end{vmatrix}.$$

В силу (3.7) маємо $\Delta = f(\varepsilon_0)\cdots f(\varepsilon_{n-1})$, де $f(x) = a + bx + \cdots + bx^{n-1}$. Для кожного $\varepsilon_j \neq 1$ справедлива рівність

$$f(\varepsilon_j) = a + b(\varepsilon_j + \varepsilon_j^2 + \cdots + \varepsilon_j^{n-1}) = a + b\frac{\varepsilon_j^n - \varepsilon_j}{\varepsilon_j - 1} = a - b,$$

оскільки $\varepsilon_j^n = 1$. Завдяки тому, що для $\varepsilon_0 = 1$ маємо $f(1) = a + (n-1)b$, остаточно одержуємо $\Delta = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$. ■

Докладніше ознайомитися з матеріалом цього параграфа можна в [3, §§1.7, 1.8, 1.12], [4, Гл. 1, §§1.1.5, 1.1.10, 1.1.11].

4. Питання для самоперевірки

1. Які елементи залишаються нерухомими при транспонуванні матриці?
2. З яким знаком входить у розгорнутий вигляд визначника добуток елементів головної діагоналі? побічної діагоналі?
3. Скільки членів входить у розгорнутий вигляд визначника зі знаком плюс? зі знаком мінус?
4. Чи входить добуток $a_{62}a_{16}a_{43}a_{35}a_{21}a_{54}$ у визначник 6-го порядку? З яким знаком?
5. Яких значень мають набувати i й k так, щоб добуток $a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$ входив до розгорнутого вигляду визначника 7-го порядку зі знаком плюс?
6. Скільки мінорів порядку k у визначнику порядку n?
7. Скільки мінорів (всіх можливих порядків) у визначнику третього порядку? n-го порядку?
8. Як зміниться визначник n-го порядку, якщо знаки всіх елементів змінити на протилежні?
9. Як зміниться визначник, якщо всі його елементи помножити на число a?
10. Як зміниться визначник, якщо від його подвоєного першого рядка відняти потроєний другий?
11. Як зміниться визначник порядку n, якщо кожен його елемент a_{ij} помножити на число ij?
12. Як зміниться визначник, якщо записати його стовпці (рядки) в зворотному порядку?
13. Усі елементи визначника з комплексними елементами помножили на одне й те ж саме число $z \in \mathbb{C}$. Визначник не змінився. Чому може дорівнювати z?
14. Чому дорівнює визначник, у якого сума рядків з парними номерами дорівнює сумі рядків з непарними номерами?
15. Чи правильно, що визначник суми двох матриць дорівнює сумі їх визначників?
16. Для квадратних матриць A й B виконана рівність $ABA = A$. Чому може дорівнювати $\det(AB)$?
17. Матриця A задовольняє рівність $A^2 = A$. Чому може дорівнювати визначник матриці A?
18. Якого максимального значення може набувати визначник порядку 3, якщо його елементами є лише нулі й одиниці?
19. Яке максимальне число нулів може бути серед елементів ненульового визначника порядку n?

5. Індивідуальні завдання

1. Обчислити визначник за допомогою
а) зведення до трикутного вигляду;
б) розкладання за стовпцем;
в) теореми Лапласа.
2. Обчислити визначник, знижуючи його порядок.
3. Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.
4. Обчислити визначник зведенням його до визначника Вандермонда.
5. Обчислити визначник. Всюди, де за виглядом визначника не можна довідатися його порядок, передбачається, що порядок дорівнює n.

Варіант 1.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 6 & 7 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 216 & 27 & 64 & 8 \\ 36 & 9 & 16 & 4 \\ 6 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & & x & x \\ x & x+2 & x & & x & x \\ x & x & x+3 & & x & x \\ & & & \dots & & \\ x & x & x & & x+(n-1) & x \\ x & x & x & & x & x+n \end{vmatrix}$

Варіант 2.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 343 & 8 & 64 & 27 \\ 49 & 4 & 16 & 9 \\ 7 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2+x & a_3 & & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+x & & a_{n-1} & a_n \\ & & & \dots & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_{n-1}+x & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_{n-1} & a_n+x \end{vmatrix}$

Варіант 3.

1. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 8 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 125 & 27 & 8 & 64 \\ 25 & 9 & 4 & 16 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_{n-1} & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & a_{n-1} & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & a_{n-1} & a_n \\ & & \dots & & \\ 1 & a_1 & a_2 & a_{n-1}+b_{n-1} & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 & a_{n-1} & a_n+b_n \end{vmatrix}$

Варіант 4.

1. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 5 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 216 & 125 & 64 & 27 \\ 36 & 25 & 16 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & n-1 & n \\ & & \dots & & \\ 1 & 2 & 3 & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$

Варіант 5.

1. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 8 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 8 & 27 & 125 & 216 \\ 4 & 9 & 25 & 36 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & 1 & 1 \\ & & \dots & & \\ 1 & 1 & 1 & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1-n \end{vmatrix}$

Варіант 6.

1. $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & -1 & 4 \\ -3 & -2 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 125 & 27 & 64 & 216 \\ 25 & 9 & 16 & 36 \\ 5 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -n \\ 1 & 1 & -n & 1 \\ & \dots & & \\ 1 & -n & 1 & 1 \\ -n & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Варіант 7.

1. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 2 \\ 6 & -7 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 343 & 8 & 27 & 125 \\ 49 & 4 & 9 & 25 \\ 7 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & x & x \\ x & x+2 & x & x & x \\ x & x & x+4 & x & x \\ & & \dots & & \\ x & x & x & x+2^{n-1} & x \\ x & x & x & x & x+2^n \end{vmatrix}$

Варіант 8.

1. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 8 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 343 & 27 & 64 & 125 \\ 49 & 9 & 16 & 25 \\ 7 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_1+y_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 & x_2+y_2 & x_2 \\ & & \dots & \\ x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} \\ x_n & x_n & x_n & x_n+y_n \end{vmatrix}$

Варіант 9.

1. $\begin{vmatrix} -3 & 7 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ 2 & 9 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & -2 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 12 & 5 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 5 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 216 & 8 & 125 & 343 \\ 36 & 4 & 25 & 49 \\ 6 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ & & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$

Варіант 10.

1. $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -4 & 2 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 2 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 2 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 512 & 216 & 64 & 125 \\ 64 & 36 & 16 & 25 \\ 8 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & \ldots & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Варіант 11.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 4 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 216 & 512 & 64 & 343 \\ 36 & 64 & 16 & 49 \\ 6 & 8 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} a & b & b & b & & b & b & b \\ b & a & b & b & & b & b & b \\ b & b & a & b & & b & b & b \\ & & & & \ldots & & & \\ b & b & b & b & & b & a & b \\ b & b & b & b & & b & b & a \end{vmatrix}$

Варіант 12.

1. $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 2 \\ -8 & 5 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 3 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 3 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 8 & 125 & 64 & 343 \\ 4 & 25 & 16 & 49 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & & n-2 & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$

Варіант 13.

1. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 5 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 5 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 3 & 8 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 27 & 125 & 343 & 512 \\ 9 & 25 & 49 & 64 \\ 3 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 0 & a & a & a & & a & a & a \\ a & 0 & a & a & & a & a & a \\ a & a & 0 & a & & a & a & a \\ & & & & \ldots & & & \\ a & a & a & a & & a & 0 & a \\ a & a & a & a & & a & a & 0 \end{vmatrix}$

Варіант 14.

1. $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & -7 & 2 & 1 \\ 2 & -8 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 3 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 3 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 5 & 8 \end{vmatrix}$ 4.

$\begin{vmatrix} 216 & 343 & 27 & 64 \\ 36 & 49 & 9 & 16 \\ 6 & 7 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1+b & b & b & & b & b \\ b & 2+b & b & & b & b \\ b & b & 3+b & & b & b \\ & & & \ldots & & \\ b & b & b & & (n-1)+b & b \\ b & b & b & & b & n+b \end{vmatrix}$

Варіант 15.

1. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & 1 & -3 \\ -5 & 2 & -4 & -2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 9 & -2 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -5 & 2 \\ -2 & 7 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 6 & 5 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 4 & 9 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 125 & 512 & 216 & 27 \\ 25 & 64 & 36 & 9 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} n & -1 & 0 & & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & & 0 & 0 \\ & & & \ldots & & \\ 2 & 0 & 0 & & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & x \end{vmatrix}$

Варіант 16.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 & 5 \\ 13 & 7 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 6 & -2 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -5 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 6 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 6 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 3 & 9 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 125 & 8 & 27 & -1 \\ 25 & 4 & 9 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & n-3 & & 3 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & a & 1 \end{vmatrix}$

Варіант 17.

1. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & -2 \\ 6 & 4 & 8 & 13 \\ 3 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & -5 & 7 & -1 \\ -1 & 7 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & & 0 & 0 \\ & & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & & -2 & 1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 64 & 8 & 125 & -1 \\ 25 & 4 & 25 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & & a_2-b_n \\ & & \ldots & \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & & a_n-b_n \end{vmatrix}$

Варіант 18.

1. $\begin{vmatrix} -5 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} -4 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 6 & -5 & -2 \\ 2 & -8 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 9 & -1 & 0 & & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & & 0 & 0 \\ & & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & & 5 & 4 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -8 & 4 & -2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & & x^2 & x & 1 \\ x^{n-1} & x^{n-2} & & x & 1 & 1 \\ & & \ldots & & & \\ x & 1 & & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Варіант 19.

1. $\begin{vmatrix} -2 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & 0 & 1 \\ -1 & -7 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 6 & 3 & -5 \\ 4 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 2 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 9 & 2 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 7 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ 4.

$\begin{vmatrix} -8 & 4 & -2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \\ 125 & 25 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & & 1 \\ 2 & x_1 & 0 & & 0 \\ 2 & 0 & x_2 & & 0 \\ & & & \ldots & \\ 2 & 0 & 0 & & x_n \end{vmatrix}$

Варіант 20.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 8 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -5 & 1 \\ 9 & -1 & -15 & 3 \\ -3 & 7 & 30 & 4 \\ 2 & -2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 9 & 7 & -2 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 7 & -2 & & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 9 & 7 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 216 & 36 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & & 0 & 0 \\ & & & \ldots & & \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & a_n \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Варіант 21.

1. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 7 & -4 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} -8 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 7 & -16 & 2 \\ 2 & -13 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 3 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & 3 & & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 6 & 9 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} -8 & 4 & -2 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} y_n & y_{n-1} & & y_3 & y_2 & y_1 \\ 0 & 0 & & 0 & a_2 & -a_1 \\ 0 & 0 & & a_3 & -a_2 & 0 \\ & & \dots & & & \\ a_n & -a_{n-1} & & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Варіант 22.

1. $\begin{vmatrix} -4 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 8 & 9 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 6 & -3 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 4 & 1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 125 & 343 & 216 & 27 \\ 5 & 7 & 6 & 3 \\ 25 & 49 & 36 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & 1 & a_n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Варіант 23.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -4 & 4 \\ 3 & 4 & 8 & 4 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 4 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 5 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 512 & 343 & 216 & 729 \\ 64 & 49 & 36 & 81 \\ 8 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & & a^{n-1} & a^n \\ 1 & 1 & a & & a^{n-2} & a^{n-1} \\ & & & \dots & & \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Варіант 24.

1. $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 4 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 64 & 8 & 216 & 27 \\ 4 & 2 & 6 & 3 \\ 16 & 4 & 36 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & & x_n \\ -a_1 & a_2 & 0 & & 0 \\ 0 & -a_2 & a_3 & & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & & a_n \end{vmatrix}$

Варіант 25.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 9 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -6 & 5 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -4 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & -4 & & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 6 & 2 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 27 & 3 & 9 & 1 \\ 125 & 5 & 25 & 1 \\ -8 & -2 & 4 & 1 \\ 64 & 4 & 16 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & & n-1 & 1 \\ & & & \dots & & \\ 1 & n-1 & 1 & & 1 & 1 \\ n-1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Список літератури

[1] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры : учебник для вузов / А. И. Кострикин. – 3-е изд. – М. : Физматлит, 2004. – 272 с.

[2] Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1971. – 432 с.

[3] Мишина А. П. Справочная математическая библиотека. Высшая алгебра / А. П. Мишина, И. В. Проскуряков. – М. : Физматгиз, 1962. – 300 с.

[4] Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры / В. В. Прасолов. – М. : Наука, 1996. – 304 с.

[5] Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. – 7-е изд. – М. : Наука, 1984. – 336 с.

[6] Фаддеев Д. К. Сборник задач по высшей алгебре / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. – М. : Гостехиздат, 1955. – 288 с.

Навчальне видання

Гиря Наталія Петрівна
Полякова Людмила Юріївна

ВИЗНАЧНИКИ

Навчально-методичний посібник з алгебри
для студентів I курсу механіко-математичного факультету

Комп'ютерне верстання *Л. Ю. Полякова*
Коректор *О. В. Гавриленко*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат $60 \times 84/16$. Ум. друк. арк. 1,9. Тираж 100 пр. Зам. № 127/12.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
61022, м. Харків, пл. Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна.
Тел. 705-24-32