Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Н. П. Гиря
І. М. Карпенко

Тестові завдання з теорії функцій комплексної змінної

Навчально-методичний посібник

Харків – 2019

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Н. П. Гиря
І. М. Карпенко

Тестові завдання з теорії функцій комплексної змінної

Навчально-методичний посібник для студентів 3 курсу факультету математики і інформатики

Харків – 2019

УДК 517.53(076)
Г 51

Рецензенти:

С. Ю. Фаворов – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри фундаментальної математики ХНУ імені В. Н. Каразіна;

О. О. Набока – кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри вищої математики НТУ «ХПІ».

Затверджено до друку рішенням Науково-методичної ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 2 від 18.01.2017р.)

Гиря Н. П.

Г51 Тестові завдання з теорії функцій комплексної змінної : навчально-методичний посібник для студентів 3 курсу факультету математики і інформатики / Н. П. Гиря, І. М. Карпенко. – Харків : ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2019. – 56 с.

Навчально-методичний посібник для розв’язання завдань, які відповідають програмі першого семестру дисципліни «Теорія функцій комплексної змінної», призначений для студентів 3 курсу факультету математики і інформатики для вивчення основних розділів курсу та підготовки до виконання завдань поточного контролю.

УДК 517.53(076)

Зміст

Вступ

Сьогодні аналіз властивостей функцій неможливий без переходу у комплексну площину, адже він дає підстави детальніше вивчати елементарні функції і встановлювати цікаві зв'язки між ними. Комплексний аналіз дає ефективні методи обчислення інтегралів, розв'язання задач математичної фізики, дослідження властивостей рішень диференціальних рівнянь тощо. Сьогодні особливого розвитку отримали комплексна динаміка та зображення фракталів у комплексній площині. Комплексний аналіз також застосовується у теорії струн, квантовій теорії поля та гідродинаміці.

Комплексний аналіз зародився у другій половині XVIII ст. Його поява пов'язана, насамперед, з ім'ям Леонарда Ейлера, у роботах якого досліджені елементарні функції комплексної змінної, надані умови диференційованості і побудовані основи інтегрального числення. Відкриті ним результати розвивалися у роботах видатних математиків XIX ст. Огюстена Коші, Бернарда Рімана та Карла Вейєрштрасса. У XX ст. значний внесок у розвиток теорії функцій комплексної змінної зробили й харківські математики, насамперед, С. Н. Бернштейн, Н. І. Ахієзер, Б. Я. Левін, Й. В. Островський. Сьогодні теорія функцій комплексної змінної є потужним засобом математичних досліджень.

У цьому навчально-методичному посібнику розглядаються елементарні функції комплексної змінної, диференціювання та інтегрування цих функцій, сферична проекція, інтегральна формула Коші та її похідна, ряди Лорана функцій комплексної змінної, класифікація ізольованих особливих точок та застосування теорем Коші про лишки.

Метою цього навчально-методичного посібника є надання допомоги студентам 3 курсу, які ознайомлюються з функціями комплексної змінної та опановують навички у розв'язанні задач методами комплексного аналізу. У посібнику наведено основні теоретичні факти за програмою першого семестру дисципліни «Теорія функцій комплексної змінної», а також розв'язання типових прикладів та задач, запропоновано літературу для більш докладного вивчення тем та самостійної роботи.

Посібник містить 10 тематичних тестів, кожен із яких подано у двох варіантах, варіант складається з 10 питань. Тести можуть бути використані як викладачем, наприклад, для роботи на практичному занятті, для домашніх завдань, поточних самостійних робіт під час практичного заняття, здійснення тематичного контролю за темою, так і студентами для самопідготовки, закріплення навичок та вмінь. Також наведено питання для самоперевірки.

1. Комплексні числа та основні дії над ними

Визначення. Комплексним числом називається вираз вигляду $z = x + iy$, де $x, y \in$ **R**, а i – уявна одиниця, яка має наступну властивість: $i^2 = -1$.

Число x називається дійсною частиною комплексного числа $z = x + iy$ та позначається $\mathrm{Re}(z) = x$. Число $\mathrm{Im}(z) = y$ називається уявною частиною $z = x + iy$.

Нехай $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$, тоді $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ та $y_1 = y_2$.
Вводяться наступні операції над комплексними числами:
1) комплексне число $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ називається сумою $z_1 + z_2$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$;
2) комплексне число $z = z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$ називається добутком $z_1 \cdot z_2$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$;
3) число $\overline{z} = x - iy$ називається спряженим числом до комплексного числа $z = x + iy$, зауважимо, що $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$;
4) часткою комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ називається комплексне число $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z}}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \dfrac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$.

Множина усіх комплексних чисел позначається через $\mathbb{C}$ і утворює поле. Зауважимо, що кожному комплексному числу $z = x + iy$ можна поставити у взаємно-однозначну відповідність точку на площині (x, y). Тому природними є визначення модуля та аргумента комплексного числа.

Визначення. Модулем комплексного числа $z = x + iy$ називається $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, тобто відстань між точками $(0, 0)$ та (x, y) на площині.
Користуючись геометричною інтерпретацією комплексних чисел, можемо легко довести наступні нерівності:
1) $|\mathrm{Re}(z)| \le |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \le |z|$; 2) $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

Головним аргументом комплексного числа $z = x + iy$ називається кут між додатним напрямком осі Ox та радіус-вектором точки з координатами (x, y); головний аргумент комплексного числа позначається через $\arg(z)$, $\arg(z) \in [0; 2\pi)$. Значення головного аргумента не визначене для комплексного числа $z = 0$.

Визначення. Функція $\mathrm{Arg}(z) = \arg(z) + 2\pi k, k \in$ **Z** називається аргументом комплексного числа $z = x + iy$.

Аргумент $z = x + iy$ задовольняє наступній умові: $\mathrm{tg}(\mathrm{Arg}(z)) = \dfrac{y}{x}$.

У полярній системі координат отримуємо тригонометричну форму запису комплексного числа $z = x + iy$, а саме $z = r\cdot(\cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi))$, де r – це модуль z, φ – аргумент z. За допомогою формули Ейлера $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi)$ отримуємо показникову форму запису комплексного числа, а саме $z = re^{i\varphi}$.

Тригонометричну (або показникову) форму запису зручно використовувати для множення та ділення комплексних чисел, тому що

$$z_1\cdot z_2 = r_1\cdot(\cos(\varphi_1) + i\cdot\sin(\varphi_1))\cdot r_2\cdot(\cos(\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_2)) =$$
$$= r_1\cdot r_2\cdot(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

або $z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\cdot(\cos(\varphi_1) + i\cdot\sin(\varphi_1))}{r_2\cdot(\cos(\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_2))} = \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

або $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

Формула Муавра для обчислення n-го степеня комплексного числа, яке записано у тригонометричній або показниковій формі: $z^n = r^n\cdot(\cos(n\varphi) + i\cdot\sin(n\varphi))$ або $z^n = r^n\cdot e^{in\varphi}$.

Коренем із комплексного числа $z \neq 0$ степеня n $(n \in \mathbf{Z}, n \geq 2)$ називається таке комплексне число w, що $w^n = z$. Тобто w є коренем степеня n із z тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \arg(w) = \dfrac{\arg(z) + 2\pi k}{n}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Тобто є рівно n різних коренів степеня n із числа z.

Функцією комплексної змінної на області D називається $\mathrm{f}(z): D \to \mathbb{C}$. Зауважимо, що $\mathrm{f}(z) = \mathrm{u}(x,y) + i\mathrm{v}(x,y)$, де $\mathrm{u}(x,y) = \mathrm{Re}(\mathrm{f}(z))$, $\mathrm{v}(x,y) = \mathrm{Im}(\mathrm{f}(z))$. Функція $\mathrm{f}(z)$ називається неперервною у точці z_0, якщо $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0\; \forall\, z : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |\mathrm{f}(z) - \mathrm{f}(z_0)| < \varepsilon$.

Комплексна експонента визначається так: $e^z := e^{x+iy} = e^x\cdot(\cos(y) + i\cdot\sin(y))$, та має такі властивості:

- $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}: e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$;
- $\forall\, z \in \mathbb{C}: e^{z+2\pi i} = e^z$, тобто e^z – періодична функція з періодом $2\pi i$;
- $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$;
- $\forall\, z \in \mathbb{C}: e^z \neq 0$.

Зауважимо, що на дійсній осі комплексна експонента співпадає зі звичайною експонентою дійсного аргументу.

Приклад 1.1. Знайти тригонометричну форму комплексного числа $z = \dfrac{(1+i^{23})}{(1-i)^2}$.

Для запису числа в тригонометричній формі треба визначити модуль та аргумент комплексного числа. Зауважимо, що $i^{4k} = 1, k \in \mathbb{Z}$. Тоді $i^{23} = i^{20} \cdot i^3 = i^3 = [i^2 = -1] = -i$. Отже, $1+i^{23} = 1-i$, тому $z = \dfrac{1-i}{(1-i)^2} = \dfrac{1}{1-i} =$ $= \dfrac{1}{1-i} \cdot \dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{1+i}{2}$ відповідно до визначення операції ділення на комплексне число.

Приведемо це число до вигляду $r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$, де $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, аргумент φ задовольняє рівностям: $\cos(\varphi) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ та $\sin(\varphi) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, тобто головний аргумент $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Таким чином, $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\dfrac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\dfrac{\pi}{4}))$.

Тест 1.1. Комплексні числа

Варіант 1

1. Знайти модуль комплексного числа $z = 1-3i$.

А	Б	В	Г
$\sqrt{4}$	10	4	$\sqrt{10}$

2. Знайти модуль комплексного числа $z = 5+2i$.

А	Б	В	Г
29	$\sqrt{29}$	25	$\sqrt{25}$

3. Яке з наступних чисел є аргументом комплексного числа $z = 1+i$?

А	Б	В	Г
$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{4}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{7\pi}{4}$

4. Яке з наступних чисел НЕ є аргументом комплексного числа $z = 1+\sqrt{3}i$?

А	Б	В	Г
$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{5\pi}{3}$	$\dfrac{7\pi}{3}$	$-\dfrac{5\pi}{3}$

5. Знайти дійсну частину комплексного числа $z = (1-3i)(1-i)$.

А	Б	В	Г
4	2	-2	-4

6. Знайти дійсну частину комплексного числа $z = (1+7i^2)(1+i)$.

А	Б	В	Г
6	-6	7	1

7. Знайти уявну частину комплексного числа $z = \dfrac{2+3i}{(1-i)^2}$.

А	Б	В	Г
1	$-\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{3}{2}$	-1

8. Знайти уявну частину комплексного числа $z = e^{5+4i}\cdot e^{1+2i}$.

А	Б	В	Г
$e^{-6}\cdot\sin(6)$	$e^{-6}\cdot\cos(6)$	$e^{6}\cdot\cos(6)$	$e^{6}\cdot\sin(6)$

9. Показниковою формою комплексного числа $z = 2\cdot e^{\frac{\pi}{2}i}\cdot e^{5+\frac{\pi}{2}i}$ є:

А	Б	В	Г
$2\cdot e^{-5\pi}$	$-2\cdot e^{5}$	$2\cdot e^{5\pi i}$	$-2\cdot e^{-5\pi}$

10. Тригонометричною формою комплексного числа $z = e^{\frac{\pi}{4}i}\cdot e^{8+\frac{\pi}{2}i}$ є:

А	$e^{8}\cdot(\cos(\frac{3\pi}{4})+i\cdot\sin(\frac{3\pi}{4}))$	Б	$e^{8}\cdot(\cos(-\frac{3\pi}{4})+i\cdot\sin(-\frac{3\pi}{4}))$
В	$e^{8}\cdot(\cos(\frac{3\pi}{4})-i\cdot\sin(\frac{3\pi}{4}))$	Г	$-e^{8}\cdot(\cos(\frac{3\pi}{4})+i\cdot\sin(\frac{3\pi}{4}))$

Варіант 2

1. Знайти модуль комплексного числа $z = 5 + 3i$.

А	Б	В	Г
$\sqrt{8}$	4	$\sqrt{34}$	8

2. Знайти модуль комплексного числа $z = 2i - 2\sqrt{3}$.

А	Б	В	Г
8	$\sqrt{12}$	4	2

3. Яке з наступних чисел є аргументом комплексного числа $z = -1 + \sqrt{3}i$?

А	Б	В	Г
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{3}$

4. Знайти аргумент комплексного числа $z = 2 + 2\sqrt{3}i$.

А	Б	В	Г
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$

5. Знайти дійсну частину комплексного числа $z = (1 - 2i)(3 + i)$.

А	Б	В	Г
3	5	1	-1

6. Знайти дійсну частину комплексного числа $z = e^{i\pi} e^{2i+1}$

А	Б	В	Г
$\cos(1)$	$-e \cdot \cos(1)$	$\sin(2)$	$-e \cdot \cos(2)$

7. Знайти уявну частину комплексного числа $z = (1 - 2i)(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4}))$.

А	Б	В	Г
$2\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-2\cos(\frac{\pi}{4})$	$\sin(\frac{\pi}{4})$

8. Знайти уявну частину комплексного числа $z = \frac{\left|1 - i\right|^2}{1 - i}$.

А	Б	В	Г
$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	-1

9. Показниковою формою комплексного числа $z = -1 - i$ є:

А	Б	В	Г
$e^{\frac{5\pi}{4}i}$	$\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$	$e^{\frac{3\pi}{4}i}$	$\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$

10. Тригонометричною формою комплексного числа $z = 2 + 2i$ є:

А	$2\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) - i\sin(\frac{\pi}{4}))$	Б	$\sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4}))$
В	$2(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$	Г	$2\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$

2. Комплексні тригонометричні функції

Комплексні тригометричні функції визначаються за допомогою формул Ейлера наступним чином: $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$; $\sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$;

$\mathrm{tg}(z) = \dfrac{\sin(z)}{\cos(z)} = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$; $\mathrm{ctg}(z) = \dfrac{\cos(z)}{\sin(z)} = i\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$.

Комплексні гіперболічні функції: $\mathrm{ch}(z) = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$; $\mathrm{sh}(z) = \dfrac{e^{z} - e^{z}}{2}$;

$\mathrm{th}(z) = \dfrac{\mathrm{sh}(z)}{\mathrm{ch}(z)} = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}}$; $\mathrm{cth}(z) = \dfrac{\mathrm{ch}(z)}{\mathrm{sh}(z)} = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{e^{z} - e^{-z}}$.

Приклад 2.1. *Знайти* $\mathrm{Im}(\mathrm{ctg}(i))$.

Скористаємося формулою $\mathrm{ctg}(z) = \dfrac{\cos(z)}{\sin(z)} = i\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$.

Маємо $\mathrm{ctg}(i) = i\dfrac{e^{ii} + e^{-ii}}{e^{ii} - e^{-ii}} = i\dfrac{e^{-1} + e^{1}}{e^{-1} - e^{1}} = i\dfrac{\mathrm{ch}(1)}{-\mathrm{sh}(1)} = -i\,\mathrm{cth}(1)$,

отже, $\mathrm{Im}(\mathrm{ctg}(i)) = -\dfrac{\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)} = -\mathrm{cth}(1)$.

Тест 2.1. Комплексні тригонометричні функції

Варіант 1

1. Обрати правильну формулу для обчислення $\sin(3z)$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{e^{-3iz} - e^{3iz}}{2i}$	$\dfrac{e^{3iz} - e^{-3iz}}{2i}$	$\dfrac{e^{3iz} - e^{-3iz}}{2}$	$\dfrac{e^{-3iz} - e^{3iz}}{2}$

2. Знайти $\mathrm{Re}(\cos(2i))$.

А	Б	В	Г
$-\mathrm{ch}(2)$	$\mathrm{ch}(2)$	$\cos(2)$	$\mathrm{sh}(2)$

3. Нехай $z = x + iy$, $\cos(z)$ – комплексний косинус. Чому дорівнює $\cos(iy)$?

А	Б	В	Г
$\cos(y)$	$-\cos(y)$	$-\mathrm{ch}(y)$	$\mathrm{ch}(y)$

4. Знайти $\mathrm{Im}(\sin(5z))$.

А	Б	В	Г
$-\sin(5x)\,\mathrm{ch}(5y)$	$\sin(5x)\,\mathrm{ch}(5y)$	$\cos(5x)\,\mathrm{sh}(5y)$	$-\cos(5x)\,\mathrm{sh}(5y)$

5. Обрати правильну формулу для обчислення $\mathrm{tg}(2z)$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{i(e^{2iz} + e^{-2iz})}$	$-\dfrac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$	$\dfrac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{i(e^{2iz} - e^{-2iz})}$	$\dfrac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{(e^{2iz} - e^{-2iz})}$

6. Знайти $\mathrm{Im}(\mathrm{ctg}(i+1))$.

А	Б	В	Г
$-\dfrac{\mathrm{sh}(2)}{\mathrm{ch}(2) - \cos(2)}$	$\dfrac{\mathrm{sh}(2)}{\mathrm{ch}(2) - \cos(2)}$	$\dfrac{\mathrm{sh}(2)}{\mathrm{sh}^2(1) - \sin^2(1)}$	$-\dfrac{\mathrm{sh}(2)}{\mathrm{sh}^2(1) - \sin^2(1)}$

7. Знайти $\mathrm{Re}(\mathrm{tg}(i))$.

А	Б	В	Г
$-\dfrac{\mathrm{sh}(1)}{\mathrm{ch}(1)}$	$\dfrac{\mathrm{sh}(1)}{\mathrm{ch}(1)}$	0	$-\dfrac{\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)}$

8. Чи правильна тотожність $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ для усіх комплексних z?

А	Б	В	Г
Так	Ні		

9. Обрати рівність, що є правильною для усіх комплексних z.

А	$\cos(z) = -\cos(z)$	Б	$\sin(2z) = 2\cos(z)\sin(z)$
В	$\mathrm{ch}^2(z) + \mathrm{sh}^2(z) = 1$	Г	$\mathrm{sh}(-z) = \mathrm{sh}(z)$

10. Обрати тотожність, що є правильною для усіх дійсних y.

А	$\cos(iy) = -\mathrm{ch}(y)$	Б	$\mathrm{sh}(iy) = i\times\sin(y)$
В	$\mathrm{th}(iy) = -i\times\mathrm{tg}(y)$	Г	$\mathrm{ctg}(iy) = i\times\mathrm{cth}(y)$

Варіант 2

1. Обрати правильну формулу для обчислення $\cos(-z)$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{e^{-iz}+e^{iz}}{2}$	$\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$	$\dfrac{e^{-iz}+e^{iz}}{2i}$	$-\dfrac{e^{-iz}+e^{iz}}{2}$

2. Знайти $\operatorname{Im}(\sin(-3i))$.

А	Б	В	Г
$\operatorname{sh}(3)$	$\operatorname{ch}(3)$	$-\operatorname{sh}(3)$	$\sin(3)$

3. Обрати правильну формулу для обчислення $\operatorname{tg}(3iz)$.

А	$\dfrac{-\sin(6y)+i\operatorname{sh}(6x)}{\operatorname{ch}(6x)+\cos(6y)}$	Б	$\dfrac{-\sin(6x)+i\operatorname{sh}(6y)}{\operatorname{ch}(6y)+\cos(6x)}$
В	$\dfrac{-\sin(6y)+i\operatorname{sh}(6x)}{\operatorname{ch}^2(3x)+\sin^2(3y)}$	Г	$\dfrac{-\sin(6x)+i\operatorname{sh}(6y)}{\operatorname{ch}^2(3y)+\sin^2(3x)}$

4. Нехай $z=x+iy$, $\sin(z)$ – комплексний синус. Чому дорівнює $\sin(iy)$?

А	Б	В	Г
$-\operatorname{sh}(y)$	$-\dfrac{1}{i}\operatorname{sh}(y)$	$\operatorname{sh}(y)$	$\dfrac{1}{i}\operatorname{sh}(y)$

5. Обрати формулу для обчислення $\operatorname{ctg}(2z)$.

А	Б	В	Г
$-i\dfrac{e^{2iz}-e^{-2iz}}{(e^{2iz}+e^{-2iz})}$	$i\dfrac{e^{2iz}+e^{-2iz}}{e^{-2iz}-e^{2iz}}$	$\dfrac{e^{2iz}+e^{-2iz}}{e^{2iz}-e^{-2iz}}$	$i\dfrac{e^{2iz}+e^{-2iz}}{e^{2iz}-e^{-2iz}}$

6. Знайти $\operatorname{Re}(\operatorname{ctg}(i+1))$.

А	Б	В	Г
$-\dfrac{\sin(2)}{\operatorname{ch}(2)-\cos(2)}$	$\dfrac{\sin(2)}{\operatorname{ch}(2)-\cos(2)}$	$\dfrac{\sin(2)}{\operatorname{sh}^2(1)-\sin^2(1)}$	$-\dfrac{\sin(2)}{\operatorname{sh}^2(1)-\sin^2(1)}$

7. Знайти $\operatorname{Re}(\operatorname{ctg}(i))$.

А	Б	В	Г
$-\dfrac{\operatorname{sh}(1)}{\operatorname{ch}(1)}$	$\dfrac{\operatorname{ch}(1)}{\operatorname{sh}(1)}$	0	$-\dfrac{\operatorname{ch}(1)}{\operatorname{sh}(1)}$

8. Чи правильна тотожність $\mathrm{ch}^2(z) - \mathrm{sh}^2(z) = 1$ для усіх комплексних z?

А	Б	В	Г
Так	Ні		

9. Обрати тотожність, що є правильною для усіх комплексних z.

А	$\sin(z) = -\cos(z)$	Б	$\mathrm{ch}(-z) = -\mathrm{ch}(z)$
В	$\cos(2z) = 1 + 2\sin^2(2z)$	Г	$\mathrm{sh}(2z) = 2\mathrm{ch}(z)\mathrm{sh}(z)$

10. Обрати тотожність, що є правильною для усіх дійсних y.

А	$\mathrm{ch}(iy) = -\cos(y)$	Б	$\sin(iy) = -i\cdot\mathrm{sh}(y)$
В	$\mathrm{tg}(iy) = i\cdot\mathrm{th}(y)$	Г	$\mathrm{cth}(iy) = i\cdot\mathrm{ctg}(y)$

3. Стереографічна проекція

Нехай (ξ, η, ζ) – прямокутна декартова система в $\mathbf{R}^3$, причому вісі ξ та η збігаються з осями x та y відповідно.

Сферою Рімана називається сфера, що має рівняння $\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ без точки $(0, 0, 1)$, початок координат умовно називається південним полюсом сфери Рімана, точка з координатами $(0, 0, 1)$ – північним полюсом сфери Рімана.

Кожній точці (x, y)(або $z = x + iy$) декартової площини поставимо у відповідність точку перетину прямої, що проходить через точки $(0, 0, 1)$ та $(x, y, 0)$ зі сферою. Таке відображення називається стереографічною проекцією. Це відображення має багато властивостей, насамперед, є гомеоморфізмом, до того ж, можна показати, що воно зберігає кути між кривими, а також є компактифікацією комплексної площини за умови, що нескінченно віддаленій точці поставимо у відповідність точку $(0, 0, 1)$.

Підставивши рівняння прямої у рівняння сфери, отримаємо наступні формули переходу від точки $z = x + iy$ на комплексній площині до точки (ξ, η, ζ) на сфері: $\xi = \frac{x}{|z|^2 + 1}, \eta = \frac{y}{|z|^2 + 1}, \zeta = \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1}$.

Маємо й зворотні формули зв'язку між координатами: $x = \frac{\xi}{1 - \zeta},\ y = \frac{\eta}{1 - \zeta}$.

Сферичною відстанню $d(z_1,\, z_2)$ між точками $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ називається евклідова відстань між їх проекціями на сферу Рімана, яка обчислюється за формулою $d(z_1, z_2) = \dfrac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{|z_1|^2+1}\cdot\sqrt{|z_2|^2+1}}$.

За допомогою граничного переходу отримаємо $d(\infty,\, z) = \dfrac{1}{\sqrt{|z|^2+1}}$.

Приклад 3.1. *Знайти просторові координати нескінченно віддаленої точки під час стереографічної проекції.*

Скористаємося формулами переходу до просторових координат точки $z = x + iy$ під час стереографічної проекції:

$\xi = \dfrac{x}{|z|^2+1};\ \eta = \dfrac{y}{|z|^2+1};\ \zeta = \dfrac{|z|^2}{|z|^2+1}$. Розглянемо послідовність $\{k + mi\} \in \mathbb{C}$.

Отримаємо:

$\xi = \dfrac{k}{k^2+m^2+1} \to 0;\ \eta = \dfrac{m}{k^2+m^2+1} \to 0;\ \zeta = \dfrac{k^2+m^2}{k^2+m^2+1} \to 1$ при $k \to \infty$, або $m \to \infty$, або $m \to \infty \vee k \to \infty$.

Таким чином, образом нескінченно віддаленої точки під час стереографічної проекції можна вважати точку з координатами $(0,\, 0,\, 1)$.

Тест 3.1. Сфера Рімана (стереографічна проекція)

Варіант 1

1. Знайти просторові координати точки $z = 1 + 2i$ під час стереографічної проекції.

А	Б	В	Г
$\left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{5}+1}, \frac{2}{\sqrt{5}+1}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}\right)$

2. Знайти просторові координати точки $z = -5 + 3i$ під час стереографічної проекції.

А	Б	В	Г
$\left(-\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$	$\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{34}{35}\right)$	$\left(-\frac{1}{7}, \frac{3}{35}, \frac{34}{35}\right)$	$\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{35}, \frac{34}{35}\right)$

3. Знайти прообраз точки $\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$ під час стереографічної проекції.

А	Б	В	Г
1	i	-1	$-i$

4. Знайти прообраз точки $\left(\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{1}{2}\right)$ під час стереографічної проекції.

А	Б	В	Г
$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$	$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$	$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$

5. Знайти прообраз точки $(1, 1, 1)$ під час стереографічної проекції.

А	Б	В	Г
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$	∞	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$	Не існує

6. Чи будуть образи точок $z_1 = i$ та $z_2 = 1$ належати одному великому колу сфери Рімана?

А	Б	В
Так	Ні	Точки не проектуються на сферу

7. Знайти сферичну відстань між точками $z_1 = 1 + 2i$ та $z_2 = 1 - 2i$.

А	Б	В	Г
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$

8. Оберіть множину, у яку під час стереографічної проекції проектується одиничне коло з центром у точці $z = 0$.

А	Екватор сфери Рімана	Б	Нижня півсфера
В	Велика півкуля, що проходить через точки $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$	Г	Велика півкуля, що проходить через точки $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

9. Знайти сферичну відстань між нескінченно віддаленою точкою та точкою $3+i$.

А	Б	В	Г
∞	$\dfrac{1}{\sqrt{11}}$	0	$\sqrt{11}$

10. Знайти сферичну відстань між нескінченно віддаленою точкою та точкою $z=1+i$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	∞	0	$\sqrt{3}$

Варіант 2

1. Знайти просторові координати точки $z=2+3i$ під час стереографічної проекції.

А	Б	В	Г
$\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}, \dfrac{3}{\sqrt{5}+1}, \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}\right)$	$\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}+1}, \dfrac{3}{\sqrt{13}+1}, \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}+1}\right)$	$\left(\dfrac{2}{6}, \dfrac{3}{6}, \dfrac{5}{6}\right)$	$\left(\dfrac{1}{7}, \dfrac{3}{14}, \dfrac{13}{14}\right)$

2. Знайти просторові координати точки $z=-2-i$ під час стереографічної проекції.

А	Б	В	Г
$\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$	$\left(-\dfrac{2}{6}, -\dfrac{1}{6}, \dfrac{5}{6}\right)$	$\left(-\dfrac{2}{4}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$	$\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}+1}, \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}\right)$

3. Знайти прообраз точки $\left(-\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right)$ під час стереографічної проекції.

А	Б	В	Г
0	-1	1	$\dfrac{1}{2}+i\dfrac{1}{2}$

4. Прообразом якої точки на сфері є точка $(1, 1)$?

А	Б	В	Г
$\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$	$\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}, \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}, \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right)$	$(0, 0, 1)$

5. Знайти прообраз точки $\left(0,\ 1,\ \frac{3}{2}\right)$ під час стереографічної проекції.

А	Б	В	Г
Не існує	∞	$-2i$	$\frac{3}{2}i$

6. Чи будуть образи точок $z_1 = -1+i$ та $z_2 = 1-i$ належати одному великому колу сфери Рімана?

А	Б	В
Так	Ні	Точки не проектуються на сферу

7. Знайти сферичну відстань між точками $z_1 = -1+i$ та $z_2 = 1-i$.

А	Б	В	Г
$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

8. Обрати точки, сферичні проекції яких лежать на екваторі сфери Рімана.

А	$z_1 = 1,\ z_2 = 1+i$	Б	$z_1 = i;\ z_2 = 2i$
В	$z_1 = 2i;\ z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$	Г	$z_1 = 1, z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

9. Знайти сферичну відстань між нескінченно віддаленою точкою та точкою $z = 1$.

А	Б	В	Г
∞	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\sqrt{2}$

10. Яка із точок комплексної множини проектується у центр сфери Рімана, тобто у точку з координатами $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$?

А	Б	В	Г
0	∞	Не існує	$\frac{1}{2}$

4. Розв’язування рівнянь

Розв’язати рівняння – означає знайти всі його корені або довести, що їх не існує. Щоб розв’язати рівняння, зазвичай послідовно виконують рівносильні перетворення рівняння до більш простого вигляду або заміняють рівняння сукупністю рівнянь.

Методи розв'язання рівнянь:

1. Для розв'язання рівнянь вигляду $z^n = w$ (відносно z) найчастіше застосовують формулу знаходження кореня з комплексного числа або записують показникову форму комплексних чисел z та w.

2. Для розв'язання рівнянь вигляду $z^n = \overline{z}^m$ (відносно z) найчастіше записують z у показниковій формі $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$, а далі, прирівнявши модулі та аргументи (враховуючи період), одержують рівняння відносно $|z|$ та φ, або спочатку множать обидві частини на z^m, зважаючи на те, що $z^m \cdot \overline{z}^m = |z|^m$.

3. Для розв'язання деяких рівнянь, наприклад, вигляду $a_1 z^2 + a_2 \overline{z}^2 + a_3 |z|^2 + b_1 z + b_2 \overline{z} + c = 0$ (відносно z) зазвичай записують z у формі $x + iy$ та, прирівнявши дійсну та уявну частини виразу $a_1 z^2 + a_2 \overline{z}^2 + a_3 |z|^2 + b_1 z + b_2 \overline{z} + c$ до 0, одержують систему рівнянь відносно x та y.

Приклад 4.1. *Розв'язати рівняння* $z^2 + (\overline{z})^2 + z = 2 + 2i$.

Підставимо $z = x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}$ у рівняння.

Тоді $x^2 + 2iy - y^2 + x^2 - 2iy - y^2 + x + iy = 2 + 2i$. З рівності двох комплексних чисел маємо наступну систему: $\begin{cases} 2x^2 - 2y^2 + x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$.

Підставивши $y = 2$ у перше рівняння системи, ми отри-маємо рівняння відносно x, а саме $2x^2 - 8 + x = 2$, або $2x^2 + x - 10 = 0$. Дискримінант $D = 1 + 80 = 81,\ \sqrt{D} = 9$, отже $x_1 = \dfrac{-1+9}{4} = 2$; $x_2 = \dfrac{-1-9}{4} = -\dfrac{5}{2}$. Тобто рівняння $z^2 + (\overline{z})^2 + z = 2 + 2i$ має два розв'язки: $z_1 = 2 + 2i$; $z_2 = -\dfrac{5}{2} + 2i$.

Тест 4.1. Розв'язування рівнянь

В тесті можливі декілька правильних варіантів відповіді, необхідно обрати всі.

Варіант 1

1. Обрати розв'язки рівняння $z^3 = 8$.

А	Б	В	Г
$-1-\sqrt{3}i$	$-2i$	$1-\sqrt{3}i$	$1+\sqrt{3}i$

2. Обрати розв’язки рівняння $z^2=-3+4i$.

А	Б	В	Г
$1+2i$	$-1+2i$	$1-2i$	$-1-2i$

3. Обрати розв’язки рівняння $z^6=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$.

А	Б	В	Г
$\sqrt[6]{2}e^{\frac{\pi i}{24}}$	$\sqrt[6]{2}e^{\frac{3\pi i}{8}}$	$\sqrt[12]{2}e^{\frac{\pi i}{24}}$	$\sqrt[6]{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$

4. Знайти суму всіх розв’язків рівняння $\overline{z}=z^5$.

А	Б	В	Г
1	$1+\sqrt{3}i$	$1-\sqrt{3}i$	0

5. Обрати розв’язки рівняння $|z|^2-z=i+1$.

А	Б	В	Г
1	$-i$	$1-i$	$1+i$

6. Обрати розв’язки рівняння $z^3=i$.

А	Б	В	Г
$-i$	$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$	i

7. Знайти суму всіх розв’язків рівняння $\overline{z}=z^2$.

А	Б	В	Г
1	$2+\sqrt{3}i$	$2-\sqrt{3}i$	0

8. Скільки розв’язків має рівняння $|z|^2-(\overline{z})^2=i+1$?

А	Б	В	Г
0	1	2	3

9. Обрати розв’язки рівняння $e^{2iz}=i$.

А	Б	В	Г
Розв’язків не існує	$\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$	$\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)i,\ k\in\mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

10. Нехай $\left|z_1\right|=3$, $\left|z_2\right|=4$. Обрати правильну нерівність.

А	Б	В	Г
$3\le\left|z_1+z_2\right|\le 4$	$1\le\left|z_1-z_2\right|\le 7$	$1<\left|z_1+z_2\right|<7$	$-1<\left|z_1+z_2\right|<7$

Варіант 2

1. Обрати розв'язки рівняння $z^4 = -1$.

А	Б	В	Г
$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$	$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

2. Обрати розв'язки рівняння $z^2=5+12i$.

А	Б	В	Г
$3+2i$	$3-2i$	$2+3i$	$-2-3i$

3. Обрати розв'язки рівняння $z^4=1+\sqrt{3}i$.

А	$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right)$	Б	$\sqrt[4]{2}\left(\sin\frac{\pi}{12}-i\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right)$
В	$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\cdot\cos\frac{\pi}{12}\right)$	Г	$\sqrt[4]{2}\left(\sin\frac{\pi}{12}-i\cdot\cos\frac{\pi}{12}\right)$

4. Знайдіть суму всіх розв'язків рівняння $\bar{z}=z^7$.

А	Б	В	Г
1	$\sqrt{2}+\sqrt{2}i$	$\sqrt{2}-\sqrt{2}i$	0

5. Обрати розв'язки рівняння $|z|^2 - z^2 = 2i+2$.

А	Б	В	Г
$1+i$	$-1+i$	$1-i$	$-1-i$

6. Обрати розв'язки рівняння $z^2 = 3-4i$.

А	Б	В	Г
$2-i$	$-2+i$	$2+i$	$-2-i$

7. Знайдіть суму модулів всіх розв'язків рівняння $z^6 = 64$.

А	Б	В	Г
12	6	2	0

8. Обрати розв'язки рівняння $e^z = -1$.

А	Б	В	Г
Розв'язків немає	$(\pi+2\pi k)i,\ k\in\mathbb{Z}$	$\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$	$-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

9. Нехай $|z_1| = 5$, $z_2 = 7e^{\pi i}$. Обрати правильну нерівність.

А	Б	В	Г
$5 \le \lvert z_1 - z_2 \rvert \le 7$	$-2 \le \lvert z_1 + z_2 \rvert \le 7$	$2 \le \lvert z_1 + z_2 \rvert \le 12$	$5 < \lvert z_1 + z_2 \rvert < 7$

10. Нехай $|z_1| = 2$, $z_2 = 7e^{\frac{\pi}{3}i}$. Обрати правильну нерівність.

А	Б	В	Г
$5 \le \lvert z_1 + z_2 \rvert \le 9$	$2 \le \lvert z_1 - z_2 \rvert \le 5$	$5 < \lvert z_1 - z_2 \rvert < 9$	$-5 < \lvert z_1 + z_2 \rvert < 9$

5. Комплексний логарифм

Комплексний логарифм визначається наступним чином:
$\mathrm{Ln}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z) = \ln|z| + i(\arg(z) + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Зауважимо, що комплексний логарифм є багатозначною функцією та має такі властивості:

- $\forall z \in \mathbb{C} : e^{\mathrm{Ln}(z)} = z$;
- $\forall z, w \in \mathbb{C}$: $\mathrm{Ln}(z \cdot w) = \mathrm{Ln}(z) + \mathrm{Ln}(w)$.

Насправді, це означає, що $\mathrm{Ln}(z \cdot w) = \ln|z| + \ln|w| + i\arg(z \cdot w) + 2\pi ki =$
$= \ln|z| + \ln|w| + i\arg(z) + i\arg(w) + 2\pi ki,\ k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 5.1. *Розв'язати рівняння* $\sin(iz) = -\frac{1}{2}$.

Скористаємося формулою $\sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, тоді $\sin(iz) = \dfrac{e^{-z} - e^{z}}{2i}$.

Отже, маємо рівняння: $\dfrac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow e^z - e^{-z} = i$. Оскільки $e^z \ne 0, \forall z \in \mathbb{C}$, то можна помножити обидві частини рівняння на e^z, це не змінить його коренів. Отримаємо $e^{2z} - ie^z - 1 = 0$. Зробимо заміну $t = e^z$ і отримаємо квадратне рівняння $t^2 - it - 1 = 0$. Розв'яжемо це рівняння:

$D = -1 + 4 = 3,\ \sqrt{D} = \sqrt{3}$, $t_1 = \dfrac{i + \sqrt{3}}{2}$; $t_2 = \dfrac{i - \sqrt{3}}{2}$. Отже, $e^z = \dfrac{i + \sqrt{3}}{2}$ або $e^z = \dfrac{i - \sqrt{3}}{2}$.

Зауважимо, що $e^z = w \Leftrightarrow z = \mathrm{Ln}(w)$, та скористаємося формулою комплексного логарифма $\mathrm{Ln}(w) = \ln|w| + i(\arg(w) + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

1) $e^z = \dfrac{i + \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z = \mathrm{Ln}\left(\dfrac{i + \sqrt{3}}{2}\right) = \ln\left|\dfrac{i + \sqrt{3}}{2}\right| + i\left(\arg\left(\dfrac{i + \sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k\right)$.

Тобто $z = \ln|1| + i\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) = i\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbf{Z}$.

2) $e^{z} = \frac{i - \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z = \mathrm{Ln}\left(\frac{i - \sqrt{3}}{2}\right) = \ln\left|\frac{i - \sqrt{3}}{2}\right| + i\left(\arg\left(\frac{i - \sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k\right).$

Тобто $z = \ln|1| + i\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right) = i\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbf{Z}$.

Отже, рівняння має такі корені: $z_k = i\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right),\ z_l = i\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi l\right),\ k, l \in \mathbf{Z}$.

Тест 5.1. Комплексний логарифм

В тесті можливі декілька правильних варіантів відповіді, необхідно обрати всі.

Варіант 1

1. Обчислити i^{i}.

А	Б	В	Г
$e^{-(\frac{\pi}{2}+2\pi k)},\ k \in \mathbf{Z}$	$e^{(\frac{\pi}{2}+2\pi k)},\ k \in \mathbf{Z}$	$e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)},\ k \in \mathbf{Z}$	i

2. Обчислити $(i+1)^{i+1}$.

А	$\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+2\pi k}e^{i\ln\sqrt{2}},\ k \in \mathbf{Z}$	Б	$\sqrt{2}e^{i\ln\sqrt{2}}$
В	$\sqrt{2}(1+i)e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}e^{i\ln\sqrt{2}},\ k \in \mathbf{Z}$	Г	$(1+i)e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}e^{i\ln\sqrt{2}},\ k \in \mathbf{Z}$

3. Обчислити $(\sqrt{3}+i)^{i}$.

А	$e^{i\ln\sqrt{2}}e^{-(\frac{\pi}{3}+2\pi k)},\ k \in \mathbf{Z}$	Б	$e^{i\ln\sqrt{2}}e^{-(\frac{\pi}{6}+2\pi k)},\ k \in \mathbf{Z}$
В	$e^{i\ln 2}e^{-(\frac{\pi}{6}+2\pi k)},\ k \in \mathbf{Z}$	Г	$e^{i\ln 2}e^{-(\frac{\pi}{3}+2\pi k)},\ k \in \mathbf{Z}$

4. Обчислити $\mathrm{Ln}(1+\sqrt{3}i)$.

А	$\ln(2)+i\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}$	Б	$\ln(2)+i\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}$
В	$\ln(4)+i\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}$	Г	$\ln(4)+i\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}$

5. Обчислити $\mathrm{Ln}(z+10)$, де $z=x+iy$.

А	$\ln((x+10)^2+y^2)+i(\arg(z+10)+2\pi k),\ k\in\mathbb{Z}$
Б	$\ln(\sqrt{(x+10)^2+y^2})+i(\arg(z+10)+\pi k),\ k\in\mathbb{Z}$
В	$\ln(\sqrt{(x+10)^2-y^2})+i(\arg(z+10)+\pi k),\ k\in\mathbb{Z}$
Г	$\ln(\sqrt{(x+10)^2+y^2})+i(\arg(z+10)+2\pi k),\ k\in\mathbb{Z}$

6. Обрати розв'язки рівняння $\cos(z)=10$.

А	Розв'язків немає	Б	$-i\ln(-10+\sqrt{101})+\pi+2\pi k, k\in\mathbb{C}$
В	$-i\ln(10+3\sqrt{11})+2\pi k, k\in\mathbb{C}$	Г	$-i\ln(10-3\sqrt{11})+2\pi k, k\in\mathbb{C}$

7. Обрати розв'язки рівняння $\sin(z)=\frac{12i}{5}$.

А	Б	В	Г
$i\ln(5)$	$-i\ln(5)-\pi$	$-i\ln(5)+2\pi$	$\ln(5)+i\pi$

8. Обрати розв'язки рівняння $\mathrm{tg}(z)=i$.

А	Б	В	Г
$i\pi$	$2\pi i$	Розв'язків немає	$1+2\pi i$

9. Обрати розв'язки рівняння $\mathrm{Ln}(z)=2i$.

А	Б	В	Г
e^{2i}	$2e^{i}$	e^{i}	$2e^{2i}$

10. Обрати розв'язки рівняння $e^{3iz}=i$.

А	Б	В	Г
$\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$	$-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

Варіант 2

1. Обчислити $(1-i)^{(1-i)}$.

А	$(1-i)e^{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}e^{-i\ln\sqrt{2}},\ k\in \mathbf{Z}$	Б	$\sqrt{2}(1-i)e^{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}e^{-i\ln\sqrt{2}},\ k\in \mathbf{Z}$
В	$(1-i)e^{\frac{\pi}{4}+2\pi k}e^{i\ln\sqrt{2}},\ k\in \mathbf{Z}$	Г	$\sqrt{2}(1-i)e^{\frac{\pi}{4}+2\pi k}e^{i\ln\sqrt{2}},\ k\in \mathbf{Z}$

2. Обчислити $(2i)^{2i}$.

А	$e^{-\pi+4\pi k}e^{2i\ln 2},\ k\in \mathbf{Z}$	Б	$e^{\frac{\pi}{2}+4\pi k}e^{i\ln 4},\ k\in \mathbf{Z}$
В	$e^{\frac{\pi}{2}+2\pi k}e^{i\ln 4},\ k\in \mathbf{Z}$	Г	$e^{-\pi+4\pi k}e^{i\ln 2},\ k\in \mathbf{Z}$

3. Обчислити $(\sqrt{3}-i)^{i}$.

А	Б	В	Г
$e^{\ln 2}e^{i\frac{\pi}{6}}$	$e^{i\ln 2}e^{\left(\frac{\pi}{6}-2\pi k\right)},\ k\in \mathbf{Z}$	$e^{\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)},\ k\in \mathbf{Z}$	$e^{i\ln 2}e^{\frac{\pi}{6}}$

4. Обчислити $\mathrm{Ln}(-1-i)$.

А	$\ln(2)+i\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi k\right),\ k\in \mathbf{Z}$	Б	$\ln(\sqrt{2})+i\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right),\ k\in \mathbf{Z}$
В	$\ln(\sqrt{2})+i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right),\ k\in \mathbf{Z}$	Г	$\frac{1}{2}\ln(2)+i\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi k\right),\ k\in \mathbf{Z}$

5. Обчислити $\mathrm{Ln}(3-\sqrt{10})$.

А	$\ln(3-\sqrt{10})+i(\pi+2\pi k),\ k\in \mathbf{Z}$	Б	$\ln(3-\sqrt{10})+2\pi ki,\ k\in \mathbf{Z}$
В	$\ln(\sqrt{10}-3)+2\pi ki,\ k\in \mathbf{Z}$	Г	$\ln(\sqrt{10}-3)+i(\pi+2\pi k),\ k\in \mathbf{Z}$

6. Обрати розв’язки рівняння $\mathrm{tg}(iz)=i.$

А	Б	В	Г
π	$i+2\pi$	Розв’язків немає	2π

7. Обрати розв’язки рівняння $\cos(z)=\frac{13}{5}.$

А	Б	В	Г
$-i\ln(5)$	$i\ln(5)+\pi$	$-i\ln(5)+\pi$	$i\ln(5)$

8. Обрати розв'язки рівняння $\operatorname{ctg}(z)=i.$

А	Б	В	Г
i	πi	Розв'язків немає	$2\pi i$

9. Обрати розв'язки рівняння $\operatorname{Ln}(iz)=-i.$

А	Б	В	Г
$-ie^{i}$	$-ie^{-i}$	ie^{i}	e^{-i}

10. Обрати розв'язки рівняння $e^{-iz}=-1.$

А	Б	В	Г
$-\pi-2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{2}-2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$	$-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$	$2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$

6. Диференціювання. Умови Коші–Рімана. Гармонічні функції

Функція $\mathrm{f}(z)=\mathrm{u}(x,y)+i\mathrm{v}(x,y)$ називається $\mathbf{R}$-диференційованою в точці $z_0=x_0+iy_0$, якщо $\mathrm{u}(x,y)$ та $\mathrm{v}(x,y)$ диференційовані у точці (x_0,y_0).

Визначення. Функція $\mathrm{f}(z)$ називається $\mathbb{C}$-диференційованою в точці $z_0=x_0+iy_0$, якщо $\exists\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\mathrm{f}(z)-\mathrm{f}(z_0)}{z-z_0}$, ця границя називається похідною функції $\mathrm{f}(z)$ в точці z_0 та позначається $\mathrm{f}'(z_0)$. Наступна теорема показує зв'язок між $\mathbf{R}$-диференційованістю та $\mathbb{C}$-диференційованістю.

Теорема (Коші–Рімана). Функція $\mathrm{f}(z)=\mathrm{u}(x,y)+i\mathrm{v}(x,y)$ буде $\mathbb{C}$-диференційованою в точці $z_0=x_0+iy_0$ тоді і тільки тоді, коли $\dfrac{\partial\mathrm{u}(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial\mathrm{v}(x,y)}{\partial y};\ \dfrac{\partial\mathrm{u}(x,y)}{\partial y}=-\dfrac{\partial\mathrm{v}(x,y)}{\partial x}.$

Розглянемо оператори диференціювання: $\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-i\dfrac{\partial}{\partial y}\right);$ $\dfrac{\partial}{\partial\bar z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, де $\dfrac{\partial\mathrm{f}}{\partial x}=\dfrac{\partial\mathrm{u}(x,y)}{\partial x}+i\dfrac{\partial\mathrm{v}(x,y)}{\partial x};\ \dfrac{\partial\mathrm{f}}{\partial y}=\dfrac{\partial\mathrm{u}(x,y)}{\partial y}+i\dfrac{\partial\mathrm{v}(x,y)}{\partial y}.$

Отримаємо умову, що еквівалента умовам Коші–Рімана: $\dfrac{\partial\mathrm{u}(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial\mathrm{v}(x,y)}{\partial y};\ \dfrac{\partial\mathrm{u}(x,y)}{\partial y}=-\dfrac{\partial\mathrm{v}(x,y)}{\partial x}\ \Leftrightarrow\ \dfrac{\partial\mathrm{f}}{\partial\bar z}=0.$

Визначення. Функція $\mathrm{f}(z)$ називається голоморфною в точці z_0 тоді і тільки тоді, коли існує окіл U_{z_0} точки z_0, у якому вона визначена і

$\mathbb{C}$-диференційована. Функція $\mathrm{f}(z)$ називається голоморфною в області D тоді і тільки тоді, коли вона голоморфна у кожній точці області D.

Визначення. Функція $\mathrm{u}(x,y)$ називається гармонічною в області D, якщо $\mathrm{u}(x,y) \in \mathrm{C}^2(D)$ та $\dfrac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial y^2} = 0$.

Наступні теореми показують зв'язок між голоморфними та гармонічними функціями.

Теорема. Нехай $\mathrm{f}(z)$ голоморфна в області D функція. Тоді $\mathrm{u}(x,y) = \mathrm{Re}(\mathrm{f}(z))$ – гармонічна функція в області D.

Теорема. Нехай функція $\mathrm{u}(x,y)$ – гармонічна функція в однозв'язній області D. Тоді існує така голоморфна в області D функція $\mathrm{f}(z)$, що $\mathrm{Re}(\mathrm{f}(z)) = \mathrm{u}(x,y)$.

Зауважимо, що функція $\mathrm{f}(z)$ визначена з точністю до сталої.

Визначення. Гармонічна в області D функція $\mathrm{v}(x,y)$ називається спряженою функцією до гармонічної в області D функції $\mathrm{u}(x,y)$, якщо для них виконуються умови Коші–Рімана, тобто $\dfrac{\partial \mathrm{u}(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial \mathrm{v}(x,y)}{\partial y}$ та $\dfrac{\partial \mathrm{u}(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial \mathrm{v}(x,y)}{\partial x}$.

Приклад 6.1. *Знайти функцію, що є спряженою до функції* $\mathrm{u}(x,y) = \cos(x)\operatorname{ch}(y)$.

Перевіримо, що функція $\mathrm{u}(x,y) = \cos(x)\operatorname{ch}(y)$ гармонічна. За означенням, функція $\mathrm{u}(x,y)$ – гармонічна, якщо $\dfrac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial y^2} = 0$. Маємо:

$\dfrac{\partial^2(\cos(x)\operatorname{ch}(y))}{\partial x^2} = -\cos(x)\operatorname{ch}(y)$, $\quad \dfrac{\partial^2(\cos(x)\operatorname{ch}(y))}{\partial y^2} = \cos(x)\operatorname{ch}(y)$, тобто ця функція гармонічна.

Функцією, спряженою до гармонічної функції $\mathrm{u}(x,y)$, називається така гармонічна функція $\mathrm{v}(x,y)$, що для пари u,v виконуються умови Коші–Рімана.

Тобто функція $\mathrm{v}(x,y)$ задовольняє наступній системі рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} = \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} = -\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} = -\sin(x)\operatorname{ch}(y), \\ \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} = -\cos(x)\operatorname{sh}(y). \end{cases}$$

Проінтегруємо перше рівняння відносно y, далі, підставляючи знайдене у друге рівняння, отримаємо:

$$\begin{cases} -\sin(x)\operatorname{ch}(y) = \dfrac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \ v = -\sin(x)\operatorname{sh}(y) + C(x), \\ \qquad -\cos(x)\operatorname{sh}(y) = \dfrac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \ C(x) = C. \end{cases}$$

Тоді $v(x, y) = -\sin(x)\operatorname{sh}(y) + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Тест 6.1. Умови Коші–Рімана. Гармонічні функції

В тесті можливі декілька правильних варіантів відповіді, необхідно обрати всі.

Варіант 1

1. Обрати точки, у яких $\mathbb{C}$-диференційована функція $\operatorname{Im}(z)i$.

А	Б	В	Г
0	1	i	Таких точок немає

2. Обрати точки, у яких $\mathbb{C}$-диференційована функція $(z-1)\overline{z} + z|z|^2$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$	0	Таких точок немає

3. Обрати точки, у яких $\mathbb{C}$-диференційована функція $2x^2y^2 + i(x+y^2)$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2} - i$	$-\dfrac{1}{2} - i$

4. Серед наступних функцій обрати гармонічні.

А	Б	В	Г
$\ln(x^2 - y^2)$	$x^2 + y^2$	$x^2 - y^2$	$\ln(x^2 + y^2)$

5. Чи є гармонічною функція $u(x, y) = e^x \cos(y) + x$?

А	Б	В
Так	Ні	Залежить від області визначення

6. Для функції $\mathrm{u}(x,y)=xy$ обрати спряжену функцію у пару.

А	Б	В	Г
$\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}$	$\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}$	x^2-y^2	x^2+y^2

7. Для функції $\mathrm{u}(x,y)=x^2-y^2$ обрати спряжену функцію у пару.

А	Б	В	Г
$2xy+C$	$2y+C$	$2x+C$	$2x+2y+C$

8. Знайти аналітичну функцію $\mathrm{f}(z)=\mathrm{u}(x,y)+i\,\mathrm{v}(x,y)$ за її дійсною частиною $\mathrm{u}(x,y)=e^x\cos(y)$ за умови, що $\mathrm{f}(0)=1$.

А	$e^x\cos(y)-ie^x\sin(y)$	Б	e^z
В	$e^x\cos(y)-ie^x\sin(y)+1$	Г	e^z+1

9. Нехай $\mathrm{f}(z)$ диференційована у точці $z_0=x_0+iy_0$. Обрати правильну рівність.

А	$\mathrm{f}'(z_0)=\mathrm{u}'_x(x_0,y_0)+i\,\mathrm{v}'_x(x_0,y_0)$	Б	$\mathrm{f}'(z_0)=\mathrm{u}'_x(x_0,y_0)-i\,\mathrm{v}'_x(x_0,y_0)$
В	$\mathrm{f}'(z_0)=\mathrm{u}'_y(x_0,y_0)+i\,\mathrm{v}'_y(x_0,y_0)$	Г	$\mathrm{f}'(z_0)=\mathrm{v}'_y(x_0,y_0)+i\,\mathrm{u}'_x(x_0,y_0)$

10. Функція $\mathrm{f}(z)=2xy-i(x^2-y^2)$ диференційована у деякій точці $z_0=x_0+iy_0$ комплексної площини. Обрати формулу для обчислення її похідної у точці z_0.

А	$\mathrm{f}'(z_0)=2x_0+2y_0-i(2x_0-2y_0)$	Б	$\mathrm{f}'(z_0)=2y_0-2ix_0$
В	$\mathrm{f}'(z_0)=2y_0+2ix_0$	Г	$\mathrm{f}'(z_0)=2x_0+2iy_0$

Варіант 2

1. Обрати точки, у яких $\mathbb{C}$-диференційована функція $|z|^2+z$.

А	Б	В	Г
1	0	$-i$	Таких точок немає

2. Обрати точки, у яких $\mathbb{C}$-диференційована функція $(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)$.

А	Б	В	Г
$1-i$	0	$1+i$	$2-2i$

3. Обрати точки, у яких £-диференційована функція $e^{x^2-y^2+2xyi}$.

А	Б	В	Г
0	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	Таких точок немає

4. Серед наступних функцій обрати ті, що НЕ є гармонічними.

А	Б	В	Г
$e^x \sin(y)$	x^2	$xy+x^2-y^2$	$xy+x^2+y^2$

5. Чи є гармонічною функція $\mathrm{u}(x,y)=e^x\sin(y)+y$?

А	Б	В	Г
Так	Ні	Залежить від області визначення	Неможливо визначити

6. Чи будуть функції $\mathrm{u}(x,y)=e^x\cos(y)+x$ та $\mathrm{v}(x,y)=e^x\sin(y)+y$ парою спряжених гармонічних функцій?

А	Б	В
Так	Ні	Залежить від області, у якій розглядається функція

7. Для функції $\mathrm{u}(x,y)=x$ обрати спряжену функцію у пару.

А	Б	В	Г
$y+C$	$-y+C$	$x+C$	$-x+C$

8. Для функції $\mathrm{u}(x,y)=x^2-y^2+x$ обрати спряжену функцію у пару.

А	Б	В	Г
$2xy+x$	$2xy-y$	$2xy$	$2xy+y$

9. Знайти аналітичну функцію $\mathrm{f}(z)=\mathrm{u}(x,y)+i\,\mathrm{v}(x,y)$ за її уявною частиною $\mathrm{v}(x,y)=y+x+2xy$ за умови, що $\mathrm{f}(1)=i$.

А	$(x^2+y^2+x+y+2)+i(y+x+2xy)$	Б	$(x^2+y^2+x+y-2)+i(y+x+2xy)$
В	$(x^2-y^2+x-y-2)+i(y+x+2xy)$	Г	Такої функції не існує

10. Функція $f(z)=x^2+iy^2$ диференційована у деякій точці $z_0=x_0+iy_0$ комплексної площини. Обрати правильну рівність.

А	Б	В	Г
$\dfrac{df}{dz}(z_0)=2x_0^2+2iy_0^2$	$\dfrac{df}{dz}(z_0)=2x_0$	$\dfrac{df}{dz}(z_0)=2x_0^2$	$\dfrac{df}{dz}(z_0)=2iy_0$

7. Криволінійні інтеграли. Теорема Коші

Визначення. Нехай $\gamma=\{z(t):[a,b]\to\mathbb{C}\}$ – кусково-гладка крива, $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$, $\hat{t}_j\in[t_{j-1},t_j)$, $\hat{z}_j=z(\hat{t}_j)$, $z_j=z(t_j)$, $diam=\max\limits_j\left|t_j-t_{j-1}\right|$. Комплексною інтегральною сумою називається сума вигляду $\sum\limits_{j=1}^{n}f(\hat{z}_j)(z_j-z_{j-1})$. Інтегралом від функції $f(z)$ вздовж кривої γ називається $\int\limits_{\gamma}f(z)dz=\lim\limits_{diam\to 0}\sum\limits_{j=1}^{n}f(\hat{z}_j)(z_j-z_{j-1})$. Зауважимо, що для неперервних функцій ця границя існує завжди, отже, із неперервності функції $f(z)$ випливає інтегрованість $f(z)$.

Враховуючи, що $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $dz=dx+idy$, отримаємо

$$\int\limits_{\gamma}f(z)dz=\int\limits_{\gamma}u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\int\limits_{\gamma}v(x,y)dx+u(x,y)dy.$$

Таким чином, інтеграл від функції $f(z)$ вздовж кривої γ є сумою двох криволінійних інтегралів другого роду і тому на нього можна поширити всі властивості криволінійного інтеграла другого роду, основні з яких:

- лінійність $\int\limits_{\gamma}(\alpha f(z)+\beta g(z))dz=\beta\int\limits_{\gamma}g(z)dz+\alpha\int\limits_{\gamma}f(z)dz$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$;
- адитивність $\int\limits_{\gamma}f(z)dz=\int\limits_{\gamma_1}f(z)dz+\int\limits_{\gamma_2}f(z)dz$, $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$, γ_1 та γ_2 не перетинаються;
- якщо $\gamma=\{z(t):[a,b]\to\mathbb{C}\}\in C^1([a,b])$, $z'(t)\neq 0$, то $\int\limits_{\gamma}f(z)dz=\int\limits_{a}^{b}f(z(t))z'(t)dt$.

Теорема (про оцінку интеграла). Нехай $\gamma=\{z(t):[a,b]\to\mathbb{C}\}$ – кусково-гладка спрямлювана крива, $f(z)$ неперервна на γ, L – довжина γ, $M=\max\limits_{\gamma}\left|f(z)\right|$. Тоді $\left|\int\limits_{\gamma}f(z)dz\right|\le ML$.

Визначення. Первісною функції $f(z)$ в області D називається функція $F(z)$ така, що $\forall z \in D$. Первісною функції $f(z)$ вздовж кривої γ називається функція $F(z)$ така, що $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in \gamma$.

Якщо в околі будь-якої точки $z_0 \in D$ існує функція $F(z)$ така, що $F'(z) = f(z)$ для будь-якої точки z з цього околу, то будемо говорити, що первісна функції $f(z)$ існує локально.

Теорема (Ньютона–Лейбніца). Нехай $\gamma = \{z(t) : [a,b] \to \mathbb{C}\}$ – кусково-гладка спрямлювана крива, $f(z)$ неперервна на γ, $\exists F(z)$: $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in \gamma$, $z(a) = \alpha$, $z(b) = \beta$. Тоді $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = F(\alpha) - F(\beta)$.

Якщо γ замкнена, то з формули Ньютона–Лейбніца випливає, що $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$.

Теорема (Коші–Гурса). Нехай функція $f(z)$ голоморфна в обмеженій області D, неперервна на ∂D. Тоді $\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0$.

Приклад 7.1. Обчислити інтеграл $\int\limits_{C} (\sin(z) + \mathrm{Re}(z))dz$, C – трикутник із вершинами $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$.

Скористаємося лінійністю інтеграла: $\int\limits_{C} \sin(z)dz + \int\limits_{C} \mathrm{Re}(z)dz$ та зауважимо, що функція $\sin(z)$ аналітична у всій комплексній площині, тоді за теоремою Коші $\int\limits_{C} \sin(z)dz = 0$.

Для обчислення інтеграла $\int\limits_{C} \mathrm{Re}(z)dz$, представимо криву C у вигляді об'єднання відрізків $C = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, та розглянемо наступну параметризацію кривої C:

$\gamma_1 : z(t) = t,\ t \in [0,1)$ ($dz = dt$);

$\gamma_2 : z(t) = (2-t) + i(t-1),\ t \in [1,2)$ ($dz = -dt + idt$);

$\gamma_3 : z(t) = i(-t+3),\ t \in [2,3)$ ($dz = -idt$).

З адитивності інтеграла маємо $\int\limits_{C} \mathrm{Re}(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} \mathrm{Re}(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} \mathrm{Re}(z)dz + \int\limits_{\gamma_3} \mathrm{Re}(z)dz$.

Скористаємося формулою:

$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_{\gamma} v(x,y)dx + u(x,y)dy$, де $dx = \mathrm{Re}(dz)$,

$dy = \mathrm{Im}(dz)$, для кривих γ_i, $i = 1,2,3$. В нашому випадку $u(x, y) = x$, $v(x, y) = 0$, тобто $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} xdx + i\int\limits_{\gamma} xdy$.

Підставивши відповідні параметризації, отримаємо (рис.7.1):

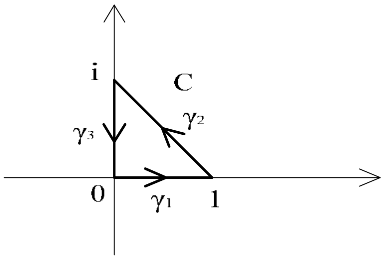


Рис. 7.1

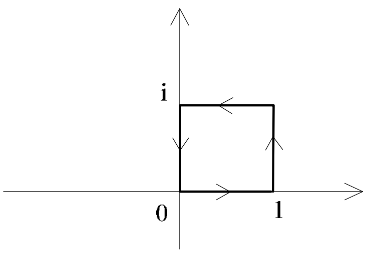
$\int\limits_{\gamma_1} \mathrm{Re}(z)dz = \int\limits_0^1 tdt = \frac{1}{2}$; $\int\limits_{\gamma_2} \mathrm{Re}(z)dz = \int\limits_1^2 (2-t)(-dt) + i\int\limits_1^2 (2-t)dt = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$;

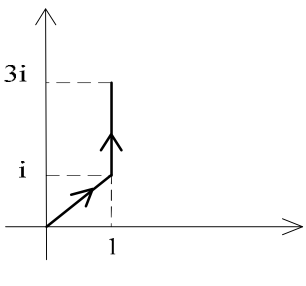
$\int\limits_{\gamma_3} \mathrm{Re}(z)dz = 0$. Тоді, $\int\limits_C \mathrm{Re}(z)dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + 0 = \frac{1}{2}i$.

Отже, $\int\limits_C (\sin(z) + \mathrm{Re}(z))dz = \frac{1}{2}i$.

Тест 7.1. Інтегрування вздовж кривої

Варіант 1





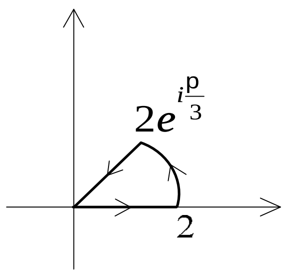


Рис. 7.2 Рис. 7.3 Рис. 7.4

1. Обрати правильну формулу для обчислення криволінійного інтеграла.

А	$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_C v(x,y)dx + u(x,y)dy$
Б	$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C u(x,y)dx + v(x,y)dy + i\int\limits_C v(x,y)dx + u(x,y)dy$
В	$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C u(x,y)dx + v(x,y)dy + i\int\limits_C v(x,y)dx - u(x,y)dy$
Г	$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C u(x,y)dx - v(x,y)dy - i\int\limits_C v(x,y)dx + u(x,y)dy$

2. Обрати правильну оцінку для абсолютного значення інтеграла $\int\limits_C (z^2+4)dz$, C – відрізок, що з'єднує точки $z=0$ и $z=1+i$, використовуючи теорему (про оцінку інтеграла).

А	Б	В	Г
$2\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$	$8\sqrt{2}$

3. Абсолютне значення інтеграла $\int\limits_{|z|=2} \frac{z^2+z+1}{z-1}dz$ за теоремою (про оцінку інтеграла) не перевищує:

А	Б	В	Г
π	28π	4π	32π

4. Обчислити інтеграл $\int\limits_C (2x-iy)dz$, $C=\{z\in\mathbb{C} : |z|=1,\ \mathrm{Re}(z)>0\}$.

А	Б	В	Г
0	2	$2+i\frac{3\pi}{2}$	$i\frac{3\pi}{2}$

5. Обчислити інтеграл $\int\limits_C \mathrm{Re}(z)dz$, C – відрізок, що з'єднує точки $z=i$ та $z=-i$.

А	Б	В	Г
0	2	$2i$	i

6. Обрати правильну параметризацію для кривої, що зображена на рис. 7.2.

А	$z(t)=\begin{cases} t, & 0\le t<1 \\ 1+(t-1)i, & 1\le t<2 \\ (t-3)+i, & 2\le t<3 \\ i(t-4), & 3\le t<4 \end{cases}$	Б	$z(t)=\begin{cases} t, & 0\le t<1 \\ 1+(t-1)i, & 1\le t<2 \\ (3-t)+i, & 2\le t<3 \\ i(4-t), & 3\le t<4 \end{cases}$
В	$z(t)=\begin{cases} t, & 0\le t<1 \\ 1+(t-1)i, & 1\le t<2 \\ (t-3)+i, & 2\le t<3 \\ i(4-t), & 3\le t<4 \end{cases}$	Г	$z(t)=\begin{cases} t, & 0\le t<1 \\ 1+(t-1)i, & 1\le t<2 \\ (3-t)+i, & 2\le t<3 \\ i(t-4), & 3\le t<4 \end{cases}$

7. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^2 (3t^2 - it)dt.$

А	Б	В	Г
$8 - 2i$	$8 + 2i$	$24 - 4i$	$24 + 4i$

8. Обрати правильну параметризацію для кривої, що зображена на рис. 7.3.

А	$z(t) = \begin{cases} t + it, \ 0 \le t < 1 \\ 1 + it, \ 1 \le t \le 3 \end{cases}$	Б	$z(t) = \begin{cases} t + it, 0 \le t < 1 \\ 1 + it, \ 0 \le t \le 2 \end{cases}$
В	$z(t) = \begin{cases} t + it, \ 0 \le t < 1 \\ it, \ 1 \le t \le 3 \end{cases}$	Г	$z(t) = \begin{cases} t, \ 0 \le t < 1 \\ 1 + it, \ 1 \le t \le 3 \end{cases}$

9. Обчислити інтеграл $\int\limits_{|z-2|=3} (z^2 - 2)dz.$

А	Б	В	Г
0	$4i$	$3 + 4i$	3

10. Обрати правильну параметризацію для кривої, що зображена на рис. 7.4.

А	$z(t) = \begin{cases} t, 0 \le t < 2 \\ 2e^{it}, 0 \le t < \dfrac{\pi}{3} \\ e^{i\frac{\pi}{3}}(5 - t), 3 \le t < 5 \end{cases}$	Б	$z(t) = \begin{cases} t, 0 \le t < 2 \\ 2e^{i\frac{\pi}{3}(t-2)}, 2 \le t < 3 \\ e^{i\frac{\pi}{3}}(t - 3), 3 \le t < 5 \end{cases}$
В	$z(t) = \begin{cases} t, 0 \le t < 2 \\ 2e^{it}, 0 \le t < \dfrac{\pi}{3} \\ e^{i\frac{\pi}{3}}(t - 3), 3 \le t < 5 \end{cases}$	Г	$z(t) = \begin{cases} t, 0 \le t < 2 \\ 2e^{i\frac{\pi}{3}(t-2)}, 2 \le t < 3 \\ e^{i\frac{\pi}{3}}(5 - t), 3 \le t < 5 \end{cases}$

Варіант 2

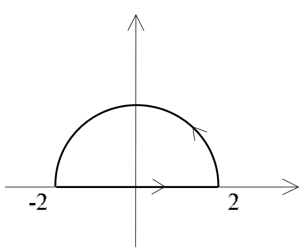


Рис. 7.5

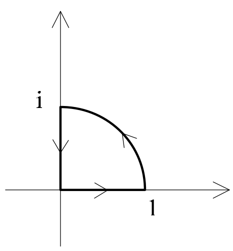


Рис. 7.6

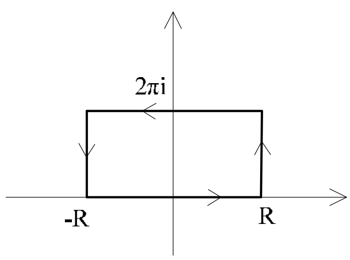


Рис. 7.7

1. Обрати правильну формулу для обчислення інтеграла $\int\limits_C f(z)dz$, де

$C=\{z(t), t\in[a,b]\}$ – гладка крива.

А	$\int\limits_C f(z)dz=\int\limits_a^b f(z(t))z(t)dt$	Б	$\int\limits_C f(z)dz=\int\limits_a^b f(z(t))z'(t)dt$
В	$\int\limits_C f(z)dz=\int\limits_a^b f(z(t))dt$	Г	$\int\limits_C f(z)dz=\int\limits_{z(a)}^{z(b)} f(z(t))z'(t)dt$

2. Використовуючи теорему (про оцінку інтеграла), обрати правильну оцінку для абсолютного значення інтеграла $\int\limits_C \frac{1}{z^2-2i}dz$,

$C=\{z\in\mathbb{C}: |z|=3,\ \mathrm{Im}(z)<0\}$.

А	Б	В	Г
$\frac{\pi}{14}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{3\pi}{7}$	$\frac{6\pi}{7}$

3. Абсолютне значення інтеграла $\int\limits_{|z|=R} \frac{1}{z-4}dz$, $R>4$ за теоремою (про оцінку інтеграла) не перевищує:

А	Б	В	Г
$\frac{R\pi}{R-4}$	$\frac{R\pi}{16}$	$\frac{2R\pi}{R-4}$	$\frac{R\pi}{4}$

4. Обчислити інтеграл $\int\limits_C \frac{1}{z}dz$, $C=\{z\in\mathbb{C}: |z|=5,\ \mathrm{Im}(z)>0\}$.

А	Б	В	Г
π	2π	πi	$2\pi i$

5. Обчислити інтеграл $\int\limits_C \mathrm{Im}(z)dz$, C – відрізок, що з’єднує точки $z=-1$ та $z=i-1$.

А	Б	В	Г
0	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}i$

6. Обрати правильну параметризацію для кривої, що зображена на рис. 7.5.

А	$z(t)=\begin{cases} 2e^{it}, & 0\le t<\pi \\ t, & -2\le t<2 \end{cases}$	Б	$z(t)=\begin{cases} 2e^{it}, & 0\le t<\pi \\ \dfrac{t}{\pi}-3, & \pi\le t<3\pi \end{cases}$
В	$z(t)=\begin{cases} 2e^{it}, & 0\le t<\pi \\ \dfrac{t}{\pi}-3, & \pi\le t<5\pi \end{cases}$	Г	$z(t)=\begin{cases} 2e^{2it}, & 0\le t<\dfrac{\pi}{2} \\ t, & -2\le t<2 \end{cases}$

7. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\pi} e^{(2-i)t}dt.$

А	$\left(-\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}i\right)(1+e^{2\pi})$	Б	$\left(-\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}i\right)e^{2\pi}$
В	$\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}i\right)e^{2\pi}$	Г	$\left(-\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}i\right)(1+e^{2\pi})$

8. Обрати правильну параметризацію для кривої, що зображена на рис. 7.6.

А	$z(t)=\begin{cases} 1+t, & -1\le t<0 \\ e^{it}, & 0\le t<\dfrac{\pi}{2} \\ i(2-t), & 1\le t<2 \end{cases}$	Б	$z(t)=\begin{cases} 1+t, & -1\le t<0 \\ e^{i\frac{\pi}{2}t}, & 0\le t<1 \\ i(2-t), & 1\le t<2 \end{cases}$
В	$z(t)=\begin{cases} 1+t, & -1\le t<0 \\ e^{it}, & 0\le t<\dfrac{\pi}{2} \\ i(-1+t), & 1\le t<2 \end{cases}$	Г	$z(t)=\begin{cases} 1+t, & -1\le t<0 \\ e^{i\frac{\pi}{2}t}, & 0\le t<1 \\ i(-1+t), & 1\le t<2 \end{cases}$

9. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z-3|=2} \dfrac{1}{z-3}dz.$

А	Б	В	Г
0	1	$2\pi i$	2π

10. Обрати правильну параметризацію для кривої, що зображена на рис. 7.7.

А	$z(t)=\begin{cases} t, & -R\le t<R \\ R+2\pi ti, & 0\le t<1 \\ -t+2\pi i, & -R\le t<R \\ -R-2\pi ti, & -1\le t<0 \end{cases}$
Б	$z(t)=\begin{cases} t, & -R\le t<R \\ R+2\pi(t-R)i, & R\le t<R+1 \\ 2R+1-t+2\pi i, & R+1\le t<3R+1 \\ -R+2\pi(-t+3R+2)i, & 3R+1\le t<3R+2 \end{cases}$
В	$z(t)=\begin{cases} t, & -R\le t<R \\ R+2\pi ti, & 0\le t<1 \\ t+2\pi i, & -R\le t<R \\ -R+2\pi ti, & 0\le t<1 \end{cases}$
Г	$z(t)=\begin{cases} t, & -R\le t<R \\ R+2\pi(-t+R+2)i, & R\le t<R+1 \\ 2R+1-t+2\pi i, & R+1\le t<3R+1 \\ -R+2\pi(t-3R-1)i, & 3R+1\le t<3R+2 \end{cases}$

8. Інтегрування. Інтегральна формула Коші

Теорема (Інтегральна формула Коші). Нехай функція $\varphi(z)$ – голоморфна в обмеженій області D, неперервна на ∂D, ∂D – спрямлювана крива (наприклад, кусково-гладка). Тоді $\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D}\frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)}d\xi$.

Наслідок. Нехай функція $\varphi(z)$ – голоморфна в обмеженій області D, неперервна на ∂D, ∂D – спрямлювана крива. Тоді $\forall z\in D$: $\varphi^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D}\frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)^{(n+1)}}d\xi$.

Отже, голоморфні функції є нескінченно диференційованими.

Зауважимо, що $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D}\frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)}d\xi=0$ при $\forall z\notin D$.

Приклад 8.1. *Обчислити інтеграл* $\int_C (e^z + 3z^2 + 2z)dz$, C – *довільна крива, що з'єднує точки* $z_1 = 0$ *та* $z_2 = 1+i$.

Відмітимо, що інтеграл не залежить від вибору кривої, тому що функція $f(z) = e^z + 3z^2 + 2z$ є голоморфною в усій комплексній площині, тому нехай C, наприклад, відрізок, що з'єднує точки $z_1 = 0$ та $z_2 = 1+i$. Знайдемо первісну цієї функції, тобто таку функцію $F(z)$, що $F'(z) = f(z)$, та скористаємося формулою Ньютона–Лейбніца, $\int_\gamma f(z)dz = F(z(b)) - F(z(a))$, де $\gamma = \{z(t) : [a,b] \to \mathbb{C}\}$.

Оскільки первісна визначена не єдиним чином, а з точністю до адитивної константи, то первісною функції $f(z) = e^z + 3z^2 + 2z$ буде, наприклад, функція $F(z) = e^z + z^3 + z^2$. Підставимо $F(z)$ у формулу Ньютона–Лейбніца, у нашому випадку $z(t) = t + it, t \in [0,1]$, $z(a) = 0$, $z(b) = 1+i$.

Отримаємо $\int_\gamma (e^z + 3z^2 + 2z)dz = e^z + z^3 + z^2 \Big|_{z=0}^{z=1+i} = e^{1+i} + 4i - 3$.

Приклад 8.2. *Обчислити інтеграл* $\oint_{|z|=3} \frac{z^4}{(z+2)}dz$.

Функція $f(z) = z^4$ голоморфна у всій комплексній площині, тому за інтегральною формулою Коші $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)}d\xi$, $z \in D$.

У нашому випадку: $\oint_{|z|=3} \frac{z^4}{(z+2)}dz = 2\pi i \cdot f(-2) = 2\pi i \cdot (-2)^4 = 32\pi i$.

Тест 8.1. Інтегрування. Інтегральна формула Коші

В тесті можливі декілька правильних варіантів відповіді, необхідно обрати всі.

Варіант 1

1. Нехай функція $f(z)$ голоморфна в області D, γ – гладка крива у D. Обрати правильну формулу.

А	$f^{(3)}(z) = \frac{3!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^4}d\xi$	Б	$f^{(3)}(z) = \frac{3!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3}d\xi$
В	$f^{(3)}(z) = \frac{4!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^4}d\xi$	Г	$f^{(3)}(z) = \frac{3!}{2\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^4}d\xi$

2. Обчислити інтеграл $\int\limits_C (e^z + \frac{1}{z})dz$, де $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

А	Б	В	Г
$\mathrm{sh}(1) + i\pi$	$-2\,\mathrm{sh}(1) + i\pi$	$\mathrm{ch}(1) + i\pi$	$\mathrm{ch}(1) - i\pi$

3. Обчислити інтеграл $\int\limits_{|z|=3} (z^2 + \frac{1}{(z-5)})dz$.

А	Б	В	Г
$-\frac{3i\pi}{5} + 15$	1	$2\pi i$	0

4. Нехай $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 3\}$. Обрати функції, що є голоморфними в D.

А	Б	В	Г
$f(z) = \frac{\sin(z)}{z - i}$	$f(z) = \frac{\cos(z)}{z + i}$	$f(z) = \frac{2\sin'(z)}{z + 5}$	$f(z) = z^2 + 1$

5. Обрати інтеграл, до якого можна застосувати теорему Коші–Гурса.

А	Б	В	Г
$\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z+2)}dz$	$\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z^2}dz$	$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{(z+2)}dz$	$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{\left(z - \frac{1}{3}\right)}dz$

6. За допомогою інтегральної формули Коші обчислити інтеграл

$$\int\limits_{|z+2|=3} \frac{2z}{z+2}dz.$$

А	Б	В	Г
$2\pi i$	-4	$-8\pi i$	$12\pi i$

7. За допомогою інтегральної формули Коші обчислити інтеграл

$$\int\limits_{|z+2|=3} \frac{\sin(z)}{z+3}dz.$$

А	Б	В	Г
$2\pi i \cdot \sin(-2)$	$2\pi i \cdot \sin(-3)$	$\sin(2)$	$\sin(3)$

8. Обрати правильну формулу для обчислення інтеграла $\oint\limits_{|z+1|=3} \frac{\sin(z)}{(z+3)^2}dz.$

А	Б	В	Г
$\frac{2\pi i(\sin(z))''}{2!}\Big\vert_{z=-3}$	$\frac{2\pi i(\sin(z))''}{2!}\Big\vert_{z=-1}$	$2\pi i(\sin(z))'\vert_{z=-3}$	$2\pi i(\sin(z))'\vert_{z=-1}$

9. За допомогою інтегральної формули Коші обчисліть інтеграл

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)(z+1)(z-3)}dz.$$

А	Б	В	Г
2π	$\frac{\pi i}{2}$	$-\frac{\pi i}{4}$	$\frac{\pi i}{4}$

10. Обрати первісну функції $f(z) = z^{2i}$.

А	Б	В	Г
$F(z) = z^{2i+1}$	$F(z) = \frac{z^{2i+1}}{2i+1}$	$F(z) = \frac{z^{2i-1}}{2i-1}$	Первісної не існує

Варіант 2

1. Нехай функція $f(z)$ голоморфна в області D, γ – гладка крива у D. Обрати правильну формулу.

А	$f^{(5)}(z) = \frac{5!}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^5}d\xi$	Б	$f^{(5)}(z) = \frac{5!}{2\pi}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^5}d\xi$
В	$f^{(5)}(z) = \frac{5!}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^6}d\xi$	Г	$f^{(5)}(z) = \frac{4!}{2\pi}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^4}d\xi$

2. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C (z^2 + \frac{1}{z})dz$, де $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

А	Б	В	Г
$9 - 2i\pi$	$9 - i\pi$	$18 + i\pi$	$-18 + i\pi$

3. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z|=3} \frac{1}{(z-4)(z+5)}dz.$

А	Б	В	Г
$\frac{3i\pi}{4}+20$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{2\pi i}{9}$

4. Нехай $D=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<3,\ \mathrm{Im}(z)>0\}$. Обрати функції, що є голоморфними в D.

А	Б	В	Г
$f(z)=\frac{e^z}{z+i}$	$f(z)=\frac{e^z}{z-i}$	$f(z)=\frac{2\sin'(z)}{z-i}$	$f(z)=z^2+1$

5. Обрати інтеграл, до якого НЕ вийде застосувати теорему Коші–Гурса.

А	Б	В	Г
$\oint\limits_{\|z\|=1} \frac{1}{z+15}dz$	$\oint\limits_{\|z\|=1} (e^z+z^2+\frac{1}{z-4})dz$	$\oint\limits_{\|z\|=1} \mathrm{tg}(z)dz$	$\oint\limits_{\|z\|=3} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)}dz$

6. За допомогою інтегральної формули Коші обчислити інтеграл

$$\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{\cos(z)}{z-1}dz.$$

А	Б	В	Г
$-2\pi i\cdot\cos(1)$	$2\pi i\cdot\cos(1)$	$2\pi i\cdot\cos(-1)$	$\cos(-1)$

7. За допомогою інтегральної формули Коші обчислити інтеграл

$$\oint\limits_{|z+1|=3} \frac{z^2}{z+2}dz.$$

А	Б	В	Г
$8\pi i$	$2\pi i$	$-2\pi i$	$-8\pi i$

8. Обрати правильну формулу для обчислення інтеграла $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z)}{(z+1)^3}dz.$

А	$\frac{2\pi i(\cos(z))^{(3)}}{3!}\Big\|_{z=-1}$	Б	$\frac{2\pi i(\cos(z))^{(3)}}{3!}\Big\|_{z=0}$
В	$\frac{2\pi i(\cos(z))'}{2!}\Big\|_{z=0}$	Г	$\frac{2\pi i(\cos(z))'}{2!}\Big\|_{z=-1}$

9. За допомогою інтегральної формули Коші обчислити інтеграл

$$\oint_{|z|=3} \frac{1}{(z-i)(z+i)(z-4i)} dz.$$

А	Б	В	Г
$\frac{2\pi i}{15}$	$-\frac{2\pi i}{15}$	$\frac{\pi i}{15}$	$-\frac{\pi i}{15}$

10. Обрати первісну функції $f(z) = \frac{z+1}{z}$.

А	Б	В	Г
$F(z) = 1 + \mathrm{Ln}(\lvert z \rvert)$	$F(z) = z + \mathrm{Ln}(\lvert z \rvert)$	$F(z) = z + \mathrm{Ln}(z)$	Первісної не існує

9. Ряди Лорана. Ізольовані особливі точки

Визначення. Рядом Лорана з центром у точці z_0 називається ряд вигляду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

Ряд $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n$ називається головною частиною ряду Лорана, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ – голоморфною (або правильною) частиною.

Теорема. Нехай $f(z)$ голоморфна у кільці $\{r < |z-z_0| < R\}$. Тоді $f(z)$ можна записати у вигляді ряду Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, причому $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$, $r < \rho < R$ (інтеграл не залежить від ρ).

За формулами Коші–Адамара, для ряду $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ областю збіжності буде область $\{r_c < |z-z_0| < R_c\}$, де $r_c = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$; $R_c = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$.

Точка z_0 називається ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, якщо $f(z)$ голоморфна в деякому $\{0 < |z-z_0| < R\}$, але не голоморфна в z_0.

Приклад 9.1. *Знайти область збіжності ряду* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^n+1}$.

Знайдемо область збіжності за формулою Коші–Адамара, а саме $r_c = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$; $R_c = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$.

Маємо наступне: $r_c = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{-n}+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{2^n+1}} = 1$; $R_c = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n+1}}} = 2.$

Тобто областю збіжності буде множина точок $\{1 < |z| < 2\}$.

Приклад 9.2. *Розкласти у ряд Лорана з центром у точці* $z = 0$ *функцію* $\mathrm{f}(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$ *у всіх можливих областях.*

Особливими точками функції $\mathrm{f}(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$ є точки $z = -1$ та $z = 2$. Тому областями, в яких має місце розкладання в ряд Лорана, будуть: $\{|z| < 1\}$, $\{1 < |z| < 2\}$, $\{2 < |z|\}$.

Розкладемо функцію на прості дроби: $\mathrm{f}(z) = \frac{1}{3}\frac{1}{(z-2)} - \frac{1}{3}\frac{1}{(z+1)}$.
Зауважимо, що для $|z| < 1$, справедлива формула суми геометричної прогресії $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$.

Розкладемо функцію у ряд Лорана в області $\{|z| < 1\}$:

$$\frac{1}{(z-2)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(\frac{z}{2}\right)} = \left[\left|\frac{z}{2}\right| < 1\right] = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}};$$

$$\frac{1}{(z+1)} = \frac{1}{1-(-z)} = \left[|z| < 1\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n .$$

Тому $\mathrm{f}(z) = -\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n\right) z^n$, $|z| < 1$.

Розкладемо функцію у ряд Лорана в області $\{1 < |z| < 2\}$:

$$\frac{1}{(z-2)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(\frac{z}{2}\right)}=\left[\left|\frac{z}{2}\right|<1\right]=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}};$$

$$\frac{1}{(z+1)}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-(-\frac{1}{z})}=\left[\left|\frac{1}{z}\right|<1\right]=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-1}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}z^n.$$

Тому $f(z)=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\frac{1}{3}\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}z^n,\ 1<|z|<2$.

Розкладемо функцію у ряд Лорана в області $\{2<|z|\}$:

$$\frac{1}{(z-2)}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\left(\frac{2}{z}\right)}=\left[\left|\frac{2}{z}\right|<1\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=-\infty}^{-1}2^{-n-1}z^n;$$

$$\frac{1}{(z+1)}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-(-\frac{1}{z})}=\left[\left|\frac{1}{z}\right|<1\right]=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-1}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}z^n;$$

Тому $f(z)=\frac{1}{3}\sum_{n=-\infty}^{-1}2^{-n-1}z^n-\frac{1}{3}\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}z^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{3}(2^{-n-1}+(-1)^n)z^n,\ |z|>2$.

Тест 9.1. Ряди Лорана

В тесті можливі декілька правильних варіантів відповіді, необхідно обрати всі.

Варіант 1

1. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{z+4}\right)^n$.

А	Б	В	Г
$\|z+4\|<1$	$\|z+4\|>1$	$\|z\|<4$	$0<\|z+4\|\le 1$

2. Вказати число доданків у головній частині ряду Лорана $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(z-i)^{n-2}}$.

А	Б	В	Г
1	2	3	Безліч

3. Вказати число доданків у голоморфній частині ряду Лорана $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-n-3}}{n!}$, вважаючи, що ряд розглянуто в околі нескінченності.

А	Б	В	Г
0	4	3	Безліч

4. В околі точки $z=-1$ отримано ряд Лорана $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{n!}$, обрати функцію, для якої записано цей ряд.

А	Б	В	Г
$f(z)=\sin(z+1)$	$f(z)=e^{(z+1)}$	$f(z)=\frac{1}{e^{(z+1)}}$	$f(z)=\frac{1}{1-(z+1)}$

5. Розкласти в ряд Лорана в області $\lvert z\rvert<1$ функцію $f(z)=\frac{1}{z-1}$.

А	Б	В	Г
$-\sum_{n=0}^{\infty} z^n$	$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$	$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

6. Розкласти в ряд Лорана в області $\lvert z\rvert>3$ функцію $f(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}$.

А	Б	В	Г
$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{z^{n+1}}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{z^{n+1}}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{z^n}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}+2^{n+1}}{z^{n+1}}$

7. Обрати область, де функція $f(z)=\frac{1}{1-e^{iz}}$ розкладається в ряд Лорана.

А	У будь-якому кільці	Б	$\lvert z\rvert>\pi$
В	$\pi<\lvert z-\pi\rvert<2\pi$	Г	$0<\lvert z-\pi\rvert<2\pi$

8. Скільки членів має голоморфна частина ряду Лорана в точці $z=0$ функції $f(z)=z^2+z+1-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^4}$?

А	Б	В	Г
2	1	3	4

9. Вказати область, у якій ряд Лорана функції $f(z)=\frac{e^z}{z-2}$ буде збігатися з рядом Тейлора.

А	Б	В	Г
$1<\lvert z\rvert<2$	$\lvert z\rvert>1$	$\lvert z\rvert<2$	$\lvert z-2\rvert<1$

10. Нехай $\varphi(z)$ – голоморфна у кільці $\{1<|z-1|<3\}$, її ряд Лорана має вигляд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-1)^n$. Обрати формулу для обчислення c_5.

А	$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\lvert\xi-1\rvert=2}\frac{\varphi(\xi)}{(\xi-1)^6}d\xi$	Б	$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\lvert\xi-1\rvert=4}\frac{\varphi(\xi)}{(\xi-1)^6}d\xi$
В	$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\lvert\xi-1\rvert=2}\frac{\varphi(\xi)}{(\xi-1)^5}d\xi$	Г	$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\lvert\xi\rvert=2}\frac{\varphi(\xi)}{(\xi-1)^5}d\xi$

Варіант 2

1. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{(z-3i)^n}$.

А	Б	В	Г
$\lvert z-3i\rvert<1$	$\lvert z-3i\rvert>1$	$\lvert z\rvert<3$	$0<\lvert z-3i\rvert<1$

2. Вказати кількість доданків у головній частині ряду Лорана $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2i)^{n-3}}{n+5}$.

А	Б	В	Г
0	4	2	Безліч

3. Обрати області, у яких можна виписати розкладання функції
$\varphi(z)=\dfrac{z+3}{(z-1)(z-3)}$ у ряд Лорана.

А	Б	В	Г
$1<\lvert z\rvert<2$	$\lvert z\rvert>1$	$1<\lvert z\rvert<3$	$\lvert z\rvert>3$

4. В околі точки $z=1$ отримано ряд Лорана $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Обрати функцію, для якої записано цей ряд.

А	Б	В	Г
$\varphi(z)=\sin(z-1)$	$\varphi(z)=\cos(z-1)$	$\varphi(z)=e^{(z-1)}$	$\varphi(z)=\dfrac{1}{(1-(z-1))^2}$

5. Розкласти в ряд Лорана в області $|z| < 2$ функцію $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$.

А	Б	В	Г
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{2^{n+1}}$	$-\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{2^n}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{2^n}$	$-\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{2^{n+1}}$

6. Розкласти в ряд Лорана в області $0 < |z| < 1$ функцію $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z}$.

А	Б	В	Г
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z+1)^n}{n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{n-1}}{n+1}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n-1}$

7. Обрати область, у якій функція $f(z) = \dfrac{1}{1-\sin(z)}$ може бути розкладена в ряд Лорана.

А	Б	В	Г
У будь-якому кільці	$\left\lvert z - \dfrac{\pi}{2} \right\rvert > \pi$	$0 < \left\lvert z - \dfrac{\pi}{2} \right\rvert < 2\pi$	$0 < \lvert z \rvert < 2\pi$

8. Скільки членів має головна частина ряду Лорана у точці $z = 0$ функції $f(z) = z^2 + z + 1 - \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{z^4}$?

А	Б	В	Г
2	1	3	4

9. Вказати область, у якій ряд Лорана функції $f(z) = \dfrac{e^{z+1}}{z}$ буде збігатися з рядом Тейлора.

А	Б	В	Г
$\lvert z \rvert < 2$	$\lvert z \rvert > \dfrac{1}{2}$	$\lvert z - 1 \rvert < 2$	$\lvert z + 1 \rvert < 1$

10. Нехай $f(z)$ – голоморфна у кільці $\{2 < |z-2| < 4\}$, її ряд Лорана має вигляд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-2)^n$. Обрати формулу для обчислення c_3.

А	$\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\lvert\xi-2\rvert=2}\dfrac{\varphi(\xi)}{(\xi-2)^3}d\xi$	Б	$\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\lvert\xi-2\rvert=1}\dfrac{\varphi(\xi)}{(\xi-2)^4}d\xi$
В	$\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\lvert\xi-2\rvert=3}\dfrac{\varphi(\xi)}{(\xi-2)^4}d\xi$	Г	$\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\lvert\xi\rvert=2}\dfrac{\varphi(\xi)}{(\xi-2)^3}d\xi$

10. Класифікація особливих точок

Класифікація ізольованих особливих точок:

1) Точка z_0 називається усувною особливістю функції $f(z)$, якщо ряд Лорана не містить головної частини, що еквівалентно обмеженості функції $f(z)$ у її околі, тобто $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) < \infty$. В цьому випадку можна усунути особливість, якщо визначити $f(z_0) := \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

2) Точка z_0 називається полюсом функції $f(z)$, якщо головна частина ряду Лорана містить скінченну (не менше одного) кількість членів, що еквівалентно тому, що $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Порядком полюса називається таке число p, що $c_{-p} \neq 0, \forall k > p : c_{-k} = 0$.

Критерій полюса: $f(z)$ має полюс порядку p у точці z_0 тоді і тільки тоді, коли $\dfrac{1}{f(z)}$ має у точці z_0 корінь кратності p (після усунення усувної особливості).

3) Точка z_0 називається істотною особливістю функції $f(z)$, якщо головна частина ряду Лорана містить нескінченно багато членів, що еквівалентно тому, що $\nexists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Насправді справедливе більш сильне твердження.

Теорема (Сохоцького–Вейєрштрасса). Якщо $f(z)$ має істотну особливість в точці z_0, то $\forall A \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}\ \exists z_n \to z_0 : f(z_n) \to f(z_0)$.

Точка $z = \infty$ є ізольованою особливою точкою $f(z)$, якщо $f(z)$ не голоморфна у, але $f(z)$ голоморфна у $\{\lvert z\rvert > R\}$.

Після розгляду функції $g(w) = f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ для вивчення ізольваної особливості $f(z)$ у точці $z = \infty$ можна вивчати особливість $g(w)$ у точці $w = 0$.

Приклад 10.1. *Класифікувати усі ізольовані особливі точки функції* $f(z)=\dfrac{\sin(z)}{(z+1)^2}$.

Особливими точками функції $f(z)=\dfrac{\sin(z)}{(z+1)^2}$ є $z=-1$ і $z=\infty$. Зауважимо, що ці особливості, очевидно, ізольовані.

Визначимо тип особливості у точці $z=-1$. Оскільки $\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{\sin(z)}{(z+1)^2}=\infty$, тому $z=-1$ – полюс. Точка $z=-1$ є коренем 2 кратності знаменника $(z+1)^2$ і не є коренем чисельника $\sin(z)$, причому $\sin(z)$ – голоморфна функція у точці $z=-1$. Тому у точці $z=-1$ функція $f(z)=\dfrac{\sin(z)}{(z+1)^2}$ має полюс другого порядку.

Класифікуємо особливу точку $z=\infty$. Оскільки $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\sin(z)}{(z+1)^2}=\begin{cases}0, & z=x\to\infty\\ \infty, & z=iy\to\infty\end{cases}$, то границі не існує, тому точка $z=\infty$ для $f(z)=\dfrac{\sin(z)}{(z+1)^2}$ є істотною особливою точкою.

Приклад 10.2. *Класифікувати усі ізольовані особливі точки функції* $f(z)=\dfrac{z}{\sin^2(z)}$.

Знайдемо корені функції $g(z)=\sin^2(z)$: $\sin(z)=0 \Leftrightarrow z=\pi k, k\in\mathbf{Z}$.

Отже, особливими точками функції $f(z)=\dfrac{z}{\sin^2(z)}$ будуть $z_k=\pi k, k\in\mathbf{Z}$ та $z=\infty$. Зауважимо, що точки вигляду $z_k=\pi k, k\in\mathbf{Z}$ ізольовані. Визначимо їх тип.

1) Нехай $k\neq 0$, тоді $z_k=\pi k$ не є коренем чисельника і є коренем знаменника другої кратності. Справді, $\sin^2(\pi k)=0$, $(\sin^2(z))'|_{z=\pi k}=(2\sin(z)\cos(z))|_{z=\pi k}=0$, $(\sin^2(z))''|_{z=\pi k}=(2\cos^2(z)-2\sin^2(z))|_{z=\pi k}=2\neq 0)$. Тобто у точках $z_k=\pi k,\ k\in\mathbf{Z},\ k\neq 0$, функція $f(z)=\dfrac{z}{\sin^2(z)}$ має полюси другого порядку.
2) Нехай $k=0$, тоді $z_0=0$ є коренем чисельника першої кратності й коренем знаменника другої кратності. Тобто у точці $z_0=0$ функція має полюс першого порядку.
3) Точка $z=\infty$ не є ізольованою особливістю, оскільки $\lim\limits_{k\to\infty}\pi k=\infty$. Тобто $z=\infty$ є граничною точкою для послідовності полюсів $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}=\{\pi k\}_{k=1}^{\infty}$.

Тест 10.1. Класифікація особливих точок

Варіант 1

1. Продовжіть висловлювання: «Якщо $f(z)$ голоморфна, то …»

А	$f(z)$ має особливу точку типу полюс	Б	Обов'язково $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$
В	Дійсна частина $f(z)$ є гармонічною функцією	Г	$f(z)$ має істотну особливість

2. Точка $z=4$ усувна особливість для $f(z)$. Скільки доданків міститься у головній частині ряду Лорана?

А	Б	В	Г
2	3	Неможливо визначити	0

3. Нехай $f(z)=\dfrac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$, тоді точка $z=0$:

А	Усувна особливість	Б	Полюс
В	Точка розгалуження	Г	Істотна особливість

4. Якщо особлива точка функції $f(z)$ є граничною точкою для послідовності усувних особливостей, то в цій точці у $f(z)$:

А	Усувна особливість	Б	Полюс
В	Неможливо визначити	Г	Істотна особливість

5. Визначити тип особливої точки $z=0$ функції $f(z)=\dfrac{1}{1-\cos(z)}$.

А	Усувна особливість	Б	Полюс 1 порядку
В	Полюс 2 порядку	Г	Істотна особливість

6. У точці $z=a$ функція $f(z)$ має корінь 2 кратності, $g(z)$ має корінь 3 кратності, тоді $F(z)=\dfrac{g(z)}{f(z)}$ має у точці $z=a$:

А	Усувну особливість	Б	Полюс 1 порядку
В	Полюс 2 порядку	Г	Істотну особливість

7. У точці $z=a$ функція $f(z)$ має полюс 1 порядку, тоді $F(z)=e^{f(z)}$ має у точці $z=a$:

А	Усувну особливість	Б	Полюс 1 порядку
В	Полюс 2 порядку	Г	Істотну особливість

8. Визначити тип особливої точки $z=0$ функції $f(z)=\dfrac{\sin(2z)-2z}{z-\dfrac{z^3}{6}}$.

А	Усувна особливість	Б	Полюс 1 порядку
В	Полюс 2 порядку	Г	Істотна особливість

9. Визначити тип особливої точки $z=1$ функції $f(z)=\dfrac{1}{\sin(z-1)}$.

А	Усувна особливість	Б	Полюс 1 порядку
В	Неізольована, гранична для полюсів	Г	Істотна особливість

10. Визначити тип особливої точки $z=\infty$ функції $f(z)=\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z^4}+z-z^3$.

А	Полюс 2 порядку	Б	Полюс 4 порядку
В	Полюс 3 порядку	Г	Істотна особливість

Варіант 2

1. Якщо для цілої функції $f(z)$ виконується $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=3$, то $f(5)$ дорівнює:

А	Б	В	Г
5	3	Неможливо визначити	0

2. Нехай $z=a$ ізольована особливість для функції $f(z)$, та $\exists\lim\limits_{z\to a} f(z)$. Тоді точка $z=a$:

А	Усувна особливість	Б	Полюс
В	Неможливо визначити	Г	Істотна особливість

3. Нехай $f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{z}}$, тоді точка $z=0$:

А	Усувна особливість	Б	Полюс
В	Точка розгалуження	Г	Істотна особливість

4. У точці $z=0$ функція $f(z)$ має корінь 2 кратності, тоді $F(z)=\frac{1}{f(z)}$ має у точці $z=0$:

А	Усувну особливість	Б	Полюс 1 порядку
В	Полюс 2 порядку	Г	Істотну особливість

5. Визначити тип особливої точки $z=0$ функції $f(z)=\frac{2z}{1-\cos z}$.

А	Усувна особливість	Б	Полюс 1 порядку
В	Полюс 2 порядку	Г	Істотна особливість

6. У точці $z=a$ функція $f(z)$ має корінь 1 кратності, $g(z)$ має корінь 3 кратності, тоді $F(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ має у точці $z=a$:

А	Усувну особливість	Б	Полюс 1 порядку
В	Полюс 2 порядку	Г	Істотну особливість

7. У точці $z=a$ функція $f(z)$ має корінь 1 кратності, тоді $F(z)=e^{f(z)}$ має у точці $z=a$:

А	Усувну особливість	Б	Полюс 1 порядку
В	Полюс 2 порядку	Г	Не має особливості

8. Визначити тип особливої точки $z=0$ функції $f(z)=z\sin\frac{2}{z^2}$.

А	Усувна особливість	Б	Полюс 1 порядку
В	Полюс 2 порядку	Г	Істотна особливість

9. Визначити тип особливої точки $z=\frac{1}{2}$ функції $f(z)=\mathrm{tg}\pi z$.

А	Усувна особливість	Б	Полюс 1 порядку
В	Неізольована особливість	Г	Істотна особливість

10. Визначити тип особливої точки $z=2$ функції

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{(z-2)^3}+(z-2).$$

А	Полюс 1 порядку	Б	Полюс 2 порядку
В	Полюс 3 порядку	Г	Істотна особливість

11. Питання для самоперевірки

1. Нехай $f(z)$ – голоморфна функція в області D, та $\mathrm{Re}(f(z))$ – константа. Чи можна стверджувати, що $f(z)$ – константа в області D? Чи можна стверджувати, що якщо $|f(z)|$ – постійний, то $f(z)$ – константа?
2. Нехай $f(z)$ – голоморфна функція в області D. Чи можна стверджувати, що $f'(z)$ – голоморфна функція в області D?
3. Куди проектуються прямі, що проходять через точку $z=0$ під час стереографічної проекції?
4. Як розташовані на сфері Рімана образи спряжених точок?
5. Якою є проекція одиничного кола на сферу Рімана?
6. Чи правильно, що операції спряження та множення комутують, тобто що $\overline{z}\cdot\overline{w}=\overline{zw}$?
7. Нехай $z=x+iy\neq 0$ – комплексне число. Скільки різних значень має $\sqrt[n]{z}$?
8. Нехай $f(z)$ – $\mathbb{C}$-диференційовна функція в області D. Чи буде $f(z)$ – $\mathbf{R}$-диференційованою функцією в області D?
9. Чи може функція бути $\mathbb{C}$-диференційованою в точці, але не голоморфною у цій точці?
10. Чи можна стверджувати, що дійсна (уявна) частина голоморфної в області D функції $f(z)$ є гармонічною?
11. Чи для будь-якої гармонічної $u(x,y)$ функції в області D можна знайти голоморфну в області D функцію $f(z)$ таку, що $\mathrm{Re}(f(z))=u(x,y)$?
12. Чи можна стверджувати, що гармонічні у деякій області функції нескінченно диференційовані у цій області?
13. Нехай $f(z)$ – голоморфна функція в області D, $L\subset D$ – крива в D, причому $f(z)$ голоморфна у деякому околі L. У якому випадку можна стверджувати, що $\oint\limits_L f(z)dz=0$?
14. Чи правильно, що $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Leftrightarrow\frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}}=0$?
15. Чи правильно, що композиція двох аналітичних функцій є аналітичною функцією?
16. Який зв'язок між алгебраїчною та тригонометричною формами запису комплексного числа?
17. Чи є обмеженою область значень функції $\sin(z)$?
18. Яка умова необхідна для того, щоб точки z_1, z_2, z_3 лежали на одному колі з центром у точці $z=0$?

19. Чи існують точки, у яких функція e^z дорівнює 0?
20. Якій умові має задовольняти $z \in \mathbb{C}$, щоб виконувалося $z = \overline{z}$?
21. Якій умові має задовольняти $z \in \overline{\mathbb{C}}$, щоб виконувалося $\frac{1}{z} = \overline{z}$?
22. Чи правильно, що диференційована в z_0 функція буде неперервною в z_0?
23. Чи може точка $z = \infty$ бути усувною для деякої функції $f(z)$?
24. Чи будь-яку функцію $f(z)$ можна подати у вигляді $f = u + iv$?
25. В якому разі ряд Лорана функції $f(z)$ збігається з рядом Тейлора?

12. Список літератури

1. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1985. – Т. 1. – 571 с.
2. Титчмарш Е. Теория функций / Е. Титчмарш. – М. : Наука, 1981. – 463 с.
3. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 749 с.
4. Сборник задач по теории аналитических функций / под ред. М. А. Евграфова. – М. : Наука, 1972. – 416 с.
5. Евграфов М. А. Аналитические функции / М. А. Евграфов. – М. : Наука, 1978. – 471 с.
6. Гурвиц А. Теория функций / А. Гурвиц, П. Курант. – М. : Наука, 1968. – 648 с.
7. Ahlfors L. Complex analysis / L. Ahlfors. – N.J. : Kluver, 1981. – 317 p.
8. Комплексний аналіз / А. А. Гольдберг, М. М. Шеремета, М. В. Заболоцький, О. Б. Скасків. – Львів : Афіша, 2002. – 242 с.
9. Краєвський В. О. Функції комплексної змінної / В. О. Краєвський. – Вінниця : Вид-во Вінницького нац. техн. ун-ту, 2013. – 142 с.

Навчальне видання

Гиря Наталія Петрівна
Карпенко Ірина Миколаївна

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ З ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Навчально-методичний посібник
для студентів 3 курсу факультету математики і інформатики

Коректор *А. І. Самсонова*
Комп'ютерне верстання *Н. П. Гиря, І. М. Карпенко*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 3,26. Наклад 100 пр. Зам. № 14/17.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел. 705-24-32