22.16
С 23
УДК 517

Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.
Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: Учебное пособие/Под ред. Л. Д. Кудрявцева.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.— 592 с.

Использован большой набор оригинальных задач, предлагавшихся в течение многих лет студентам Московского физико-технического института. Много внимания уделено задачам, способствующим уяснению фундаментальных понятий.

Все задачи снабжены ответами, приводятся решения типичных примеров и задач.

Для студентов университетов и втузов с повышенной программой по математике.

Ил. 117.

Рецензенты:
кафедра высшей математики Московского энергетического института (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук профессор *С. И. Похожаев*),
доктор физико-математических наук профессор *В. А. Ильин*

Лев Дмитриевич Кудрявцев, Александр Дмитриевич Кутасов, Валерий Иванович Чехлов, Михаил Иванович Шабунин

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Предел. Непрерывность. Дифференцируемость

Редактор *А. Ф. Лапко*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр* Корректоры *Н. Б. Румянцева* и *Е. В. Сидоркина*

ИБ № 11649

Сдано в набор 21.11.83. Подписано к печати 05.11.84. Формат 60×90 1/16. Бумага книжно-журнальная. Литературная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 37. Усл. кр.-отт. 37,25. Уч.-изд. л. 41,51. Тираж 50 000 экз. Заказ № 871. Цена 1 р. 60 к.

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

С $\frac{1702050000-177}{053(02)-84}$ 164-84

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый читателю «Сборник задач по математическому анализу» состоит из четырех глав.

Первая глава содержит материал, освоение которого имеет целью подготовить читателя к решению задач по математическому анализу. Во второй главе представлены задачи, относящиеся к таким понятиям, как предел и непрерывность функции. В третьей и четвертой главах собраны задачи, связанные с понятиями производной и дифференциала и применением производных к исследованию функций.

При составлении сборника авторы опирались на многолетний опыт преподавания курса математического анализа в Московском физико-техническом институте. В сборнике содержится большое число оригинальных задач, составленных преподавателями кафедры высшей математики МФТИ и используемых в работе со студентами. Значительная часть задач сборника подготовлена авторами. В сборник включены задачи из широкоизвестных изданий и, в частности, из сборника задач по математическому анализу Б. П. Демидовича и сборника задач по высшей математике Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина.

Каждый параграф сборника содержит теоретические сведения, примеры решения типовых задач и задачи для самостоятельной работы. Задачи каждого параграфа сгруппированы по темам и каждая группа задач расположена в порядке возрастания трудности — от совершенно простых до достаточно сложных.

Большое внимание в сборнике уделено задачам, способствующим усвоению фундаментальных понятий математического анализа. Большой набор задач, иллюстрирующих ту или иную тему, дает возможность преподавателю использовать задачник для работы в аудитории, для домашних заданий и при составлении контрольных работ.

Сборник задач предназначается в основном для вузов с расширенной программой по математике. Наличие большого числа задач разной трудности дает возможность использовать задачник как в университетах, так и в технических вузах.

Авторы выражают глубокую благодарность коллективу кафедры высшей математики МФТИ, многолетняя плодотворная работа которого в значительной степени способствовала появлению этого сборника.

ГЛАВА I
ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Множества. Комбинаторика

1. Множества. Понятие множества и его элементов является первичным понятием в математике. Множества обозначают большими буквами какого-либо алфавита, обычно латинского; элементы множества — малыми буквами. Для некоторых наиболее важных множеств приняты стандартные обозначения. Так, например, буквами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ обозначают соответственно *множества натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел.*

Если объект a является элементом множества A, то пишут $a \in A$ или $A \ni a$. Читают эти записи так: «a принадлежит множеству A» или «множество A содержит элемент a». Запись $a \notin A$ означает, что объект a не является элементом множества A. Например,

$$1 \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \quad \pi \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \quad \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}.$$

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то пишут $A \subset B$ или $B \supset A$ и говорят, что множество A является *подмножеством множества* B. В этом случае говорят также, что A содержится в B или что B содержит A. Из определения подмножества следует, что $A \subset A$, т. е. каждое множество является своим подмножеством. Из определения следует также, что если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$. Примеры включений:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Если существует элемент $a \in A$ такой, что $a \notin B$, то множество A не является подмножеством множества B. В этом случае пишут $A \not\subset B$ или $B \not\supset A$.

Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называют равными. Если множества A и B равны, то пишут $A = B$; в противном случае пишут $A \neq B$.

Множества A и B равны тогда и только тогда, когда истинны включения $A \subset B$ и $B \subset A$.

Для выделения подмножества M множества U часто используют какое-либо свойство p, присущее элементам множества M и только им, — характеристическое свойство элементов множества M. В этом случае пишут

$$M = \{x \in U \mid p\},$$

что означает, что множество M состоит из тех и только тех элементов множества U, которые обладают свойством p *).

Например, запись

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

означает, что $\mathbb{R}_+$ есть множество положительных действительных чисел.

Может случиться, что свойством p не обладает ни один элемент множества U. Тогда подмножество $\{x \in U \mid p\}$ не содержит элементов множества U и называется *пустым подмножеством*.

Например, подмножества

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x + 2 = 1\}, \quad \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq x\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$$

являются пустыми подмножествами соответственно множества натуральных, рациональных, действительных чисел. Пустое подмножество обозначается специальным знаком $\varnothing$ и считается подмножеством любого множества.

Если $M \subset U$ и $M \neq \varnothing$, $M \neq U$, то множество M называется *собственным* подмножеством множества U. Подмножества $\varnothing$ и U множества U называются *несобственными*.

Пример 1. Указать все подмножества трехэлементного множества $\{a, b, c\}$.

△ Трехэлементное множество имеет несобственные подмножества $\varnothing$ и $\{a, b, c\}$ и шесть собственных подмножеств: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$. Всего восемь подмножеств. ▲

2. Операции над множествами. Пусть A и B — произвольные множества.

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B, называется *объединением множеств* A и B и обозначается $A \cup B$.

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B, называется *пересечением множеств* A и B и обозначается $A \cap B$.

Например, если $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, то

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A \cap B = \{2, 3\}.$$

Если $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$, то

$$A \cup B = \mathbb{R}, \quad A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}.$$

Если $A \cap B = \varnothing$, то говорят, что множества A и B не пересекаются.

Операции объединения и пересечения обладают следующими свойствами:

1) коммутативности

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A;$$

*) Если рассматриваются только подмножества некоторого основного множества U, то указание $x \in U$ часто опускают и пишут $M = \{x \mid p\}$.

2) ассоциативности

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

3) дистрибутивности

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

4) идемпотентности

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

Если $a \in A$ и $b \in B$, то пару элементов a и b, записанную в виде $(a; b)$, называют *упорядоченной парой*, причем считают, что пары $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$ равны тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Множество, элементами которого являются все упорядоченные пары $(a; b)$, $a \in A$, $b \in B$, называется *прямым* или *декартовым произведением множеств* A и B и обозначается $A \times B$.

Например, если $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, то

$$A \times B = \{(1; 2), (1; 3), (2; 2), (2; 3)\},$$
$$B \times A = \{(2; 1), (2; 2), (3; 1), (3; 2)\}.$$

Прямое произведение не подчиняется коммутативному закону. Равенство $A \times B = B \times A$ справедливо только в случае, когда $A = B$. Произведение $A \times A$ называют *декартовым квадратом* и обозначают A^2. Например, декартов квадрат $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ есть множество $(x; y)$ всех декартовых координат точек плоскости.

Множество, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B, называется *разностью множеств* A и B и обозначается $A \setminus B$.

Например, если $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, то

$$A \setminus B = \{1\}, \quad B \setminus A = \{4, 5\}.$$

Если $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$, то

$$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}, \quad B \setminus A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}.$$

Если $A \subset B$, то разность $B \setminus A$ называют *дополнением множества A до множества B* и обозначают A'_B.

В тех случаях, когда рассматриваются только подмножества некоторого основного множества U, дополнение множества M до множества U называют просто дополнением M и вместо M'_U пишут просто M'.

Непосредственно из определения дополнения множества следуют равенства

$$M \cup M' = U, \quad M \cap M' = \varnothing, \quad (M')' = M.$$

Для любых подмножеств A и B множества U справедливы также следующие равенства, которые называют *законами двойственности* или *законами де Моргана*:

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B',$$

т. е. дополнение объединения двух множеств равно пересечению их дополнений, а дополнение пересечения двух множеств равно объединению их дополнений.

Пример 2. Доказать закон двойственности:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

$\triangle$ Пусть $x \in (A \cap B)'$, тогда $x \notin A \cap B$ и, следовательно, $x \notin A$ или $x \notin B$, т. е. $x \in A'$ или $x \in B'$, а это означает, что $x \in A' \cup B'$. Таким образом, доказано включение

$$(A \cap B)' \subset A' \cup B'.$$

Пусть $x \in A' \cup B'$, тогда $x \in A'$ или $x \in B'$ и, следовательно, $x \notin A$ или $x \notin B$, т. е. $x \notin A \cap B$, а это означает, что $x \in (A \cap B)'$. Таким образом, доказано включение

$$A' \cup B' \subset (A \cap B)'.$$

Из включений $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$ и $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$ следует, что множества $(A \cap B)'$ и $A' \cup B'$ состоят из одних и тех же элементов, т. е. равны. $\blacktriangle$

3. Эквивалентные и неэквивалентные множества. Говорят, что между множествами A и B установлено *взаимно однозначное соответствие*, если каждому элементу множества A сопоставлен один и только один элемент множества B, так что различным элементам множества A сопоставлены различные элементы множества B и каждый элемент множества B оказывается сопоставленным некоторому элементу множества A.

Например, между множеством всех четных натуральных чисел и множеством $\mathbb{N}$ можно установить взаимно однозначное соответствие следующим образом:

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 4, & 6, & 8, & \ldots, & 2n, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots \end{array}$$

Множества, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие, называются *эквивалентными*. Если множества A и B эквивалентны, то пишут $A \sim B$; если они не эквивалентны, то пишут $A \nsim B$.

Отношение эквивалентности между множествами обладает свойствами:

1) рефлексивности $A \sim A$;
2) симметричности: если $A \sim B$, то $B \sim A$;
3) транзитивности: если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

Если $A \sim B$, то говорят, что множества A и B имеют одинаковую мощность.

Если $A \nsim B$, но $A \sim B_1 \subset B$, то говорят, что множество A имеет меньшую мощность, чем множество B.

Множество $A \neq \varnothing$ называется *конечным*, если существует такое число $n \in \mathbb{N}$, что

$$A \sim \{1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

В этом случае говорят, что множество A содержит n элементов или что множество A имеет мощность n.

Пустое множество $\varnothing$ также считается конечным, его мощность принимается равной нулю.

Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*.

Множество A называется *счетным*, если $A \sim \mathbb{N}$. Говорят, что счетное множество имеет счетную мощность. Если множество конечно или счетно, то его называют не более чем счетным.

Множество называется *несчетным*, если оно имеет мощность, большую, чем мощность множества $\mathbb{N}$.

Теоремы Кантора:

1. *Множество всех рациональных чисел счетно.*
2. *Множество всех действительных чисел несчетно.*

Множество A называется множеством *мощности континуума*, если $A \sim \mathbb{R}$.

Пусть дано множество $S = \{s\}$, называемое множеством индексов, и каждому индексу s сопоставлено множество A_s. Множество $\{A_s\}$, элементами которого являются множества A_s, $s \in S$, называют *системой* или *семейством множеств*. Понятия объединения и пересечения двух множеств обобщаются на случай произвольной конечной или бесконечной системы множеств следующим образом.

Объединением системы множеств A_s, $s \in S$, называется множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств системы.

Пересечением системы множеств A_s, $s \in S$, называется множество всех элементов, содержащихся в каждом множестве системы.

Объединение и пересечение системы множеств A_s, $s \in S$, обозначают

$$\bigcup_{s \in S} A_s \quad \text{и} \quad \bigcap_{s \in S} A_s.$$

В частных случаях, когда система множеств конечна или счетна, пишут

$$\bigcup_{s=1}^{n} A_s, \quad \bigcap_{s=1}^{n} A_s, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{или} \quad \bigcup_{s=1}^{\infty} A_s, \quad \bigcap_{s=1}^{\infty} A_s.$$

Решить задачи **1.1—1.8**, в которых A, B, C, D — произвольные множества.

1.1. Даны множества A, B, C. С помощью операций объединения и пересечения записать множество, состоящее из элементов, принадлежащих: 1) всем трем множествам; 2) хотя бы одному множеству; 3) по крайней мере двум из этих множеств.

1.2. Доказать, что равенства: 1) $A \cup B = B$, 2) $A \cap B = A$ верны тогда и только тогда, когда $A \subset B$.

1.3. Доказать, что равенство $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$ верно тогда и только тогда, когда $A \supset C$.

1.4. Доказать равенства:

1) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

2) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

3) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

4) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

1.5. Доказать, что включение $A \setminus B \subset C$ верно тогда и только тогда, когда $A \subset B \cup C$.

1.6. Доказать включения:

1) $A \cup (B \setminus C) \supset (A \cup B) \setminus C$.

2) $(A \cup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \cup C$.

1.7. Определить, в каком отношении ($X \subset Y$, $X \supset Y$, $X = Y$) находятся множества X и Y, если:

1) $X = A \cup (B \setminus C)$, $Y = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.

2) $X = (A \cap B) \setminus C$, $Y = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

3) $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

4) $X = (A \times B) \cup (C \times B)$, $Y = (A \cup C) \times B$.

5) $X = (A \times B) \cup (C \times D)$, $Y = (A \times C) \cup (B \times D)$.

1.8. Доказать, что если $A \subset C$, $B \subset D$, то

$$A \times B = (A \times D) \cap (B \times C).$$

1.9. Пусть $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leqslant 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 4\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 = 0\}$. Из каких элементов состоят множества:

1) $B \cup C$; 2) $A \cap B \cap C$; 3) $A \cup B \cup C$;
4) $(A \cap B) \cup (B \cup C)$; 5) $B \times C$; 6) $C \times B$?

1.10. Множества A и B составлены соответственно из элементов $a = 4n + 2$, $b = 3n$, $n \in \mathbb{N}$. Найти $A \cap B$.

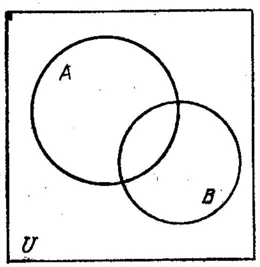


Рис. 1.

1.11. Пусть множество A содержит n элементов, множество B — m элементов, а пересечение $A \cap B$ — k элементов. Найти число элементов множества: 1) $A \cup B$, 2) $A \times B$.

1.12. Пусть $A \subset \mathbb{N}$ и каждый элемент A есть число, кратное или 2, или 3, или 5. Найти число элементов множества A, если среди них имеется: 70 чисел, кратных 2; 60 чисел, кратных 3; 80 чисел, кратных 5; 32 числа, кратные 6; 35 чисел, кратных 10; 38 чисел, кратных 15; 20 чисел, кратных 30.

1.13. Множества A и B являются подмножествами множества U (рис. 1). Заштриховать на рисунке следующие множества:

1) $A \cup B'$; 2) $A' \cap B$; 3) $(A \cup B)'$;
4) $(A \cup B')'$; 5) $(A \cap B)'$; 6) $(A' \cap B) \cup (A \cap B')$.

1.14. Пусть A и B — произвольные подмножества множества U Доказать равенства:

1) $(A \setminus B)' = A' \cup B$.

2) $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = A \cup B$.

3) $(A \cup B) \cap (A' \cup B') = A \cup B$.

1.15. Пусть $A \subset U$, $B \subset U$. Найти множество $X \subset U$, удовлетворяющее уравнению

$$(X \cup A)' \cup (X \cup A') = B.$$

1.16. Найти подмножества A и B множества U, если известно, что для любого множества $X \subset U$ верно равенство

$$X \cap A = X \cup B.$$

1.17. Пусть $A_s \subset U$, $s \in S$. Доказать:

1) $\left(\bigcup\limits_{s \in S} A_s\right)' = \bigcap\limits_{s \in S} A_s'$. 2) $\left(\bigcap\limits_{s \in S} A_s\right)' = \bigcup\limits_{s \in S} A_s'$.

1.18. Дана система произвольных множеств A_s, $s \in \mathbb{N}$.

1) Пусть $B_n = \bigcup\limits_{s=1}^{n} A_s$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что

$$\bigcup_{s=1}^{\infty} B_s = \bigcup_{s=1}^{\infty} A_s.$$

2) Пусть $B_n = \bigcap\limits_{s=1}^{n} A_s$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что

$$\bigcap_{s=1}^{\infty} B_s = \bigcap_{s=1}^{\infty} A_s.$$

1.19. Пусть A_{sp}, $s \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, — система произвольных множеств. Установить, верны ли включения:

1) $\bigcup\limits_{s=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{p=1}^{\infty} A_{sp}\right) \subset \bigcap\limits_{p=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{s=1}^{\infty} A_{sp}\right)$.

2) $\bigcup\limits_{s=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{p=1}^{\infty} A_{sp}\right) \supset \bigcap\limits_{p=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{s=1}^{\infty} A_{sp}\right)$.

1.20. Установить взаимно однозначное соответствие между множествами A и B:

1) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N}$.

2) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = k^2,\ k \in \mathbb{N}\}$, $B = \mathbb{N}$.

3) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b,\ b > a\}$.

4) $A = \mathbb{R}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$.

1.21. Установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек интервала $(0; 1)$ и множеством всех точек отрезка $[0; 1]$.

1.22. Доказать равномощность следующих множеств:

1) квадрата $\{(x; y) \mid |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1\}$ и круга $\{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$;

2) открытого круга $\{(x; y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ и всей плоскости $(x; y)$;

3) открытого круга $\{(x; y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ и замкнутого круга $\{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

1.23. Доказать, что множество является бесконечным тогда и только тогда, когда оно эквивалентно некоторому своему собственному подмножеству.

1.24. Доказать, что если множество A — бесконечное, а множество B — счетное, то $(A \cup B) \sim A$.

1.25. Доказать, что если $A \setminus B \sim B \setminus A$, то $A \sim B$.

1.26. Доказать, что если $A \subset B \subset C$ и $A \sim C$, то $A \sim B$.

1.27. Доказать, что если A и B — счетные множества, то множество $A \times B$ счетно.

1.28. Доказать, что объединение не более чем счетной системы счетных множеств есть счетное множество.

1.29. Доказать счетность следующих множеств:

1) множества всех чисел вида 2^k, $k \in \mathbb{N}$;

2) множества всех треугольников на плоскости, вершины которых имеют рациональные координаты;

3) множества всех точек плоскости с рациональными координатами;

4) множества всех многочленов с рациональными коэффициентами;

5) множества всех алгебраических чисел (число называется алгебраическим, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами);

6) множества всех конечных подмножеств счетного множества.

1.30. Доказать, что если расстояние между любыми двумя точками множества точек на прямой больше единицы, то это множество не более чем счетно.

1.31. Доказать, что следующие множества имеют мощность континуума:

1) множество всех точек непустого интервала $(a; b)$;

2) множество всех последовательностей, составленных из цифр 0 и 1;

3) множество всех последовательностей действительных чисел;

4) множество всех точек квадрата;

5) множество всех точек круга;

6) множество всех подмножеств счетного множества;

7) множество всех счетных подмножеств множества мощности континуума.

1.32. На плоскости построено множество попарно непересекающихся: 1) окружностей, 2) фигур, имеющих вид буквы Т, 3) фигур, имеющих вид буквы Г. Может ли это множество быть несчетным?

1.33. Найти мощность множества всех подмножеств конечного множества, содержащего n элементов.

1.34. Доказать, что для каждого множества множество всех его подмножеств имеет мощность, большую, чем исходное множество.

1.35. Пусть A — несчетное множество, а B — не более чем счетное. Доказать, что множества $A \cup B$ и $A \setminus B$ имеют мощность множества A.

---

4. Упорядоченные множества. Множество называется *упорядоченным*, если для любых двух его элементов a и b установлено отношение порядка $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$ (a не превосходит b или b не превосходит a), обладающее свойствами:

1) рефлексивности: $a \leqslant a$, т. е. любой элемент не превосходит самого себя;

2) антисимметричности: если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то элементы a и b совпадают;

3) транзитивности: если $a \leqslant b$, $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$.

Пустое множество считают упорядоченным. Множество можно упорядочить различными способами. Например, в множестве студентов группы отношение порядка ($\leqslant$) можно установить следующими двумя способами: студент a не превосходит студента b, т. е. $a \leqslant b$, если 1) студент a ниже ростом студента b, 2) фамилия студента a в журнале группы стоит под бо́льшим номером, чем фамилия студента b. Устанавливая различными способами отношение порядка в одном и том же множестве, получают различные упорядоченные множества.

Элементы конечных упорядоченных множеств обычно записывают в круглых скобках, располагая элемент a левее элемента b, если $a \leqslant b$. Например, запись $A = (3, 2, 1)$, $B = (2, 3, 1)$ означает, что A и B — различные упорядоченные множества, в отличие от записи $A = \{3, 2, 1\}$, $B = \{2, 3, 1\}$, из которой следует, что $A = B$.

Например, множество, содержащее три элемента a, b и c, имеет 3 двухэлементных подмножества:

$$\{a, b\}, \quad \{a, c\}, \quad \{b, c\}$$

и 6 двухэлементных упорядоченных подмножеств:

$$(a, b), \quad (b, a), \quad (a, c), \quad (c, a), \quad (b, c), \quad (c, b).$$

5. Размещения и перестановки. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется *размещением* из n элементов по k элементов.

Число всех размещений из n элементов по k элементов обозначается A_n^k (читается: «число размещений из n по k» или «A из n по k»; A — первая буква французского слова arrangement, что означает размещение, приведение в порядок).

Число размещений находится по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1), \qquad k > 0, \tag{1}$$

т. е. число размещений из n элементов по k элементов равно произведению k последовательных натуральных чисел от n до $n-k+1$ включительно.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n обозначают символом $n!$ (читают: «эн факториал»), т. е.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3\ \ldots\ (n-1)n.$$

Используя это обозначение, формулу (1) можно записать в виде

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \tag{2}$$

причем, если условиться считать, что $0! = 1$, то формула (2) дает правильный результат и в случаях $k = 0$ и $k = n$.

Размещения из n элементов по n элементов называются *перестановками* из n элементов.

Перестановки являются частным случаем размещений. Так как каждая перестановка содержит все n элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов. Число перестановок из n элементов обозначают через P_n (P — первая буква французского слова permutation — перестановка).

Так как $P_n = A_n^n$, то для числа перестановок справедлива формула

$$P_n = n!. \tag{3}$$

Из формулы (3) следует, что множество, содержащее n элементов, можно упорядочить $n!$ способами.

Пример 3. Группа студентов изучает 7 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если на этот день недели запланированы занятия по 4 дисциплинам?

△ Различных способов составления расписания, очевидно, столько, сколько существует четырехэлементных упорядоченных подмножеств у семиэлементного множества. Следовательно, число способов равно числу размещений из 7 элементов по 4 элемента, т. е. равно A_7^4. По формуле (1), полагая в ней $n = 7$, $k = 4$, находим

$$A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840. \ ▲$$

Пример 4. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются?

△ Для того чтобы число, составленное из заданных цифр, делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы цифра 5 стояла на последнем месте. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке. Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов, т. е. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. ▲

Пример 5. Сколько различных перестановок можно образовать из букв слова «задача»?

△ Образовать какую-либо перестановку из букв слова «задача» — это значит на шесть занумерованных мест каким-нибудь образом поставить одну букву «з», одну букву «д», одну букву «ч» и три буквы «а». Если буквы «з», «д» и «ч» как-то поставлены, то остальные места заполняются буквами «а». Но сколькими способами можно поставить три различные буквы на шесть мест? Очевидно, что число способов равно числу всех трехэлементных упорядоченных подмножеств шестиэлементного множества, т. е. равно $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Можно рассуждать и иначе. Если бы все шесть букв слова были различны, то число перестановок было бы равно $6!$. Но буква «а» встречается в данном слове три раза, и перестановки только этих трех букв «а» не дают новых способов расположения букв. Поэтому число перестановок букв слова «задача» будет не $6!$, а в $3!$ раз меньше, т. е.

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120. \ ▲$$

6. Сочетания. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество, содержащее k элементов, называется *сочетанием* из n элементов по k элементов.

Число всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k (читается: «число сочетаний из n по k» или «це из n по k»; C — первая буква французского слова combinasion — сочетание).

Число сочетаний находится по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \tag{4}$$

или по формуле

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)}{k!}. \tag{5}$$

Справедливы равенства

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \tag{6}$$

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k, \qquad k < n. \tag{7}$$

Пользуясь равенством (6), можно упрощать вычисление чисел C_n^k в тех случаях, когда $k > n/2$, например,

$$C_{15}^{12} = C_{15}^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2} = 455.$$

Пример 6. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 5 членов, можно образовать из 10 преподавателей?

△ Очевидно, столько, сколько существует пятиэлементных подмножеств у десятиэлементного множества, т. е. число комиссий равно C_{10}^5. По формуле (4), полагая в ней $n=10$, $k=5$, находим

$$C_{10}^5=\frac{10!}{5!5!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=252. \ ▲$$

Пример 7. В чемпионате страны по футболу (высшая лига) участвуют 18 команд, причем каждые две команды встречаются между собой 2 раза. Сколько матчей играется в течение сезона?

△ В первом круге состоится столько матчей, сколько существует двухэлементных подмножеств у множества, содержащего 18 элементов, т. е. их число равно C_{18}^2. По формуле (5) находим

$$C_{18}^2=\frac{18\cdot 17}{2}=153.$$

Во втором круге играется столько же матчей, поэтому в течение сезона состоится 306 встреч. ▲

Пример 8. Сколькими способами $2n$ элементов можно разбить на пары?

Ответ на этот вопрос можно получить, используя формулы для числа сочетаний и числа перестановок. Приведем другое решение.

△ Обозначим число разбиений на пары $2n$ элементов через R_{2n}.

Выберем какой-нибудь элемент. С участием этого элемента пару можно образовать $2n-1$ способами. Каждый раз после образования одной пары будет оставаться $2n-2$ элементов, которые можно разбить на пары R_{2n-2} способами. Поэтому $R_{2n}=(2n-1)R_{2n-2}$. Используя эту рекуррентную формулу, получаем $R_{2n}=(2n-1)R_{2n-2}=(2n-1)(2n-3)R_{2n-4}=\ldots$ $\ldots=(2n-1)(2n-3)\ \ldots\ 3\cdot R_2=(2n-1)(2n-3)\ \ldots\ 3\cdot 1$.

Произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и имеющих ту же четность, что и n, часто обозначают $n!!$ (читается: «эн два факториал» или «эн двойной факториал»).

Таким образом, $2n$ элементов можно разбить на пары $(2n-1)!!$ способами. ▲

7. Случайные события и их вероятности. Рассмотрим опыт, заключающийся в подбрасывании монеты. Этот опыт имеет два исхода: либо монета упадет так, что сверху окажется герб, либо она ляжет гербом вниз. Тот или иной исход опыта зависит от многих причин, которые не поддаются учету, и заранее предсказать результат опыта нельзя. Событие, состоящее в том, что «выпал герб», является примером случайного события. Другими примерами случайных событий могут служить: «появление единицы» при бросании игральной кости (кубика из однородного

материала с гранями, занумерованными цифрами от единицы до шести), выход из строя электролампы до определенного срока, несоответствие стандарту выбранного для контроля изделия. Во всех этих случаях невозможно предсказать заранее, до окончания опыта, произойдет или не произойдет соответствующее событие. Поэтому такие события и называют случайными.

В опыте с подбрасыванием монеты оба исхода равноправны, до опыта нет никаких оснований предпочитать один исход другому. В таких случаях говорят, что оба исхода равновероятны, а вероятность каждого из них равна $1/2$. При подбрасывании игральной кости имеется шесть исходов. Если кость однородная и симметричная, то все исходы опыта одинаково возможны или равновероятны. Вероятность каждого исхода равна $1/6$.

Обобщением этих простых опытов будет опыт, в котором возможно n равновероятных исходов $u_1, u_2, \ldots, u_n$, их называют также элементарными событиями. В этом случае вероятность каждого исхода принимается равной $1/n$. Записывают это следующим образом:

$$P(u_1)=1/n,\quad P(u_2)=1/n,\quad \ldots,\quad P(u_n)=1/n.$$

Первая из этих формул читается так: «вероятность события u_1 равна $1/n$» (P — первая буква английского слова probability — вероятность).

Рассмотрим теперь опыт с n равновероятными исходами и некоторое событие A, которое происходит тогда, когда опыт оканчивается какими-то k исходами, и не происходит в том случае, если имеет место один из остальных $n-k$ исходов. Будем говорить, что исходы, приводящие к событию A, благоприятствуют ему. *Вероятностью события* A, связанного с опытом с n равновероятными исходами, называется отношение числа исходов, благоприятствующих событию A, к числу всех исходов, т. е.

$$P(A)=k/n, \tag{8}$$

где k — число исходов, благоприятствующих событию A. Вероятность любого события A удовлетворяет неравенствам

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1,$$

что непосредственно следует из формулы (8), так как очевидно, что $0\leqslant k\leqslant n$.

Пример 9. Опыт заключается в подбрасывании двух монет: медной и серебряной. Какова вероятность того, что хотя бы на одной монете появится герб?

△ Равновероятными исходами опыта считаются следующие:

u_1 — герб появился на обеих монетах,

u_2 — герб выпал только на медной монете,

u_3 — герб выпал только на серебряной монете,

u_4 — герб не выпал ни на одной монете.

Благоприятствуют событию A (появлению герба хотя бы на одной монете) исходы u_1, u_2 и u_3. Полагая в формуле (8) $n=4$, $k=3$, получаем $P(A)=3/4$. ▲

Пример 10. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

△ Две последние цифры можно набрать числом способов, равным числу упорядоченных двухэлементных подмножеств у десятиэлементного множества (множества всех цифр). Это число способов равно A_{10}^2. Следовательно, всего существует A_{10}^2 исходов. Благоприятствует событию A (цифры набраны верно) только один исход. Поэтому $P(A) = 1/A_{10}^2 = 1/10 \cdot 9 = 1/90$. ▲

Пример 11. Среди 100 электроламп 5 испорченных. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 лампы окажутся исправными?

△ У множества, содержащего 100 элементов, существует C_{100}^3 трехэлементных подмножеств. Поэтому 3 лампы из 100 можно выбрать C_{100}^3 способами. Лампы выбираются наудачу. Это означает, что все эти способы выбора (все исходы) равновероятны. Число благоприятных исходов — все три лампы оказались исправными — подсчитывается аналогично. Из 95 исправных ламп 3 лампы можно выбрать C_{95}^3 способами, так как именно столько существует трехэлементных подмножеств у 95-элементного множества. Полагая в формуле (8) $n = C_{100}^3$, $k = C_{95}^3$, получаем

$$P(A) = C_{95}^3/C_{100}^3 = \frac{95 \cdot 94 \cdot 93}{100 \cdot 99 \cdot 98} \approx 0{,}856. \ \blacktriangle$$

1.36. Вычислить:

1) $\dfrac{A_{20}^4}{A_{20}^6 + A_{20}^5}$. 2) $\dfrac{A_{10}^7}{6!\left(C_7^5 + C_7^4\right)}$.

3) $\dfrac{P_{n+1}}{(n-k)!A_{n-1}^{k-1}}$, $k \leqslant n$. 4) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ \ldots \ + C_n^n$.

1.37. Найти n, если:

1) $\dfrac{P_{n+5}}{P_{n-k}} = 240A_{n+3}^{k+3}$. 2) $C_{n+3}^n - C_{n+2}^{n-1} = 15(n+1)$.

3) $C_{10}^n > 2C_{10}^{n+1}$. 4) $4(n-2)!A_{n+2}^4 < 143 \cdot n!$

1.38. В группе 30 студентов. Сколькими способами можно выделить двух человек для дежурства, если: 1) один из них должен быть старшим, 2) старшего быть не должно?

1.39. На пять сотрудников выделены три путевки. Сколькими способами их можно распределить, если: 1) все путевки различны, 2) все путевки одинаковы?

1.40. Сколькими способами можно расположить в ряд 5 белых и 4 черных шара так, чтобы черные шары не лежали рядом? Рассмотреть два случая: 1) шары одного цвета неотличимы друг от друга; 2) все шары разные.

1.41. Сколько диагоналей имеет выпуклый n-угольник?

1.42. Никакие три диагонали выпуклого десятиугольника не пересекаются в одной точке. Определить число точек пересечения диагоналей.

1.43. На первой из двух параллельных прямых лежат 15 точек, на второй — 21. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

1.44. Сколькими способами на шахматной доске можно расставить 8 ладьей одного цвета, чтобы они не били друг друга и стояли только на черных клетках?

1.45. Из цифр 0, 1, 2, 3 составлены всевозможные четырехзначные числа так, что в каждом числе нет одинаковых цифр. Сколько получилось чисел? Сколько среди них четных чисел?

1.46. Сколько различных десятизначных чисел можно записать, используя цифры 1 и 2?

1.47. Сколько различных перестановок можно образовать из букв следующих слов: 1) зебра, 2) баран, 3) водород, 4) абракадабра?

1.48. Сколькими способами можно раздать 28 костей домино четырем игрокам так, чтобы каждый получил 7 костей?

1.49. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

1.50. Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых нечетны (1, 3, 5, 7, 9)?

1.51. Сколько делителей имеет число 462?

1.52. На полке стоят m книг в черных переплетах и n книг в синих переплетах, причем все книги разные. Сколькими способами можно расставить книги так, чтобы книги в черных переплетах стояли рядом?

1.53. Сколькими способами можно упаковать 9 разных книг в 5 бандеролей, если 4 бандероли должны содержать по 2 книги?

1.54. Сколькими способами 12 одинаковых монет можно разложить по пяти различным кошелькам так, чтобы ни один кошелек не остался пустым?

1.55. Сейф запирается на замок, состоящий из пяти дисков, на каждом из которых изображены цифры 0, 1, 2, ..., 9. Замок открывается, если на дисках набрана одна определенная комбинация цифр. Хватит ли 10 дней на открытие сейфа, если «рабочий день» продолжается 13 часов, а на набор одной комбинации цифр уходит 5 секунд?

1.56. Среди всех целых чисел от 1 до 10^n каких больше: тех, для записи которых используется цифра 9, или тех, которые записываются без нее?

1.57. Некоторый алфавит состоит из шести букв, которые для передачи по телеграфу кодированы так:

$$\cdot;\ -;\ \cdot\cdot;\ --;\ \cdot-;\ -\cdot;$$

при передаче одного слова не сделали промежутков, отделяющих букву от буквы, так что получилась сплошная цепочка точек и тире, содержащая 12 знаков. Сколькими способами можно прочитать переданное слово?

1.58. Из урны, в которой находятся 3 белых, 4 черных, 5 красных шаров, наудачу вынимается один. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется: 1) белым, 2) черным, 3) желтым, 4) красным?

1.59. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух костях, окажется равной 8?

1.60. Экзаменационная программа содержит 40 вопросов. На экзамене предлагается ответить на два из них. Студент подготовил ответы на 30 вопросов. Какова вероятность того, что на экзамене ему предложат два вопроса, на которые он подготовил ответ?

1.61. В лотерее из 50 билетов 8 выигрышных. Какова вероятность того, что среди первых пяти наугад выбранных билетов два будут выигрышными?

1.62. Из десяти билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди наудачу взятых пяти билетов: 1) один выигрышный, 2) оба выигрышных.

1.63. При игре в «Спортлото» 6 номеров из 49 являются «счастливыми». Участник игры указывает 6 номеров из 49. Какова вероятность угадать: 1) все 6 «счастливых» номеров, 2) 3 «счастливых» номера?

1.64. В лифт 8-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Предположим, что каждый из них независимо друг от друга и с равной вероятностью может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пятеро выйдут на разных этажах.

1.65. Первенство по баскетболу разыгрывают 18 команд, среди которых 2 команды экстракласса. Для уменьшения общего числа игр команды путем жеребьевки разбиваются на две равные группы. Какова вероятность того, что две команды экстракласса окажутся: 1) в разных подгруппах, 2) в одной подгруппе?

1.66. Доказать, что вероятность того, что у двенадцати случайно выбранных человек дни рождения приходятся на разные месяцы, меньше 1/10 000.

§ 2. Элементы логики. Метод математической индукции

1. Высказывания. Операции над высказываниями. Под *высказыванием* понимают всякое утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно. Из данных высказываний при помощи так называемых логических связок, к которым относятся частица «не», союзы «и», «или», слова «если ..., то ...», «тогда и только тогда, когда ...», образуются новые высказывания.

Операция отрицания соответствует в обыденной речи частице «не». Для каждого высказывания p можно образовать новое высказывание $\bar{p}$ (читают: «p с чертой» или «не p»), которое истинно, если p ложно, и, наоборот, ложно, если p истинно. Высказывание $\bar{p}$ называют *отрицанием* высказывания p. Например, для высказывания «последовательность $\{1/n\}$ имеет предел» отрицанием является высказывание «последовательность $\{1/n\}$ не имеет предела».

Высказывание, составленное из данных высказываний p и q при помощи союза «и», называют *конъюнкцией* и обозначают $p \wedge q$ (читают: «p и q»).

Конъюнкция $p \wedge q$ считается истинным высказыванием в том и только в том случае, когда оба высказывания p и q истинны.

Если высказывание образовано из высказываний p и q при помощи союза «или», то его называют *дизъюнкцией* высказываний p и q и обозначают $p \vee q$ (читают: «p или q»).

Дизъюнкция $p \vee q$ считается истинным высказыванием тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из данных высказываний.

Высказывание, образованное из данных высказываний p и q при помощи слов «если ..., то ...», называют *импликацией* и обозначают $p \rightarrow q$ (читают: «если p, то q»). Высказывание p называют при этом условием, а высказывание q — заключением.

Импликация $p \rightarrow q$ считается ложным высказыванием только в том случае, когда условие (высказывание p) истинно, а заключение (высказывание q) ложно.

Высказывание, образованное из данных высказываний p и q при помощи слов «тогда и только тогда, когда...», называют *эквиваленцией* (или *двойной импликацией*) и обозначают $p \leftrightarrow q$.

Эквиваленция $p \leftrightarrow q$ истинна в том и только в том случае, когда оба высказывания p и q истинны или когда они оба ложны.

Если истинным высказываниям сопоставлять букву *И*, а ложным — букву *Л*, то логические операции $\bar{p}$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ можно определить формально при помощи следующих таблиц истинности:

p	$\bar{p}$
И	Л
Л	И

p	q	$p \wedge q$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

p	q	$p \vee q$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

p	q	$p \to q$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

p	q	$p \leftrightarrow q$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Новые высказывания могут быть образованы при помощи нескольких логических операций, причем каждая из операций может применяться несколько раз. Порядок, в котором должны проводиться операции, указывают с помощью скобок.

Из таблицы истинности для импликации видно, что если условие p и импликация $p \to q$ истинны, то истинно и заключение q. В этом случае пишут $p \Rightarrow q$ и говорят, что из p следует q. Это классическое правило вывода постоянно используется в математике.

Если из p следует q, а из q следует p, то высказывания p и q называют *равносильными*. Равносильные высказывания соединяют либо знаком $\Leftrightarrow$, либо знаком равенства, т. е. пишут либо $p \Leftrightarrow q$, либо $p = q$.

При исследовании высказываний на равносильность в простых случаях можно использовать таблицы истинности, так как для равносильных высказываний, имеющих различную форму, таблицы истинности совпадают. Например, используя таблицы истинности для отрицания и импликации, легко построить таблицу истинности для высказываний, имеющих форму $\bar{q} \to \bar{p}$:

p	q	$\bar{q}$	$\bar{p}$	$\bar{q} \to \bar{p}$
И	И	Л	Л	И
И	Л	И	Л	Л
Л	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	И

Эта таблица совпадает с таблицей истинности для импликации $p \to q$. Следовательно, высказывания $p \to q$ и $\bar{q} \to \bar{p}$ равносильны, т. е. $p \to q \Leftrightarrow \bar{q} \to \bar{p}$ или $p \to q = \bar{q} \to \bar{p}$.

Таблица истинности, соответствующая высказыванию, образованному из n простых высказываний, содержит 2^n строк. Поэтому обычно равносильность высказываний устанавливается другим способом: некоторое количество основных равносильностей (законов алгебры высказываний) проверяется на основании таблиц истинности, полученные равенства используются при доказательстве других равенств точно так, как в элементарной алгебре в тождественных преобразованиях используются алгебраические законы: коммутативный, ассоциативный, дистрибутивный и другие.

Основные законы алгебры высказываний:

1. Коммутативность дизъюнкции:

$$p \vee q = q \vee p. \tag{1}$$

2. Коммутативность конъюнкции:

$$p \wedge q = q \wedge p. \tag{2}$$

3. Ассоциативность дизъюнкции:

$$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r. \tag{3}$$

4. Ассоциативность конъюнкции:

$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r. \tag{4}$$

5. Первый дистрибутивный закон:

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r). \tag{5}$$

6. Второй дистрибутивный закон:

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r). \tag{6}$$

7. Законы де Моргана:

$$\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}, \quad \overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}. \tag{7}$$

8. Закон двойного отрицания:

$$\bar{\bar{p}} = p. \tag{8}$$

9. Законы идемпотентности:

$$p \vee p = p, \quad p \wedge p = p. \tag{9}$$

Важную роль в логике играют тождественно истинные и тождественно ложные высказывания. Тождественно истинные высказывания истинны всегда, независимо от того, истинны или ложны составляющие их высказывания. Например, высказывание $p \vee \bar{p}$ является тождественно истинным. Тождественно истинные высказывания будем обозначать буквой i.

Тождественно ложные высказывания ложны всегда, т. е. независимо от истинности или ложности высказываний, которые их составляют. Такие высказывания будем обозначать буквой l. Например, $p \wedge \bar{p} = l$, так как высказывание $p \wedge \bar{p}$ ложно независимо от того, истинно или ложно высказывание p.

Для тождественно истинных и тождественно ложных высказываний при любом p верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} &p \vee \bar{p} = i, \quad p \wedge \bar{p} = l, \\ &p \vee i = i, \quad p \wedge i = p, \\ &p \vee l = p, \quad p \wedge l = l, \quad \bar{i} = l. \end{aligned} \tag{10}$$

Законы (1)—(10) алгебры высказываний описывают свойства трех операций: дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. Импликация и эквиваленция выражаются через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание с помощью следующих формул:

$$p \to q = \bar{p} \vee q, \tag{11}$$

$$p \leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}). \tag{12}$$

Пример 1. Доказать равносильность

$$\overline{p \to q} = p \wedge \bar{q}. \tag{13}$$

△ Применив равенство (11), получим

$$\overline{p \to q} = \overline{\bar{p} \vee q}.$$

Затем используем первый закон де Моргана (7) и закон двойного отрицания (8):

$$\overline{\bar{p} \vee q} = \bar{\bar{p}} \wedge \bar{q} = p \wedge \bar{q}.$$

Формула (13) дает правило построения отрицания для импликации, часто применяемое в математических рассуждениях. ▲

Пример 2. Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники были на синем «Бьюике», Джонс сказал, что это был черный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд Мустанг» и ни в коем случае не синий. Стало известно, что, желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо только ее цвет. Какого цвета был автомобиль и какой марки?

△ При решении этой задачи для краткости будем опускать знак конъюнкции, т. е. вместо $p \wedge q$ писать просто pq.

Рассмотрим высказывания:

p — машина синего цвета,
q — машина марки «Бьюик»,
r — машина черного цвета,
s — машина марки «Крайслер»,
t — машина марки «Форд Мустанг».

Из показаний Брауна, Джонса и Смита следует соответственно, что высказывания $p \vee q$, $r \vee s$, $\bar{p} \vee t$ истинны. Следовательно, истинна конъюнкция этих трех высказываний:

$$(p \vee q)(r \vee s)(\bar{p} \vee t).$$

Раскрыв скобки, получим дизъюнкцию восьми конъюнкций:

$$(pr\bar{p}) \vee (prt) \vee (ps\bar{p}) \vee (pst) \vee (qr\bar{p}) \vee (qrt) \vee (qs\bar{p}) \vee (qst).$$

Из условия следует, что все конъюнкции, кроме пятой, являются ложными. Поэтому дизъюнкция может быть истинна только при условии истинности высказывания $qr\bar{p}$, а это означает, что преступники скрылись на черном «Бьюике». ▲

2. Предложения, зависящие от переменной (предикаты). В математике и других науках наряду с высказываниями приходится иметь дело с различными утверждениями (предложениями), зависящими от переменной, принадлежащей некоторому множеству. Такие предложения в логике называют *предикатами*. Предложение (предикат) $p(x)$, $x \in U$, не является, вообще говоря, высказыванием. Предполагается, однако, что для каждого фиксированного элемента $x_0 \in U$ предложение $p(x_0)$ есть высказывание.

Множество U, на котором задано предложение $p(x)$, можно разбить на два подмножества. Одно содержит те и только те элементы U, для которых $p(x)$ истинно. Оно называется множеством истинности предложения $p(x)$. Другое подмножество состоит из тех элементов U, для которых $p(x)$ ложно. Если первое из этих подмножеств обозначить буквой P, то второе следует обозначить P', так как оно является дополнением множества P до множества U.

Например, для предложения $x^2 - x < 0$, $x \in \mathbb{R}$, множеством истинности P является интервал $(0; 1)$, множеством P' — объединение промежутков $(-\infty; 0]$ и $[1; +\infty)$ (дополнение интервала $(0; 1)$ до всей числовой прямой).

Два предложения $p(x)$ и $q(x)$, заданные на одном и том же множестве, называют *равносильными*, если их множества истинности совпадают.

Например, два предложения (неравенства) $x^2 - 5x + 6 < 0$ и $x^4 - 5x^3 + 6x^2 < 0$ равносильны на множестве $\mathbb{R}$, так как множеством истинности каждого из них является интервал $(2; 3)$.

Для предложений, зависящих от переменной, как и для высказываний, вводятся логические операции.

Отрицанием предложения $p(x)$, $x \in U$, называется предложение, определенное на том же множестве U и обращающееся в истинное высказывание для тех и только тех значений x, для которых $p(x)$ ложно.

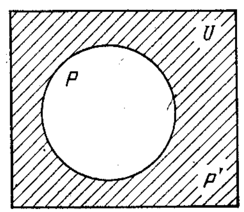


Рис. 2.

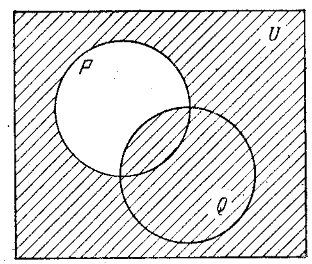


Рис. 3.

Отрицание $p(x)$ обозначается $\overline{p(x)}$. Если P — множество истинности $p(x)$, то множеством истинности $\overline{p(x)}$ будет P'. На рис. 2 схематически изображены множества U, P и P'.

Аналогично определяются и другие логические операции.

Например, импликацией $p(x) \to q(x)$ предложений $p(x)$ и $q(x)$, определенных на множестве U, называется предложение, определенное на том же множестве U и обращающееся в ложное высказывание для тех и только тех значений x, для которых условие $p(x)$ истинно и заключение $q(x)$ ложно. На рис. 3 заштриховано множество истинности импликации $p(x) \to q(x)$ (P и Q — множества истинности предложений $p(x)$ и $q(x)$).

3. Знаки общности и существования (кванторы). С предложениями, зависящими от переменных, связаны два вида часто встречающихся утверждений.

1. Предложение $p(x)$, $x \in U$, обращается в истинное высказывание для всех элементов множества U.

2. Предложение $p(x)$, $x \in U$, обращается в истинное высказывание хотя бы для одного элемента множества U.

Эти утверждения принято записывать кратко, используя для этого специальные знаки: *знак общности* $\forall$ (перевернутая первая буква английского слова All — все) и *знак существования* $\exists$ (перевернутая первая буква английского слова Exists — существует). В логике знаки $\forall$ и $\exists$ называют *кванторами*. Квантор общности $\forall$ соответствует словам «все», «всякий», «каждый», «любой»; квантор существования $\exists$ — словам «хотя бы один», «найдется», «существует».

Используя знаки $\forall$ и $\exists$, утверждения 1 и 2 можно записать следующим образом:

1. $\forall x p(x)$, $x \in U$. 2. $\exists x p(x)$, $x \in U$.

Каждое из этих предложений либо истинно, либо ложно и, следовательно, является высказыванием.

Правила построения отрицания для высказывания, содержащего кванторы, даются формулами

$$\overline{\forall x p(x)} = \exists x \overline{p(x)}, \quad \overline{\exists x p(x)} = \forall x \overline{p(x)}. \tag{14}$$

Первая формула означает, что $p(x)$ истинно не для всех x тогда и только тогда, когда существует x, для которого $p(x)$ ложно. Вторая формула говорит, что не существует x, для которого $p(x)$ истинно тогда и только тогда, когда $p(x)$ ложно для всех x.

Элемент x_0 множества U, для которого предложение $p(x)$ неверно, называется контрпримером для высказывания $\forall x p(x)$.

Таким образом, чтобы убедиться в ложности высказывания $\forall x p(x)$, достаточно найти (или, как еще говорят, построить) один контрпример.

Предложение, определенное на множестве $X \times Y$ (т. е. на декартовом произведении множеств X и Y), называют предложением, зависящим от двух переменных, или двухместным предикатом и обозначают $p(x; y)$, $x \in X$, $y \in Y$. Из такого предложения с помощью кванторов $\forall$ и $\exists$ можно образовать восемь высказываний.

1. $\forall x \forall y\, p(x; y)$.	2. $\forall y \forall x\, p(x; y)$.
3. $\forall x \exists y\, p(x; y)$.	4. $\exists y \forall x\, p(x; y)$.
5. $\exists x \forall y\, p(x; y)$.	6. $\forall y \exists x\, p(x; y)$.
7. $\exists x \exists y\, p(x; y)$.	8. $\exists y \exists x\, p(x; y)$.

Высказывания 1 и 2, очевидно, равносильны так же, как и высказывания 7 и 8. Высказывания 3 и 4, а также 5 и 6 неравносильны (см. задачи **2.21**, **2.22**). Поэтому говорят, что одноименные кванторы можно переставлять, а разноименные переставлять нельзя.

4. Метод математической индукции. Во многих разделах математики приходится доказывать истинность предложений $p(x)$, определенных на множестве натуральных чисел, для всех значений переменной, т. е. истинность высказывания

$$\forall n\, p(n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Часто это удается сделать *методом математической индукции*. Этот метод основан на так называемом принципе математической индукции (аксиоме индукции), который можно сформулировать следующим образом. Предложение $p(n)$ считается истинным для всех натуральных значений переменной, если выполнены следующие два условия:

1. Предложение $p(n)$ истинно для $n = 1$.

2. Из предположения, что $p(n)$ истинно для $n = k$ (где k — любое натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего значения $n = k + 1$.

Под методом математической индукции понимают следующий способ доказательства. Если требуется доказать истинность предложения $p(n)$ для всех натуральных значений n, то сначала проверяют истинность высказывания $p(1)$ и затем, допустив истинность высказывания $p(k)$, доказывают истинность высказывания $p(k+1)$. Если доказательство верно для каждого натурального значения k, то в соответствии с принципом математической индукции предложение $p(n)$ является истинным для всех значений n.

Пример 3. Доказать равенство

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

$\triangle$ Это равенство представляет собой предложение $p(n)$, заданное на множестве натуральных чисел. Докажем истинность $p(n)$ для всех значений n методом математической индукции.

1. Высказывание $p(1)$ истинно, так как

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}.$$

2. Предположим, что $p(k)$ истинно, т. е. справедливо равенство

$$1^2+2^2+\ \dots\ +k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Прибавив к обеим частям равенства $(k+1)^2$, получим

$$1^2+2^2+\ \dots\ +k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2.$$

Преобразуем правую часть равенства следующим образом:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k+1}{6}(2k^2+7k+6)=$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Следовательно,

$$1^2+2^2+\ \dots\ +(k+1)^2=\frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6},$$

а это означает, что $p(k+1)$ истинно. Таким образом, рассуждение верно при любом $k\in\mathbb{N}$.

В силу принципа математической индукции исходное равенство истинно. ▲

Пример 4. Доказать неравенство Бернулли

$$(1+\alpha)^n\geqslant 1+n\alpha,\ \ \alpha>-1,\ \ n\in\mathbb{N}.$$

△ 1. При $n=1$ получаем истинное высказывание

$$1+\alpha\geqslant 1+\alpha.$$

2. Предположим, что неравенство верно при $n=k$, т. е.

$$(1+\alpha)^k\geqslant 1+k\alpha.$$

Умножив обе части неравенства на $1+\alpha$ (это можно сделать, так как $\alpha>-1$), получим

$$(1+\alpha)^{k+1}\geqslant(1+k\alpha)(1+\alpha)\geqslant 1+(k+1)\alpha+k\alpha^2.$$

Учитывая, что $k\alpha^2\geqslant 0$, приходим к неравенству

$$(1+\alpha)^{k+1}\geqslant 1+(k+1)\alpha.$$

Итак, предположив, что данное неравенство верно для $n=k$, мы доказали, что оно верно и для $n=k+1$. Доказательство, очевидно, остается справедливым для каждого значения k. Следовательно, неравенство доказано. ▲

Пример 5. Доказать, что при каждом $n\in\mathbb{N}$ число $5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ кратно 19.

△ 1. При $n=1$ данное утверждение, очевидно, верно.

2. Предположим, что оно верно для $n=k$, т. е. предположим, что $5\cdot 2^{3k-2}+3^{3k-1}$ делится на 19. Тогда, так как

$$5\cdot 2^{3(k+1)-2}+3^{3(k+1)-1}=8\cdot 5\cdot 2^{3k-2}+27\cdot 3^{3k-1}=$$
$$=8\left(5\cdot 2^{3k-2}+3^{3k-1}\right)+19\cdot 3^{3k-1},$$

то утверждение верно и при $n=k+1$. Действительно, первое слагаемое правой части этого равенства делится на 19 в силу индуктивного предположения; второе также делится на 19, так как содержит множитель 19.

Оба условия принципа математической индукции выполнены. Утверждение доказано. ▲

Пример 6. Доказать неравенство

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ \dots\ +\frac{1}{3n+1}>1,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

△ 1. При $n=1$ неравенство справедливо, так как

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1.$$

2. Предположим, что неравенство верно при $n=k$, т. е.

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ \dots\ +\frac{1}{3k+1}>1.$$

Прибавим к обеим частям неравенства сумму трех дробей

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}$$

и перенесем первое слагаемое левой части в правую часть неравенства. Тогда получим

$$\frac{1}{k+2}+\ \dots\ +\frac{1}{3k+4}>1+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}.$$

Правая часть этого неравенства больше единицы, так как

$$1+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}=$$
$$=1+\frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)}>1.$$

Следовательно, левая часть тем более больше единицы, т. е.

$$\frac{1}{(k+1)+1}+\ \dots\ +\frac{1}{3(k+1)+1}>1.$$

Последнее неравенство из исходного неравенства получается при $n=k+1$.

Итак, предположив истинность неравенства при $n=k$, мы доказали его истинность при $n=k+1$. Таким образом, методом математической индукции неравенство доказано. ▲

Пример 7. Пусть $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ — произвольные положительные числа, причем $x_1x_2\ \dots\ x_n=1$. Доказать, что

$$x_1+x_2+\ \dots\ +x_n\geqslant n.$$

△ 1. Если $n=1$, то по условию $x_1=1$ и, следовательно, можно написать $x_1\geqslant 1$, т. е. для $n=1$ утверждение верно.

2. Предположим, что утверждение верно для $n=k$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ — произвольные положительные числа и

$$x_1x_2 \ldots x_kx_{k+1}=1.$$

Могут представиться два случая: либо все эти числа равны 1, тогда их сумма равна $k+1$ и неравенство доказано, либо среди этих чисел есть хотя бы одно число, не равное единице, и тогда обязательно есть по крайней мере еще одно число, не равное единице, причем, если одно из них меньше единицы, то другое больше единицы. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_k>1$, а $x_{k+1}<1$. Рассмотрим теперь k чисел

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, (x_kx_{k+1}).$$

Произведение их равно единице, и, следовательно, по индуктивному предположению

$$x_1+x_2+\ldots+x_{k-1}+x_kx_{k+1}\geqslant k.$$

Прибавим к обеим частям последнего неравенства x_k+x_{k+1}, перенесем x_kx_{k+1} направо и преобразуем правую часть неравенства:

$$\begin{aligned}x_1+x_2+\ldots+x_{k+1}&\geqslant k-x_kx_{k+1}+x_k+x_{k+1}=\\&=k+1+x_k(1-x_{k+1})+x_{k+1}-1=\\&=k+1+x_k(1-x_{k+1})-(1-x_{k+1})=\\&=k+1+(1-x_{k+1})(x_k-1)\geqslant k+1.\end{aligned}$$

Таким образом, из истинности утверждения при $n=k$ вытекает его истинность при $n=k+1$. Утверждение доказано. Из приведенного доказательства следует, что знак равенства в доказываемом соотношении имеет место тогда и только тогда, когда $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$. ▲

Пример 8. Доказать неравенство

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольные положительные числа.

△ Это важное неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим n чисел является простым следствием утверждения, доказанного в примере 7. В самом деле, пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольные положительные числа.

Рассмотрим n чисел

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}};\quad \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}};\quad \ldots;\quad \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}.$$

Очевидно, что все эти числа положительны и произведение их равно единице. Следовательно, их сумма больше или равна n, т. е.

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}+\frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}\geqslant n,$$

откуда

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_n$. ▲

Иногда метод математической индукции применяется в несколько видоизмененной форме. Чаще всего используются следующие две формулировки:

I. Предложение $p(n)$, $n\in\mathbb{Z}$, истинно для всех целых значений $n\geqslant m$ (m — некоторое целое число), если выполнены условия:

1. Предложение $p(n)$ истинно для $n=m$.

2. Из предположения, что $p(n)$ истинно для $n=k$ (k — целое, $k\geqslant m$), следует, что оно истинно для следующего значения $n=k+1$.

II. Предложение $p(n)$, $n\in\mathbb{Z}$, истинно для всех $n\geqslant m$ (m — некоторое целое число), если выполнены условия:

1. Предложение $p(n)$ истинно для $n=m$ и $n=m+1$.

2. Из предположения, что $p(n)$ истинно для $n=k$ и $n=k-1$, следует (для любого $k>m$), что оно истинно для $n=k+1$.

Формулировка I используется, например, при решении задач **2.30**, **2.36**, формулировка II — при решении задачи **2.34**.

2.1. Среди следующих предложений выделить те, которые являются высказываниями, и установить (если это возможно), истинны они или ложны:

1) Великий русский поэт А. С. Пушкин родился в 1799 году.

2) Анатолий Карпов — двенадцатый чемпион мира по шахматам.

3) Летайте самолетами Аэрофлота!

4) $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$.

5) Для произвольных множеств A и B верно включение $A\subset A\cup B$.

6) Существуют внеземные цивилизации.

7) $2CO+O_2=2CO_2$.

8) Сумма углов треугольника равна 180°.

2.2. Даны два высказывания:

p — «число 3 является делителем числа 174»;

q — «идет дождь».

В чем заключаются высказывания:

1) $\bar{p}$; 2) $p\vee q$; 3) $p\wedge q$; 4) $p\to q$; 5) $\bar{p}\to q$; 6) $p\leftrightarrow\bar{q}$?

Какие из этих высказываний истинны, если p истинно, q ложно?

2.3. Составить таблицу истинности для высказываний, имеющих форму:

1) $s=(p\leftrightarrow q)\to(p\wedge q)$; 2) $s=(p\wedge(q\to p))\vee\bar{p}$.

2.4. Доказать формулы (3)—(7).

2.5. Доказать формулы (11) и (12).

2.6. По мишени произведено три выстрела. Пусть p_k — высказывание «мишень поражена k-м выстрелом», $k = 1, 2, 3$. Что означают следующие высказывания:

1) $p_1 \vee p_2 \vee p_3$; 2) $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$; 3) $(\bar{p}_1 \vee \bar{p}_2) \wedge p_3$?

Какие из этих трех высказываний истинны, если истинно p_3, а p_1 и p_2 ложны?

2.7. Какие из высказываний p, q, r должны быть истинны и какие ложны, чтобы высказывание $((\overline{\bar{p} \vee p}) \wedge q) \to r$ было истинным?

2.8. Упростить высказывания, имеющие форму:

1) $(p \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})) \vee (p \wedge \bar{q})$. 2) $(p \wedge q) \vee ((r \vee p) \wedge \bar{q})$.

3) $(r \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r)$. 4) $(p \to q) \wedge (\overline{r \to q})$.

2.9. На вопрос, кто из трех студентов изучал логику, был получен правильный ответ: если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий. Кто изучал логику?

2.10. Виктор, Роман, Юрий, Сергей заняли на математической олимпиаде первые четыре места. Когда их спросили о распределении мест, они дали три таких ответа:

1) Сергей — первый, Роман — второй;
2) Сергей — второй; Виктор — третий;
3) Юрий — второй, Виктор — четвертый.

Как распределились места, если в каждом из ответов только одно утверждение истинно?

2.11. Определить, кто из четырех студентов сдал экзамен, если известно, что:

1) если первый сдал, то и второй сдал;
2) если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал;
3) если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал;
4) если четвертый сдал, то и первый сдал.

2.12. Для полярной экспедиции из восьми претендентов A, B, C, D, E, F, G и H надо отобрать шесть специалистов: биолога, гидролога, синоптика, радиста, механика и врача. Обязанности биолога могут выполнять E и G, гидролога B и F, синоптика F и G, радиста C и D, механика C и H, врача A и D. Хотя некоторые претенденты владеют двумя специальностями, в экспедиции каждый сможет выполнять только одну обязанность. Кого и кем следует взять в экспедицию, если F не может ехать без B, D — без H и без C, C не может ехать одновременно с G, а A не может ехать вместе с B?

2.13. На множестве однозначных натуральных чисел даны два предложения:

$p(n)$: число 3 — делитель числа n;

$q(n)$: $n \leqslant 6$.

Найти множество истинности предложений:

1) $p(n) \vee q(n)$; 2) $p(n) \wedge \overline{q(n)}$;

3) $\overline{p(n)} \to q(n)$; 4) $\overline{p(n) \to q(n)}$.

2.14. Какие из следующих утверждений являются высказываниями? Какие из высказываний истинны и какие ложны:

а) Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна свободному члену.

б) Сумма корней любого приведенного квадратного уравнения равна свободному члену.

в) Существует приведенное квадратное уравнение, сумма корней которого равна свободному члену?

2.15. На множестве всех натуральных чисел заданы три предложения:

$p(n)$: число $n^2 - 2$ кратно 7;

$q(n)$: число $n - 2$ кратно 7;

$r(n)$: $4n^2 - 360n + 8099 < 0$.

При каких значениях n из данных трех предложений два истинны и одно ложно?

2.16. На множестве всех действительных чисел заданы три предложения:

$p(x)$: x — целое число;

$q(x)$: $x^2 - 3x$ — целое отрицательное число;

$r(x)$: $x + \frac{1}{x}$ — целое положительное число.

При каких значениях x ложно одно и только одно из этих трех высказываний?

2.17. На множестве всех упорядоченных пар $(m; n)$ целых положительных чисел заданы предложения:

$p(m, n)$: $m + 1$ делится на n;

$q(m, n)$: m равно $2n + 5$;

$r(m, n)$: $m + n$ делится на 3;

$s(m, n)$: $m + 7n$ — простое число.

Найти все пары чисел $(m; n)$, для которых одно и только одно из этих четырех высказываний ложно.

2.18. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} ax + y = b, \\ x^2 - 4y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет действительные решения при любых значениях b?

2.19. Дана система уравнений

$$\begin{cases} bx - y = ac^2, \\ (b-6)x + 2by = c + 1, \end{cases}$$

где a, b, c — действительные числа. При каких значениях a при любом b найдется такое c, при котором система имеет хотя бы одно решение?

2.20. Даны две точки $A(0; 9)$, $B(3; 6)$ и система неравенств

$$\begin{cases} 2x - y + a \leqslant 0, \\ 6x + 3y + 5a \geqslant 0. \end{cases}$$

При каких значениях параметра a решением системы будут координаты: 1) хотя бы одной точки отрезка AB, 2) каждой точки отрезка AB?

2.21. Рассмотрим два определения легкой контрольной.

1. Контрольная работа называется легкой, если каждую задачу решил хотя бы один ученик.

2. Контрольная работа называется легкой, если хотя бы один ученик решил все задачи.

1) Может ли контрольная быть легкой в смысле первого определения и трудной (не легкой) в смысле второго?

2) Может ли работа быть легкой в смысле второго определения и трудной в смысле первого?

2.22. Дано неравенство $kx + l^2 > 0$. При каких значениях k истинны следующие предложения:

1) При любом l неравенство имеет хотя бы одно решение.

2) Существует l, при котором неравенство верно для всех x.

3) При любом l неравенство верно для всех x.

4) Существует l, при котором неравенство имеет хотя бы одно решение.

2.23. Используя правила построения отрицания для высказываний, содержащих кванторы (см. формулы (14)), сформулировать отрицание следующих высказываний:

1) В некотором поезде, идущем из Москвы в Ленинград, в каждом вагоне есть (существует) свободное место.

2) В каждом городе Швеции есть улица, на которой есть дом, все окна которого выходят на юг.

2.24. Постройте контрпример для высказываний:

1) При каждом $n \in \mathbb{N}$ число $n^2 + n + 41$ является простым.

2) Каждая функция, непрерывная в точке, имеет в этой точке производную.

Методом математической индукции решить задачи **2.25—2.40.**

2.25. Доказать, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ верны равенства:

1) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

2) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \ldots + n(3n-1) = n^2(n+1)$.

3) $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$.

4) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

5) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

6) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \ldots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

7) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

8) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

9) $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$.

2.26. Доказать, что при любом $n \in \mathbb{N}$:

1) $n(2n^2 - 3n + 1)$ кратно 6.

2) $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ делится на 11.

3) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ делится нацело на 133.

4) $n^5 - n$ кратно 5.

2.27. Доказать, что при любом натуральном $n > 1$ число $2^{2^n} + 1$ оканчивается цифрой 7.

2.28. Доказать справедливость следующих неравенств для всех натуральных $n > 1$:

1) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

2) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

3) $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

4) $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} < n$.

5) $(2n!) > \frac{4n}{n+1}(n!)^2$.

2.29. Доказать, что при любом натуральном $n > 2$ верно неравенство

$$2^n n! < n^n.$$

2.30. При каких натуральных значениях n верны неравенства:
1) $3^n > 2^n + 7n$; 2) $2^n > n^2 + 4n + 5$;
3) $2^n > n^3$; 4) $n! > 2^n$?

2.31. Доказать, что

$$3 + 33 + \ldots + 33\ldots3 = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

(левая часть равенства содержит n слагаемых).

2.32. Доказать равенство

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} = 2\cos(\pi/2^{n+1}), \qquad n \in \mathbb{N}$$

(в левой части содержится n корней).

2.33. Доказать равенство

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2.34. Последовательность $\{a_n\}$ задается рекуррентным соотношением

$$a_n = \frac{5}{2}a_{n-1} - a_{n-2} \quad (n > 1), \qquad a_0 = 2, \quad a_1 = \frac{5}{2}.$$

Найти n-й член последовательности.

2.35. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольные неотрицательные числа, причем

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant 1/2.$$

Доказать, что

$$(1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_n) \geqslant 1/2.$$

2.36. Доказать, что любую сумму денег, большую 7 копеек, можно разменять только трехкопеечными и пятикопеечными монетами.

2.37. На плоскости проведено n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. На сколько частей разбивают плоскость эти прямые?

2.38. На сколько частей разделится сфера n плоскостями, проходящими через центр, если никакие три плоскости не проходят через один и тот же диаметр?

2.39. На плоскости произвольным образом проведено n прямых. Доказать, что черной и белой красками можно так закрасить плоскость, что любые две части, имеющие общую сторону, будут окрашены в разные цвета.

2.40. Доказать, что если p — простое число, n — натуральное, то $n^p - n$ делится на p (теорема Ферма).

§ 3. Действительные числа

1. Рациональные и иррациональные числа. *Действительным числом* называется бесконечная десятичная дробь. Для действительных чисел определены операции сложения и умножения,

подчиняющиеся коммутативному и ассоциативному законам и связанные между собой дистрибутивным законом (подробнее об этом см. ниже). Обратная к сложению операция называется вычитанием, обратная к умножению — делением. Действительные числа можно сравнивать по величине. Множество действительных чисел обозначается через $\mathbb{R}$.

Таким образом, всякое действительное число a согласно определению записывается в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots, \tag{1}$$

где α_0 — неотрицательное целое число (т. е. α_0 может принимать значения $0, 1, 2, 3, \ldots, m, \ldots$), а каждое из α_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — одна из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Знак «+» в записи (1) обычно не пишется. В этом случае число a называют неотрицательным: $a \geqslant 0$ и пишут

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \tag{2}$$

Число (2) называется *абсолютной величиной* числа (1) и обозначается через $|a|$. Таким образом,

$$|\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots| = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

Может случиться, что одно и то же действительное число допускает запись в виде двух различных десятичных дробей; в этом случае в одной из записей, начиная с некоторого места (десятичного разряда) после запятой, будут стоять только одни нули, а в другой — одни девятки. Например,

$$1 = 1{,}000 \ldots 0 \ldots = 0{,}999 \ldots 9 \ldots$$

В дальнейшем в качестве записи действительных чисел будем употреблять только бесконечные десятичные дроби (называемые допустимыми), у которых нет такого десятичного разряда, начиная с которого в записи числа стоит только цифра 9. При этом соглашении каждое действительное число записывается единственным образом в виде бесконечной десятичной дроби.

Если в десятичной записи (1) числа a, начиная с некоторого места, стоят только одни нули:

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n 00 \ldots 0 \ldots,$$

то обычно их не пишут:

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \tag{3}$$

и говорят, что число a записывается конечной десятичной дробью (3).

Для неотрицательного числа a, записанного в виде допустимой бесконечной десятичной дроби (2), конечная десятичная дробь

$$\underline{a}_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \tag{4}$$

называется его *нижним десятичным приближением* (или *десятичным приближением с недостатком*) порядка n, а число

$$\bar{a}_n = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + 10^{-n} \tag{5}$$

— *верхним десятичным приближением* (или *десятичным приближением с избытком*) порядка $n = 0, 1, 2, \ldots$

Если же число a является отрицательным: $a < 0$, т. е. записывается в виде допустимой десятичной дроби

$$a = -\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m \ldots,$$

где хотя бы одно из α_m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ не равно нулю, то его нижнее $\underline{a}_n$ и верхнее $\bar{a}_n$ десятичные приближения порядка n определяются равенствами

$$\underline{a}_n = -\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n - 10^{-n}, \quad \bar{a}_n = -\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n. \tag{6}$$

Таким образом, при любом $a \in \mathbb{R}$

$$\underline{a}_n \leqslant a \leqslant \bar{a}_n,$$

$$\bar{a}_n - \underline{a}_n = 10^{-n},$$

$$\underline{a}_n \leqslant \underline{a}_{n+1}, \quad \bar{a}_{n+1} \leqslant \bar{a}_n.$$

Приближения конечными десятичными дробями (4), (5) и (6) действительных чисел $a \in \mathbb{R}$ удобно использовать для осуществления операций сложения, вычитания, умножения, деления и сравнения действительных чисел.

Так, например, сумма $a + b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, является единственным действительным числом, удовлетворяющим при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ неравенству

$$\underline{a}_n + \underline{b}_n \leqslant a + b \leqslant \bar{a}_n + \bar{b}_n.$$

Произведение ab является единственным действительным числом, удовлетворяющим при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ неравенствам

$$\underline{a}_n\underline{b}_n \leqslant ab \leqslant \bar{a}_n\bar{b}_n, \text{ если } a \geqslant 0, \ b \geqslant 0,$$

$$\underline{a}_n\bar{b}_n \leqslant ab \leqslant \bar{a}_n\underline{b}_n, \text{ если } a < 0, \ b \geqslant 0,$$

$$\bar{a}_n\bar{b}_n \leqslant ab \leqslant \underline{a}_n\underline{b}_n, \text{ если } a < 0, \ b < 0.$$

Условие $a < b$ равносильно тому, что существует такой номер n, что $\bar{a}_n < \underline{b}_n$.

В § 1 уже отмечалось, что натуральные числа $1, 2, \ldots$ обозначаются через $\mathbb{N}$, а целые $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — через $\mathbb{Z}$. Числа вида

$$\frac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0,$$

называются *рациональными*, а символ $\frac{m}{n}$, с помощью которого

они записываются, — *рациональной дробью*. Одно и то же рациональное число a может быть записано разными рациональными дробями: если

$$a = \frac{m}{n} \text{ и } a = \frac{k}{l}, \quad m, n, k, l \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0, \ l \neq 0,$$

то это возможно тогда и только тогда, когда $lm = kn$.

Множество всех рациональных чисел обозначается через $\mathbb{Q}$. Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными. Множество всех иррациональных чисел обозначается через $\mathbb{I}$.

Бесконечная десятичная дробь называется *периодической* с периодом $\beta_1 \ldots \beta_m$ и записывается в виде

$$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n(\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m), \tag{7}$$

если после некоторого десятичного разряда (его номер обозначен n) группа цифр $\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m$ все время повторяется.

Беконечные десятичные периодические дроби и только они являются рациональными действительными числами. Отсюда следует, что действительное число является иррациональным тогда и только тогда, когда оно записывается непериодической бесконечной десятичной дробью. Переход от записи рационального числа рациональной дробью p/q, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, к его записи с помощью бесконечной периодической десятичной дроби осуществляется делением «столбиком» числителя p на знаменатель q. Переход от записи рационального числа в виде (7) к его записи с помощью рациональной дроби производится по формуле

$$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n(\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m) = \alpha_0 \frac{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m - \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n}{\underbrace{99 \ldots 9}_{m \text{ раз}}\underbrace{00 \ldots 0}_{n \text{ раз}}}. \tag{8}$$

В числителе дроби, находящейся в правой части равенства, стоит разность чисел, стоящих после запятой в (7) соответственно до второго и до первого периода. В знаменателе стоит число, запись которого начинается с цифры 9, взятой столько раз, сколько имеется цифр в периоде, а затем следуют нули, число которых равно числу цифр до периода. Применяя сформулированные правила, имеем, например,

$$\frac{3}{7} = 0,(428571), \qquad 2{,}7(13) = 2\,\frac{713 - 7}{990} = 2\,\frac{706}{990} = 2\,\frac{353}{495}.$$

Между точками геометрической прямой и действительными числами можно установить взаимно однозначное соответствие такое, что если числу нуль соответствует точка O, единице — точка E и вектор $\overrightarrow{OE}$ принят на прямой за координатный орт, то каждому числу поставлена в соответствие точка прямой с абсциссой, равной этому числу. Поэтому множество действительных чисел называется также *числовой прямой*, или *число-*

вой осью, или *действительной осью*, сами действительные числа называются *точками* числовой прямой, а например, вместо «число x меньше числа y» говорят: «точка x числовой оси лежит левее точки y».

Числовая прямая $\mathbb{R}$, дополненная двумя элементами, обозначаемыми $+\infty$ (плюс бесконечность) и $-\infty$ (минус бесконечность), такими, что для любого числа $x \in \mathbb{R}$ по определению считается

$$-\infty < x < +\infty,$$

называется *расширенной числовой прямой* $\overline{\mathbb{R}}$. Элементы $+\infty$ и $-\infty$ называют также *бесконечно удаленными точками* числовой прямой или *бесконечными числами*, в отличие от точек $x \in \mathbb{R}$, которые называют иногда *конечными точками* этой прямой (соответственно *конечными числами*).

Для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ интервал $(x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, называется ее *ε-окрестностью* и обозначается $U(x_0;\ \varepsilon)$, т. е.

$$U(x_0;\ \varepsilon) = \{x\colon\ |x - x_0| < \varepsilon\} \tag{9}$$

(рис. 4). Для бесконечно удаленных точек $+\infty$ и $-\infty$ их ε-окре-

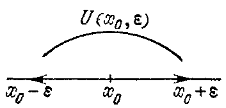


Рис. 4.

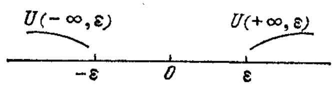


Рис. 5.

стности $U(+\infty;\ \varepsilon)$ и $U(-\infty;\ \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, определяются формулами:

$$U(+\infty;\ \varepsilon) = \{x\colon\ x > \varepsilon\},\quad U(-\infty;\ \varepsilon) = \{x\colon\ x < -\varepsilon\} \tag{10}$$

(рис. 5).

Иногда числовую прямую пополняют одним элементом, который обозначают ∞ и называют бесконечностью. Бесконечность без знака не связана отношением порядка с действительными числами. Ее ε-окрестность $U(\infty;\ \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, задается формулой

$$U(\infty;\ \varepsilon) = \{x\colon\ |x| > \varepsilon\}. \tag{11}$$

Бесконечность без знака также называют бесконечно удаленной точкой числовой прямой.

3.1. Записать рациональные дроби $2/3$, $11/20$, $3/14$, $-2/7$ в виде бесконечных десятичных дробей.

3.2. Записать периодические бесконечные десятичные дроби $0{,}125(0)$; $0{,}(3)$; $2{,}4(31)$; $0{,}2(9)$ в виде рациональных дробей.

3.3. Доказать, что число $0{,}121221222\ldots1\underbrace{22\ldots2}_{n\ \text{раз}}\ldots$ иррационально.

3.4. Доказать, что $\lg 2$, $\log_2 3$ — иррациональные числа.

3.5. Доказать, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2/3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ — иррациональные.

3.6. Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональным числом?

3.7. Доказать, что для любых рациональных чисел a и b таких, что $a < b$, найдется иррациональное число c, удовлетворяющее условию $a < c < b$.

3.8. Доказать, что для любых рациональных чисел p, q, r, из которых хотя бы одно не равно нулю, число $p\sqrt{2} + q\sqrt{3} + r\sqrt{2/3}$ — иррациональное.

3.9. Найти пять первых нижних и верхних десятичных приближений чисел $3/10$, $1/3$, $11/9$, $-5/8$.

3.10. Найти три нижних и верхних десятичных приближения чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

3.11. Соизмеримы ли отрезки, если отношение их длин выражается дробью $0{,}23(75)$?

3.12. Сравнить следующие действительные числа:

1) $3{,}3$ и $3{,}298$. 2) $3{,}1416$ и $3{,}14159$. 3) $3{,}141592$ и $22/7$.

4) $\sqrt{3}+2$ и $\sqrt{2}+\sqrt{5}$. 5) $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{19}$.

3.13. Найти три первые значащие цифры в нижних и верхних десятичных приближениях для следующих чисел:

1) $\frac{1}{3}+\sqrt{3}$. 2) $\sqrt{2}-1{,}4$. 3) $\sqrt{5}-2\frac{1}{3}$. 4) $\frac{1}{3}\sqrt{2}$.

5) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$. 6) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$.

3.14. Доказать, что у любых двух различных точек числовой прямой существуют непересекающиеся окрестности.

3.15. Доказать, что у любых двух различных точек числовой прямой, расширенной с помощью двух бесконечно удаленных точек $+\infty$ и $-\infty$ или с помощью одной бесконечно удаленной точки ∞, существуют непересекающиеся окрестности.

3.16. Найти наибольшую ε-окрестность точки $x = 2$, в которой 1) $x^2 - 5x + 4 < 0$, 2) $\sin x > 0$, 3) $\operatorname{tg} x < 0$, 4) $\dfrac{x^2(x+1)}{x-1} > 0$.

2. Целые числа.

Пример 1. Доказать, что если $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, то существует и притом единственное представление числа a в виде

$$a = bq + r,\quad 0 \leqslant r < b,\quad q \in \mathbb{Z},\quad r \in \mathbb{Z}.$$

△ Возьмем $q \in \mathbb{Z}$ так, что $bq \leqslant a < b(q+1)$. Тогда $0 \leqslant a - bq < b$, т. е. число $r = a - bq$ удовлетворяет условиям задачи.

Если $a = bq_1 + r_1$, $0 \leqslant r_1 < b$, то, вычитая из него почленно равенство $a = bq + r$, получаем $0 = b(q_1 - q) + r_1 - r$ и, следовательно, $r_1 - r$ кратно b. Поскольку $|r_1 - r| < b$, то это возможно только тогда, когда $r_1 = r$ и $q_1 = q$. ▲

3.17. Наибольший общий делитель натуральных чисел a и b обозначается (a, b). Доказать, что если $a = bq + c$, a, b, $c \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$, то $(a, b) = (b, c)$.

3.18. Пусть $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$. Доказать, что существуют $n \in \mathbb{N}$ и числа $q_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $r_j \in \mathbb{Z}$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ такие, что

$$\begin{aligned} &a = bq_1 + r_1, \ 0 < r_1 < b, \\ &b = r_1 q_2 + r_2, \ 0 < r_2 < r_1, \\ &r_1 = r_2 q_3 + r_3, \ 0 < r_3 < r_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-1} + r_{n-1}, \ 0 < r_{n-1} < r_{n-2}, \\ &r_{n-2} = r_{n-1} q_n, \end{aligned} \qquad (12)$$

и r_{n-1} является наибольшим общим делителем чисел a и b. (Такой метод нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел называется алгоритмом Евклида.)

3.19. Доказать, что совокупность общих делителей двух натуральных чисел совпадает с совокупностью делителей их наибольшего общего делителя.

Указание. Воспользоваться алгоритмом Евклида (12).

3.20. Доказать, что для любых натуральных чисел a, b и c справедливо равенство $(ac, bc) = (a, b)c$.

Указание. Умножить равенства (12) на c.

Пример 2. Доказать, что если a и b — натуральные числа и $(a, b) = 1$ (такие числа называются взаимно простыми), то для любого натурального c справедливо равенство $(ac, b) = (c, b)$.

△ Покажем, что числа (ac, b) и (b, c) делятся друг на друга, откуда сразу будет следовать, что они равны. Число b, а следовательно, и число bc делятся на (ac, b). Поэтому число (ac, b) является делителем чисел ac и bc, откуда согласно задаче **3.19** вытекает, что (ac, b) является и делителем наибольшего общего делителя $(ac, bc) = c(a, b) = c$ чисел ac и bc. Таким образом, (ac, b) является делителем чисел b и c, а потому и делителем (b, c). Обратно, число (b, c) является делителем чисел b и ac, следовательно, оно является делителем и их наибольшего общего делителя (ac, b). ▲

Пример 3. Доказать, что если a, b и c — натуральные числа, $(a, b) = 1$ и ac делится на b, то и c делится на b.

△ Согласно примеру 2 имеем $(ac, b) = (c, b)$, а поскольку ac делится на b, то $(ac, b) = b$. Таким образом, $(c, b) = b$, т. е. число c делится на b. ▲

3.21. Доказать, что если каждое натуральное число $a_1, a_2, \ldots, a_n$ взаимно просто с каждым натуральным числом $b_1, b_2, \ldots, b_m$, то и произведение $a_1 a_2 \ldots a_n$ взаимно просто с произведением $b_1 b_2 \ldots b_m$.

3.22. Доказать, что если произведение нескольких неотрицательных целых чисел делится на простое число p, то хотя бы один из сомножителей также делится на p. (Натуральное число называется простым, если оно не имеет целых положительных делителей, кроме единицы и самого себя.)

3.23. Доказать, что всякое натуральное число, большее единицы, раскладывается на произведение простых сомножителей и притом единственным способом, если отвлечься от порядка сомножителей.

3.24. Доказать, что множество простых чисел бесконечно.

3.25. Доказать, что для любых двух натуральных чисел m и n существуют такие целые числа p и q, что

$$pm + qn = (m, n).$$

В частности, если m и n — взаимно простые, то $pm + qn = 1$.

3.26. Доказать, что если ξ — иррациональное число, то множество дробных частей чисел вида $n\xi$, $n \in \mathbb{N}$, плотно на отрезке $[0; 1]$. (*Дробной частью* действительного числа x называется разность между этим числом и наибольшим целым числом, не превосходящим x. Множество $X \subset [a; b]$ называется *плотным на отрезке* $[a; b]$, если в любой окрестности каждой точки этого отрезка содержатся точки множества X.)

3.27. Доказать, что если натуральное число не является квадратом натурального числа, то оно не может быть и квадратом рационального числа.

Указание. Воспользоваться результатом задачи **3.23**.

---

3. Аксиоматическая теория действительных чисел.

3.1. Аксиомы действительных чисел. *Множеством действительных чисел* называется множество, для элементов которого выполняются следующие условия:

I. В множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ определена бинарная операция, называемая операцией сложения: любой упорядоченной паре действительных чисел a и b поставлено в соответствие число, обозначаемое $a + b$ и называемое суммой чисел a и b. При этом имеют место следующие свойства:

I_1 (коммутативный закон сложения). Для любых чисел a и b выполняется равенство $a + b = b + a$.

I_2 (ассоциативный закон сложения). Для любых чисел a, b и c выполняется равенство $a + (b + c) = (a + b) + c$.

I_3. Существует такое число, обозначаемое 0, что для любого числа a выполняется равенство $a + 0 = a$.

I_4. Для любого числа a существует такое число, называемое противоположным к числу a и обозначаемое $-a$, что $a + (-a) = 0$.

Число $a+(-b)$ называется разностью $a-b$ чисел a и b.

II. В множестве действительных чисел определена бинарная операция, называемая операцией умножения: любой упорядоченной паре действительных чисел a и b поставлено в соответствие число, обозначаемое ab и называемое произведением чисел a и b. При этом имеют место следующие свойства:

II_1 (коммутативный закон умножения). Для любых чисел a и b выполняется равенство $ab=ba$.

II_2 (ассоциативный закон умножения). Для любых чисел a, b и c выполняется равенство $a(bc)=(ab)c$.

II_3. Существует число, обозначаемое 1, такое, что для любого числа a выполняется равенство $a1=a$.

II_4. Для любого числа $a\neq 0$ существует такое число, называемое обратным к числу a и обозначаемое $\frac{1}{a}$, что $a\frac{1}{a}=1$.

Число $a\frac{1}{b}$ называется частным от деления числа a на число $b\neq 0$ и обозначается $\frac{a}{b}$, a/b или $a:b$.

III (дистрибутивный закон сложения относительно умножения). Для любых действительных чисел a, b и c справедливо равенство $(a+b)c=ac+bc$.

IV. Для любого числа a определено одно и только одно из соотношений $a>0$ (a больше нуля), $a=0$ (a равно нулю) и $a<0$ (a меньше нуля). При этом, если $a>0$ и $b>0$, то

IV_1. $a+b>0$.

IV_2. $ab>0$.

Числа, большие нуля, называются положительными; числа, меньшие нуля, — отрицательными. Если $a-b>0$, то говорят, что число a больше числа b, и пишут $a>b$ (или, что то же самое, b меньше a и пишут: $b<a$).

Наличие сравнения «больше» или «меньше» для любой упорядоченной пары различных действительных чисел называется свойством упорядоченности множества действительных чисел.

V (непрерывность). Каковы бы ни были непустые множества $A\subset\mathbb{R}$ и $B\subset\mathbb{R}$, у которых для любых двух элементов $a\in A$ и $b\in B$ выполняется неравенство $a\leqslant b$, существует такое число α, что для всех $a\in A$ и всех $b\in B$ справедливо соотношение $a\leqslant\alpha\leqslant b$.

Для того чтобы пояснить аксиоматическое определение действительных чисел, введем понятие поля. Если в некотором множестве X, содержащем более одного элемента, определены операции сложения и умножения, удовлетворяющие условиям I—III (в формулировках этих условий термин «число» надо заменить на термин «элемент множества X»), то множество X называется полем. Если, кроме того, выполняется условие IV, то поле называется упорядоченным.

Пусть X и Y — упорядоченные поля и существует такое взаимно однозначное отображение (биекция) $f\colon X\to Y$ поля X на поле Y, что для любых $x\in X$ и $x'\in X$ имеют место соотношения $f(x+x')=f(x)+f(x')$, $f(xx')=f(x)f(x')$, и если $x<x'$, то $f(x)<f(x')$, тогда упорядоченные поля X и Y называются изоморфными, а само отображение f — изоморфизмом (относительно сложения, умножения и упорядочения).

Если упорядоченное поле удовлетворяет условию V, то оно называется непрерывным упорядоченным полем.

Теорема 1. Два любых непрерывных упорядоченных поля изоморфны.

Эта теорема показывает, что данное выше аксиоматическое определение множества действительных чисел определяет это множество однозначным образом с точностью до изоморфизма.

Множество бесконечных десятичных дробей является одной из реализаций множества действительных чисел; примеры других их реализаций будут даны в задачах **3.43** и **8.190**.

В аксиоматической теории действительного числа для любого числа a число, обозначаемое $|a|$ и определяемое по формуле

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{если } a\geqslant 0,\\ -a, & \text{если } a<0,\end{cases}\tag{13}$$

называется *абсолютной величиной числа* a или его *модулем* (в случае реализации множества действительных чисел в виде бесконечных десятичных дробей это определение совпадает с приведенным выше в п. 1).

3.28. Исходя из свойств I_1—I_4 суммы, доказать следующие утверждения:

1) Если $a+b=c$, то $a=c-b$.
2) Число, обладающее свойством нуля, единственно.
3) Число, противоположное данному, единственно.
4) Для любого числа a справедливо равенство $a-a=0$.
5) Для любых чисел a и b справедливо равенство

$$-a-b=-(a+b).$$

6) Уравнение $a+x=b$ имеет в $\mathbb{R}$ решение и притом единственное: $x=b-a$.

7) Используя метод математической индукции, показать, что если $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$, то

$$(\ldots((a_{i_1}+a_{i_2})+a_{i_3})+\ldots+a_{i_{n-1}})+a_{i_n}=$$
$$=(\ldots((a_1+a_2)+a_3)+\ldots+a_{n-1})+a_n.$$

3.29. Исходя из свойств II_1—II_4 произведения, доказать следующие утверждения:

1) Число, обладающее свойством единицы, единственно.
2) Число, обратное к данному отличному от нуля числу, единственно.

3) Для любого числа $a \neq 0$ справедливо равенство

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a.$$

4) Для любого числа $a \neq 0$ справедливо равенство

$$\frac{a}{a} = 1.$$

5) Для любых чисел $a \neq 0$ и $b \neq 0$ справедливо равенство

$$\frac{1}{a} \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}.$$

6) Уравнение $ax = b$, $a \neq 0$, имеет в множестве действительных чисел решение и притом единственное:

$$x = \frac{b}{a}.$$

7) Равенство

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \; b \neq 0, \; d \neq 0,$$

справедливо тогда и только тогда, когда $ad = bc$.

8) Для любой дроби $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, и любого числа $c \neq 0$ справедливо равенство

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

9) Справедлива формула (правило умножения дробей)

$$\frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

10) Обратным элементом дроби $\frac{a}{b}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, является дробь $\frac{b}{a}$, т. е. $\frac{a}{b} \frac{b}{a} = 1$.

11) Справедлива формула (правило деления дробей)

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \; b \neq 0, \; c \neq 0, \; d \neq 0.$$

12) Если $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$, то

$$(\ldots((a_{i_1} a_{i_2}) a_{i_3}) \ldots a_{i_{n-1}}) a_{i_n} = (\ldots((a_1 a_2) a_3) \ldots a_{n-1}) a_n.$$

3.30. Исходя из свойств I—III сложения и умножения, доказать следующие утверждения:

1) Для любых чисел a, b и c имеет место равенство

$$a(b - c) = ab - ac.$$

2) Для любого числа a выполняется равенство $a0 = 0$.

3) Если $ab = 0$, то по крайней мере один из сомножителей a и b равен нулю.

4) Для любых чисел a и b имеет место равенство

$$(-a)b = -ab.$$

5) Справедлива формула (правило сложения дробей)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad b \neq 0, \; d \neq 0.$$

6) Справедлива формула

$$(a_1 + \ldots + a_n) b = a_1 b + \ldots + a_n b, \; n \in \mathbb{N}.$$

7) Справедлива формула

$$na = \underbrace{a + \ldots + a}_{n \text{ раз}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3.31. Исходя из свойств I—IV, доказать следующие утверждения:

1) Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

2) Если $a > b$, то для любого числа c справедливо неравенство $a + c > b + c$.

3) Для любых двух чисел a и b имеет место в точности одно из трех соотношений $a > b$, $a = b$, $a < b$.

4) Если $a < b$, то $-a > -b$.

5) Если $a < b$ и $c \leqslant d$, то $a + c < b + d$.

6) Если $a < b$ и $c \geqslant d$, то $a - c < b - d$.

7) Если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$.

8) Справедливо неравенство $1 > 0$.

3.32. Доказать утверждения:

1) Для любого числа a справедливы соотношения

$$|a| \geqslant 0, \; |a| = |-a|, \; -|a| \leqslant a \leqslant |a|.$$

2) Для любых чисел a и b справедливы соотношения

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|, \; ||a| - |b|| \leqslant |a - b|, \; |ab| = |a||b|.$$

3.33. Доказать, что два множества, удовлетворяющие аксиомам I—V, изоморфны между собой.

3.34. Доказать, что множество допустимых бесконечных десятичных дробей образует непрерывное упорядоченное поле, т. е. удовлетворяет аксиомам I—V.

3.2. Сечения упорядоченных множеств. Множество X называется *упорядоченным множеством*, если для любых двух его элементов a и b определено одно из трех отношений $a < b$ (a меньше b), $a = b$ (a равно b) и $a > b$ (a больше b), причем, если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$. Всякое подмножество упорядоченного множества упорядочено.

Примерами упорядоченных множеств являются множество действительных чисел и вообще любое упорядоченное поле.

Пара непустых подмножеств A и $B = X \setminus A$ упорядоченного множества X называется его *сечением* и обозначается $A|B$, если любой элемент из A меньше любого элемента из B. Множество A называется *нижним классом*, а множество B — *верхним*.

Если X — упорядоченное множество и $\alpha \in X$, то множества

$$A = \{x\colon\ x \leqslant \alpha\},\quad B = \{y\colon\ y > \alpha\}, \tag{14}$$

а также

$$A = \{x\colon\ x < \alpha\},\quad B = \{y\colon\ y \geqslant \alpha\} \tag{15}$$

образуют сечения множества X. В обоих этих случаях говорят, что сечение $A|B$ производится элементом α, и пишут $\alpha = A|B$.

Если два сечения $A_1|B_1$ и $A_2|B_2$ в упорядоченном множестве X производятся элементами этого множества: $A_1|B_1 = x_1 \in X$ и $A_2|B_2 = x_2 \in X$, то эти сечения называются *равными*, когда равны производящие их элементы: $x_1 = x_2$. Если же хотя бы одно из сечений $A_1|B_1$ и $A_2|B_2$ не производится элементом множества X, то эти сечения называются *равными*, если $A_1 = A_2$.

Сечение $A|B$ называется *нулевым* сечением упорядоченного поля, если оно производится нулем: $A|B = 0$.

Если у ненулевого сечения $A|B$ упорядоченного поля множество A содержит все отрицательные элементы, то сечение $A|B$ называют *сечением, большим нуля*, и пишут $A|B > 0$.

Ненулевое сечение упорядоченного поля, которое не больше нуля, называют *сечением, меньшим нуля*: $A|B < 0$.

3.35. Доказать, что если $X = \mathbb{R}$ или $X = \mathbb{Q}$, то в случае сечения (14) в классе B нет наименьшего числа, а в случае сечения (15) в классе A нет наибольшего.

3.36. Доказать, что в упорядоченном множестве элемент, производящий сечение, единствен.

3.37. Пусть B — множество всех таких положительных рациональных чисел r, что $r^2 > 2$ и $A = \mathbb{Q} \setminus B$. Доказать, что пара A, B образует сечение в множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и что в классе A нет наибольшего числа, а в классе B нет наименьшего и, следовательно, не существует рационального числа, производящего это сечение.

3.38. Доказать, что если в упорядоченном поле выполняются аксиомы I—IV, то аксиома V имеет место тогда и только тогда, когда каждое сечение рассматриваемого поля производится некоторым его элементом.

В задачах **3.39—3.43** под сечением понимается сечение множества рациональных чисел.

3.39. Пусть $A_1|B_1$ и $A_2|B_2$ — два сечения,

$$A_1 + A_2 = \{x = x_1 + x_2\colon\ x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2\},$$
$$B_1 + B_2 = \{x = x_1 + x_2\colon\ x_1 \in B_1,\ x_2 \in B_2\}.$$

Доказать, что существует и притом единственное сечение $A|B$ такое, что $A_1 + A_2 \subset A$ и $B_1 + B_2 \subset B$. Это сечение называется суммой данных сечений и обозначается $A_1|B_1 + A_2|B_2$.

3.40. Доказать, что для любого сечения $A|B$ существует ему противоположное, т. е. такое сечение, обозначаемое $-A|B$, что $A|B + (-A|B) = 0$.

3.41. Доказать, что если $-A|B < 0$, то $A|B > 0$.

3.42. Пусть $A_1|B_1$ и $A_2|B_2$ — сечения, $A_1|B_1 > 0$, $A_2|B_2 > 0$,

$$A_1A_2 = \{x = x_1x_2\colon\ x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2\},$$
$$B_1B_2 = \{x = x_1x_2\colon\ x_1 \in B_1,\ x_2 \in B_2\}.$$

Доказать, что существует и притом единственное сечение $A|B$ такое, что $A_1A_2 \subset A$, $B_1B_2 \subset B$ (это сечение обозначается $A_1|B_1 \cdot A_2|B_2$ и называется произведением данных сечений).

Абсолютная величина $|A|B|$ сечения $A|B$ определяется по формуле

$$|A|B| = \begin{cases} A|B, & \text{если } A|B \geqslant 0, \\ -A|B, & \text{если } A|B < 0. \end{cases}$$

Произведение произвольных сечений в упорядоченных полях $A_1|B_1$ и $A_2|B_2$ определяется по формуле

$$A_1|B_1 \cdot A_2|B_2 = \begin{cases} 0, & \text{если } A_1|B_1 = 0 \text{ или } A_2|B_2 = 0, \\ |A_1|B_1| \cdot |A_2|B_2|, & \text{если } A_1|B_1 \text{ и } A_2|B_2 \text{ одного знака}, \\ -(|A_1|B_1| \cdot |A_2|B_2|), & \text{если } A_1|B_1 \text{ и } A_2|B_2 \text{ разного знака}. \end{cases}$$

3.43. Доказать, что множество сечений рациональных чисел с введенными в нем сложением, умножением и упорядоченностью является непрерывным упорядоченным полем, т. е. множеством действительных чисел.

3.3. Рациональные степени. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$. Число, получающееся от умножения числа a на себя n раз, называется *n-й степенью числа a* и обозначается a^n. По определению

$$a^0 = 1 \text{ и } a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad a \neq 0.$$

Пусть $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Число $b \in \mathbb{R}$ — такое, что $b^n = a$ (если оно, конечно, существует), называется *корнем n-й степени* из числа a и обозначается $\sqrt[n]{a}$ или $a^{1/n}$.

Если $a \geqslant 0$, $b = \sqrt[n]{a}$ и $b \geqslant 0$, то число b называется *арифметическим значением корня* n-й степени из числа a. В дальнейшем под корнем из неотрицательного действительного числа будем понимать арифметическое значение корня, если не оговорено что-либо другое.

Пусть $a \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$, $r = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда по определению полагается

$$a^r = \sqrt[n]{a^m}.$$

3.44. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, причем если $n \leqslant 0$ или $m \leqslant 0$, то $a \neq 0$. Доказать, что тогда:

1) $a^m a^n = a^{m+n}$. 2) $(a^m)^n = (a^n)^m$.

3.45. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$. Доказать:

1) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$. 2) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$. 3) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

4) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b > 0$. 5) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

3.46. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $r \in \mathbb{Q}$, $r' \in \mathbb{Q}$. Доказать, что:

1) $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$. 2) $a^r a^{r'} = a^{r+r'}$.

3) $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$. 4) $(ab)^r = a^r b^r$. 5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$.

3.4. Верхняя и нижняя грани. Принцип вложенных отрезков. Пусть X — подмножество расширенного множества действительных чисел: $X \subset \overline{\mathbb{R}}$. Элемент $x_0 \in X$ называется *наибольшим* (*максимальным*) *элементом* множества X и обозначается $\max X$, если для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant x_0$. Элемент $x_0 \in X$ называется *наименьшим* (*минимальным*) *элементом* множества X и обозначается $\min X$, если для всех $x \in X$ имеет место неравенство $x \geqslant x_0$. Наибольший и наименьший элементы данного множества, если они существуют, единственны.

Множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует такое действительное число $a \in \mathbb{R}$, что все $x \in X$ удовлетворяют неравенству $x \leqslant a$ (соответственно $x \geqslant a$); число a в этом случае называется числом, ограничивающим сверху (снизу) множество X. Множество, ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным* множеством.

Наименьшее (наибольшее) из всех конечных или бесконечных чисел, ограничивающих сверху (снизу) множество $X \subset \mathbb{R}$, называется *верхней* (*нижней*) *гранью* множества X и обозначается $\sup X$ или $\sup\limits_{x \in X}\{x\}$ (соответственно $\inf X$ или $\inf\limits_{x \in X}\{x\}$).

Если $\alpha = \sup X$ (соответственно $\alpha = \inf X$), то

1) для всех $x \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant \alpha$ (соответственно $x \geqslant \alpha$);

2) для любого $\beta < \alpha$ (соответственно для любого $\beta > \alpha$) существует такое $x \in X$, что $x > \beta$ (соответственно $x < \beta$).

Если α — конечное число, то условие 2) равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $x \in X$, что $x > \alpha - \varepsilon$ (соответственно $x < \alpha + \varepsilon$).

Если верхняя (нижняя) грань множества является конечным числом: $\alpha \in \mathbb{R}$, то она называется *конечной*; в противном случае — *бесконечной*.

Верхняя и нижняя грани данного множества единственны. Для неограниченного сверху множества X имеем $\sup X = +\infty$, а для неограниченного снизу: $\inf X = -\infty$.

Теорема 2. Всякое ограниченное сверху (снизу) непустое множество действительных чисел имеет конечную верхнюю (нижнюю) грань.

Из теоремы 2 и аксиом I—V действительных чисел вытекает так называемый *принцип Архимеда*: для любого положительного действительного числа a существует такое натуральное число n, что $n > a$.

Множество отрезков $\{[a_n; b_n]\}$, $n \in \mathbb{N}$, действительных чисел ($a_n \in \mathbb{R}$, $b_n \in \mathbb{R}$) называется *системой вложенных отрезков*, если для всех n имеет место включение

$$[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n].$$

Теорема 3 (*принцип вложенных отрезков*). Любая система вложенных отрезков действительных чисел имеет непустое пересечение.

3.47. Доказать, что множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено тогда и только тогда, когда существует такое a, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|x| \leqslant a$.

3.48. Доказать ограниченность множества

$$X = \left\{x:\ x = \frac{\sqrt{t(t+1)}}{2t+1},\ t > 0\right\}.$$

3.49. Пусть $X = \{x:\ x \in \mathbb{Q};\ x^2 < 2\}$. Доказать, что множество X не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элемента. Найти $\sup X$ и $\inf X$.

3.50. Найти верхние и нижние грани множеств

$$\{n\};\quad \left\{\frac{1}{n}\right\};\quad \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\};\quad \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right\},\qquad n \in \mathbb{N}.$$

Найти наибольшие и наименьшие элементы этих множеств, если такие элементы существуют.

3.51. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ и $-X = \{x:\ -x \in X\}$. Доказать, что $\sup(-X) = -\inf X$, $\inf(-X) = -\sup X$.

3.52. Пусть $X_k \subset \mathbb{R}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ и

$$\sum_{k=1}^{n} X_k = \left\{ x\colon x = \sum_{k=1}^{n} x_k,\ x_k \in X_k,\ k=1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Доказать, что

$$\sup \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} \sup X_k, \qquad \inf \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} \inf X_k.$$

3.53. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ и

$$X - Y = \{z\colon z = x - y,\ x \in X,\ y \in Y\}.$$

Доказать, что $\sup(X-Y) = \sup X - \inf Y$.

3.54. Доказать, что множество всех правильных рациональных дробей m/n, $0 < m < n$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элемента. Найти его верхнюю и нижнюю грани.

3.55. Отрезком $[a;\ b]_{\mathbb{Q}}$ рациональных чисел называется множество

$$[a;\ b]_{\mathbb{Q}} = \{x\colon a \leqslant x \leqslant b,\ a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q},\ x \in \mathbb{Q}\}.$$

Система $\{[a_n;\ b_n]_{\mathbb{Q}}\}$, $n \in \mathbb{N}$, отрезков рациональных чисел называется вложенной, если для любого n выполняется включение

$$[a_{n+1};\ b_{n+1}]_{\mathbb{Q}} \subset [a_n;\ b_n]_{\mathbb{Q}}.$$

Справедливо ли утверждение, что пересечение любой системы вложенных отрезков рациональных чисел содержит по крайней мере одно рациональное число?

3.56. Справедливо ли утверждение, что всякая система вложенных интервалов $\{(a_n;\ b_n)\}$, т. е. таких, что

$$(a_{n+1};\ b_{n+1}) \subset (a_n;\ b_n),\ n \in \mathbb{N},$$

имеет непустое пересечение?

3.57. Существует ли система вложенных интервалов, имеющая непустое пересечение?

3.58. Исходя из аксиом I—V действительных чисел, доказать, что для любого числа $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, существует такое натуральное число n, что $n > a$ (как отмечалось выше, это свойство действительных чисел называется принципом Архимеда).

3.59. Доказать, что из принципа Архимеда следует, что для любых двух чисел $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$, существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $an > b$.

3.60. Пусть в упорядоченном поле X выполняется принцип Архимеда, т. е для любого $a \in X$, $a > 0$, существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $n > a$. Тогда следующие три утверждения для поля X равносильны:

1). Поле X удовлетворяет аксиоме V.

2) Любая система вложенных отрезков поля X имеет непустое пересечение.

3) Любое ограниченное сверху непустое подмножество поля X имеет конечную верхнюю грань.

§ 4. Прогрессии. Суммирование. Бином Ньютона. Числовые неравенства

1. Арифметическая и геометрическая прогрессии. *Арифметическая прогрессия* — числовая последовательность $\{a_n\}$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = a_n + d, \tag{1}$$

где a_1, d — заданные числа; d — *разность* арифметической прогрессии.

Формулы для n-го члена и суммы S_n первых n членов арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \tag{2}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n. \tag{3}$$

Свойства арифметической прогрессии:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \qquad n \geqslant 2, \tag{4}$$

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Геометрическая прогрессия — числовая последовательность $\{b_n\}$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$b_{n+1} = b_n q, \tag{6}$$

где b_1, q — заданные числа, $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$; q — *знаменатель* геометрической прогрессии.

Формулы для n-го члена и суммы S_n первых n членов геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \tag{7}$$

$$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{b_n q - b_1}{q-1}, \qquad q \neq 1. \tag{8}$$

Свойства геометрической прогрессии:

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}, \qquad n \geqslant 2, \tag{9}$$

$$b_k b_{n-k+1} = b_1 b_n, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Если $|q| < 1$, то геометрическую прогрессию называют *бесконечно убывающей*, ее сумма S выражается формулой

$$S = \frac{b_1}{1-q}. \tag{11}$$

4.1. Доказать, что если положительные числа a, b, c являются последовательными членами арифметической прогрессии, то числа

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\quad \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

также являются последовательными членами арифметической прогрессии.

4.2. Доказать, что если положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, то

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

4.3. Пусть S_n — сумма первых n членов арифметической прогрессии. Доказать, что:

1) $S_{n+3}=3S_{n+2}-3S_{n+1}+S_n$. 2) $S_{3n}=3(S_{2n}-S_n)$.

4.4. Доказать, что если последовательность $\{a_n\}$ является арифметической прогрессией, то при любом $n\geqslant 3$ и любом $k\in\mathbb{N}$ справедливо равенство

$$a_1^k-C_n^1a_2^k+C_n^2a_3^k+\ldots+(-1)^nC_n^na_{n+1}^k=0.$$

4.5. Пусть S_n — сумма первых n членов геометрической прогресии. Доказать, что

$$S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2.$$

4.6. Доказать, что для любого числа a и для любого $n\in\mathbb{N}$ выполняется равенство

$$(1+a+a^2+\ldots+a^{n-1})(1+a+a^2+\ldots+a^{n+1})=$$
$$=(1+a+a^2+\ldots+a^n)^2-a^n.$$

4.7. Найти следующие суммы:

1) $1+11+111+\ldots+11\ldots1$
(последнее слагаемое — n-значное число).

2) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}$.

3) $1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n$.

4) $x^n+2x^{n-1}+\ldots+(n-1)x^2+nx$.

4.8. Доказать, что последовательность $\{b_n\}$ отличных от нуля чисел является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда при каждом $n\geqslant 3$ выполняется равенство

$$(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_{n-1}^2)(b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2)=$$
$$=(b_1b_2+b_2b_3+\ldots+b_{n-1}b_n)^2.$$

2. Суммирование. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — заданные числа. Их сумма $a_1+a_2+\ldots+a_n$ обозначается $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+\ldots+a_n, \tag{12}$$

k называется *индексом суммирования.*

Сумма не зависит от того, какой буквой обозначен индекс суммирования, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{j=1}^{n}a_j=\sum_{p=1}^{n}a_p.$$

Операция суммирования обладает свойством линейности, т. е. для любых чисел α и β имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k+\beta b_k)=\alpha\sum_{k=1}^{n}a_k+\beta\sum_{k=1}^{n}b_k.$$

Рассмотрим сумму, содержащую mn слагаемых a_{ij}, где индексы i и j принимают значения от 1 до n и от 1 до m соответственно ($1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant m$). Эта сумма обозначается

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\quad\text{или}\quad\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}a_{ij}$$

и называется *двойной суммой.* Имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}.$$

Задачу о вычислении сумм вида

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),$$

где $f(x)$ — заданная функция, обычно рассматривают как задачу о нахождении S_n как функции от n. Например, если $f(k)=$ $=a_{k+1}-a_k$, где $\{a_n\}$ — заданная последовательность, то

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_2-a_1+a_3-a_2+\ldots$$
$$\ldots+a_n-a_{n-1}+a_{n+1}-a_n=a_{n+1}-a_1,$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1. \tag{13}$$

Пример 1. Вычислить суммы:

1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$; 2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

△ 1) Так как $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, то по формуле (13) находим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

2) Используя равенство

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

и формулу (13), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right). \quad ▲$$

Пример 2. Вычислить сумму

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

△ Рассмотрим тождество

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$$

Полагая в этом тождестве $x = 1, 2, \ldots, n$ и складывая почленно получаемые равенства, находим

$$\sum_{k=1}^{n} ((k+1)^3 - k^3) = 3 \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \sum_{k=1}^{n} k + n.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

то, используя формулу (13), получаем

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_n + \frac{3}{2} n(n+1) + n,$$

откуда

$$S_n = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Итак,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad ▲$$

Пример 3. Вычислить сумму

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx.$$

△ Рассмотрим равенство

$$S_n(x) \cdot 2 \sin \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{n} 2 \sin kx \sin \frac{x}{2}.$$

Так как

$$2 \sin kx \sin \frac{x}{2} = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x,$$

то по формуле (13) находим

$$S_n(x) \cdot 2 \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x = 2 \sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{n}{2} x,$$

откуда

$$S_n(x) = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}, \qquad \text{если } \sin \frac{x}{2} \neq 0;$$

если $\sin(x/2) = 0$, то $S_n(x) = 0$. ▲

Пример 4. Последовательность $\{x_n\}$ задана формулой $x_n = ax_{n-1} + b$. Выразить через x_1, a, b и n:

1) x_n, 2) $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

△ 1) Так как

$$x_k = ax_{k-1} + b, \quad x_{k-1} = ax_{k-2} + b,$$

то

$$x_k - x_{k-1} = a(x_{k-1} - x_{k-2}) = a^2(x_{k-2} - x_{k-3}) = \ldots = a^{k-2}(x_2 - x_1)$$

т. е.

$$x_k - x_{k-1} = a^{k-2}(x_2 - x_1).$$

Полагая в этой формуле $k = 2, 3, \ldots, n$ и складывая получаемые равенства, находим

$$\sum_{k=2}^{n} (x_k - x_{k-1}) = (x_2 - x_1) \sum_{k=2}^{n} a^{k-2}$$

или

$$x_n - x_1 = (x_2 - x_1) \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1} = ((a-1)x_1 + b) \cdot \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1},$$

откуда

$$x_n = a^{n-1} x_1 + b \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1}, \qquad a \neq 1.$$

При $a=1$ последовательность $\{x_n\}$ является арифметической прогрессией с разностью b, и поэтому

$$x_n = x_1 + (n-1)b.$$

2) $S_n = x_1 + \sum_{k=2}^{n} x_k = x_1 + a\sum_{k=2}^{n} x_{k-1} + (n-1)b,$

$$S_n = x_1 + a(S_n - x_n) + (n-1)b,$$

$$S_n(1-a) = x_1 - ax_n + (n-1)b =$$

$$= x_1 - a^n x_1 - ab\,\frac{a^{n-1}-1}{a-1} + (n-1)b,$$

откуда

$$S_n = \frac{(n-1)b}{1-a} + \frac{ab}{(a-1)^2}(a^{n-1}-1) + \frac{a^n-1}{a-1}x_1, \qquad a \neq 1. \ ▲$$

Пример 5. Последовательность $\{x_n\}$ задана формулой

$$x_n = (\alpha+\beta)x_{n-1} - \alpha\beta x_{n-2},$$

где $\alpha\beta \neq 0$. Выразить x_n через x_0, x_1, α, β и n.

△ Исходное равенство можно записать так:

$$x_n - \alpha x_{n-1} = \beta(x_{n-1} - \alpha x_{n-2}).$$

Обозначим $y_n = x_n - \alpha x_{n-1}$, тогда $y_n = \beta y_{n-1}$, откуда $y_n = \beta^{n-1}y_1$, т. е. $x_n - \alpha x_{n-1} = \beta^{n-1}y_1$ или

$$x_n = \alpha x_{n-1} + \beta^{n-1}y_1.$$

Полагая $x_n = \beta^n z_n$, получаем

$$z_n = \frac{\alpha}{\beta}z_{n-1} + \frac{y_1}{\beta}.$$

Считая $\alpha \neq \beta$ и используя результат предыдущего примера, находим

$$z_n = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} z_1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} - 1}{\frac{\alpha}{\beta} - 1} \cdot \frac{y_1}{\beta},$$

где $z_1 = x_1/\beta$, $y_1 = x_1 - \alpha x_0$. Отсюда получаем

$$x_n = x_1\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha-\beta} - \alpha\beta x_0 \frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}, \qquad \alpha \neq \beta.$$

Если $\alpha = \beta$, то $x_n = n\alpha^{n-1}x_1 - x_0(n-1)\alpha^n$. ▲

4.9. Вычислить двойную сумму $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$, если:

1) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$ 2) $a_{ij} = i$.

3) $a_{ij} = i - j$. 4) $a_{ij} = |i-j|$.

4.10. Доказать, что для любых чисел a и b справедливы равенства:

1) $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} b^k a^{n-k}$.

2) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k b^k a^{2n-k}$.

4.11. Доказать *тождество Лагранжа*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(a_j b_k - a_k b_j)^2.$$

4.12. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — заданные последовательности чисел. Доказать:

1) Если $B_m = \sum_{j=1}^{m} b_j$, то при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство (*преобразование Абеля*)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n,$$

а при любом $n \in \mathbb{N}$ и при любом $p \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p}(a_k - a_{k+1})B_k + a_{n+p}B_{n+p} - a_{n+1}B_n.$$

2) Если $D_s = \sum_{j=n+1}^{n+s} b_j$, то для любого $p \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{j=1}^{p-1}(a_{n+j} - a_{n+j+1})D_j + a_{n+p}D_p.$$

4.13. Вычислить суммы:

1) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$. 2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$.

3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$.

4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$. 5) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$.

4.14. Пусть $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия, все члены и разность d которой отличны от нуля. Доказать, что справедливы равенства:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$.

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}} = \frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}}\right)$.

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3}} = \frac{1}{3d}\left(\frac{1}{a_1 a_2 a_3} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3}}\right)$.

4.15. Пусть

$$S_n(p) = \sum_{k=1}^{n} k^p, \quad p \in \mathbb{N}.$$

1) Доказать формулу

$$\sum_{p=1}^{m} C_{m+1}^{p} S_n(p) = (n+1)^{m+1} - (n+1).$$

2) Вычислить по этой формуле $S_n(3)$, пользуясь тем, что

$$S_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad S_n(2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4.16. Доказать равенства:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = C_{2n+1}^{3}$. 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$.

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

5) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

6) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

7) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$.

4.17. Доказать равенства:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(x + k\alpha) = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha \cos\left(x + \frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(x + k\alpha) = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha \sin\left(x + \frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.18. Вычислить суммы:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(2k-1)x$. 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x$.

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin^2 kx$. 4) $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos^2 kx$.

5) $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin^3 kx$. 6) $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos^3 kx$.

4.19. Последовательность $\{x_n\}$ задана формулой $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$. Выразить x_n через x_0, x_1 и n, если:

1) $a = 2$, $b = 3$. 2) $a = 3$, $b = -2$. 3) $a = \alpha$, $b = 1 - \alpha$, $\alpha \neq 2$.

3. Бином Ньютона. Для любых чисел a, b и любого $n \in \mathbb{N}$ справедлива *формула бинома Ньютона*:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n, \tag{14}$$

где

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Слагаемые $C_n^k a^{n-k} b^k$ называют *членами разложения* (14), а числа C_n^k — *коэффициентами разложения* или *биномиальными коэффициентами*. Коэффициенты разложения обладают следующими свойствами:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k. \tag{15}$$

Полагая в формуле (14) $a = 1$, $b = x$, получаем

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k. \tag{16}$$

Подставляя в равенство (16) $x = 1$ и $x = -1$, находим

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0. \tag{17}$$

Пример 6. Вычислить сумму

$$\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2.$$

△ Рассмотрим тождество

$$(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}.$$

Приравнивая в этом тождестве коэффициенты при x^n и используя формулу (16), получаем

$$C_n^nC_n^0+C_n^{n-1}C_n^1+\ldots+C_n^{n-k}C_n^k+\ldots+C_n^0C_n^n=C_{2n}^n.$$

Это равенство в силу (15) можно записать в виде $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2=C_{2n}^n$. Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2=C_{2n}^n. \qquad (18)\ ▲$$

Пример 7. Вычислить сумму

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}.$$

△ Используя равенства

$$\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(k+1)k!}=$$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n+1-k)}{(n+1)(k+1)!}=\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1},$$

получаем

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}C_{n+1}^k=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1).\ ▲$$

4.20. Написать формулу бинома Ньютона:

1) $(1+x)^5$. 2) $(a+b)^6$.
3) $(x+y)^7$. 4) $(a-b)^8$.

4.21. Найти член разложения $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$, содержащий x^3.

4.22. Найти коэффициент многочлена:

1) $(1-x+x^2)^3$ при x^3.
2) $(1+2x-3x^2)^4$ при x^3 и x^4.
3) $(1+x^2-x^3)^9$ при x^8.
4) $(1+x^2+x^3)^7$ при x^{11}.
5) $\sum_{k=3}^{15}(1+x)^k$ при x^3.

4.23. Вычислить следующие суммы:

1) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)C_n^k$. 2) $\sum_{k=1}^{n}(k-1)C_n^k$.
3) $\sum_{k=1}^{n}C_{2n}^{2k}$. 4) $\sum_{k=1}^{n}C_{2n}^{2k-1}$.
5) $\sum_{k=0}^{m}(-1)^kC_n^k$, $m<n$. 6) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(C_n^k)^2$.

4.24. Доказать следующие равенства:

1) $\sum_{k=1}^{n}kC_n^k=n2^{n-1}$. 2) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}kC_n^k=0$.
3) $\sum_{k=0}^{s}C_n^kC_m^{s-k}=C_{m+n}^s$. 4) $\sum_{k=0}^{m}C_{n+k}^n=C_{n+m+1}^{n+1}$.
5) $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}C_n^k}{k+1}=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$. 6) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}C_n^k}{k+1}=\frac{n}{n+1}$.

4.25. Найти члены разложения, являющиеся целыми числами:

1) $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^5$. 2) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^8$.

4.26. Найти наибольший коэффициент многочлена:

1) $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^4$. 2) $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}$.

4.27. Найти наибольший член разложения $(1+\sqrt{2})^{30}$.

4.28. Доказать формулы:

1) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.
2) $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+6abc$.
3) $(a+b+c)^4=a^4+b^4+c^4+4(a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b)+6(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+12(a^2bc+b^2ac+c^2ab)$.

4.29. Доказать формулу

$$(x_1+x_2+\ldots+x_p)^n=\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_p=n}\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_p!}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_p^{k_p},$$

где суммирование ведется по всем целым неотрицательным k_1, $k_2,\ldots,k_p$ таким, что $k_1+k_2+\ldots+k_p=n$.

---

4. Числовые неравенства. Основные свойства неравенств:

1) если $a>b$, $b>c$, то $a>c$;
2) если $a>b$, то $a+c>b+c$ при любом c;

3) если $a > b$, $c > d$, то $a + c > b + d$;

4) если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$;
если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$;

5) если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bd$;

6) если $a \geqslant b > 0$ и $c > d > 0$, то $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$;

7) если $a > b \geqslant 0$, то $a^n > b^n$ при любом $n \in \mathbb{N}$;

8) если $a > b$, то $a^{2n+1} > b^{2n+1}$ при любом $n \in \mathbb{N}$;

9) если $a > b \geqslant 0$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ при любом $n \in \mathbb{N}$;

10) если $a > b$, то $\sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Некоторые важные неравенства:

1) Для любых действительных чисел a и b выполняется неравенство

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab. \tag{19}$$

2) *Среднее арифметическое* двух неотрицательных чисел не меньше их *среднего геометрического*:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}. \tag{20}$$

Неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического справедливо для любых n неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, т. е.

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}. \tag{21}$$

Равенство в (21) имеет место лишь при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Доказательство неравенства (21) дано в § 2 (пример 8).

3) Для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ выполняется *неравенство Коши — Буняковского*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right). \tag{22}$$

Равенство в (22) имеет место тогда и только тогда, когда существуют такие числа α и β, что $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ и для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ выполняется равенство $\alpha a_k + \beta b_k = 0$.

Пример 8. Доказать, что для любых действительных чисел a, b, c, d справедливо неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geqslant 4abcd.$$

△ Используя неравенство (21), получаем

$$\frac{1}{4}(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \geqslant \sqrt[4]{a^4 b^4 c^4 d^4} = |abcd| \geqslant abcd,$$

откуда следует искомое неравенство. ▲

Пример 9. Доказать неравенство Коши — Буняковского.

△ Если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, то в (22) имеет место равенство. Пусть хотя бы одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ отлично от нуля, тогда $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 0$. Рассмотрим квадратный трехчлен относительно x:

$$ax^2 + 2bx + c = \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2,$$

где

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad b = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad c = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Так как $(a_k x + b_k)^2 \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + 2bx + c$ неположителен: $b^2 \leqslant ac$. Следовательно,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Выясним, в каком случае в (22) имеет место равенство. Пусть $b^2 = ac$. Тогда, если $a = 0$, т. е. $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, то, положив $\alpha = 1$, $\beta = 0$ $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$, получим

$$\alpha a_k + \beta b_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть $a \neq 0$, тогда квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корень x_0 (так как дискриминант трехчлена равен нулю), т. е.

$$ax_0^2 + bx_0 + c = \sum_{k=1}^{n} (a_k x_0 + b_k)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $a_k x_0 + b_k = 0$ при $k = 1, 2, \ldots, n$. Положив $\alpha = x_0$, $\beta = 1$, получаем $\alpha a_k + \beta b_k = 0$, где $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. ▲

Легко проверить, что при выполнении условий $\alpha a_k + \beta b_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ соотношение (22) превращается в равенство.

4.30. Доказать, что для любых действительных чисел a, b справедливы неравенства:

1) $a^2 + b^2 \geqslant 2|ab|$. 2) $|a - b| \geqslant ||a| - |b||$.

3) $(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geqslant (a^3 + b^3)^2$.

4) $a^4 + b^4 \geqslant a^3 b + ab^3$.

4.31. Доказать, что для любых положительных чисел a, b справедливы неравенства

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}},$$

связывающие среднее гармоническое, среднее геометрическое, среднее арифметическое и среднее квадратическое чисел a и b.

4.32. Доказать, что для любых неотрицательных чисел a, b справедливы неравенства:

1) $a^n + b^n \leqslant (a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $a^n + b^n \geqslant a^k b^{n-k} + b^k a^{n-k}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$.

3) $(a+b)^n \leqslant 2^{n-1}(a^n + b^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

4.33. Доказать, что если $|b| < |a|/2$, то

$$\left|\frac{1}{a-b}\right| < \frac{2}{|a|}.$$

4.34. Доказать, что для любых действительных чисел a, b таких, что $a^2 + b^2 = 1$, выполняется неравенство $|a+b| \leqslant \sqrt{2}$.

4.35. Доказать, что для любых действительных чисел a, b, c справедливы неравенства:

1) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$.

2) $(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

3) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leqslant |a| + |b| + |c|$.

4) $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab + bc + ac)$.

5) $(ab + bc + ac)^2 \geqslant 3(a+b+c)abc$.

6) $(a+b-c)^2 + (b+c-a)^2 + (a+c-b)^2 \geqslant ab + bc + ac$.

4.36. Доказать, что для любых положительных a, b, c справедливы неравенства:

1) $\dfrac{bc}{a} + \dfrac{ac}{b} + \dfrac{ab}{c} \geqslant a + b + c$.

2) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{bc}} + \dfrac{1}{\sqrt{ca}} + \dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

3) $\dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} \geqslant \dfrac{a+b+c}{3}$.

4) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \geqslant 3$.

5) $\dfrac{2}{b+c} + \dfrac{2}{c+a} + \dfrac{2}{a+b} \geqslant \dfrac{9}{a+b+c}$.

6) $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

4.37. Доказать, что для любых неотрицательных чисел a, b, c справедливы неравенства:

1) $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8\,abc$.

2) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$.

3) $(a+b+c)(ab + bc + ac) \geqslant 9abc$.

4) $(ab + bc + ac)^3 \geqslant 27\,abc$.

5) $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leqslant abc$.

6) $(a+b+c)^3 - 4(a+b+c)(ab+bc+ac) + 9abc \geqslant 0$.

7) $3(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant (a+b+c)(ab + ac + bc)$.

8) $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(a+b+c)$.

4.38. Доказать, что для любого натурального $n \geqslant 3$ выполняются неравенства:

1) $n^{n+1} > (n+1)^n$.

2) $(n!)^2 > n^n$.

4.39. Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства:

1) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{1}{2}$. 2) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{2n}$.

3) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$. 4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < 2$.

4.40. Доказать, что для любого натурального $n \geqslant 2$ справедливы неравенства:

1) $2 < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 3$. 2) $1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

3) $\sqrt{n} \leqslant \sqrt[n]{n!} < \dfrac{n+1}{2}$.

4.41. Доказать неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\,\sqrt{n-k+1}} > 1.$$

4.42. Пусть $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$. Доказать, что

$$(1+a)^n > 1 + C_n^k a^k.$$

4.43. Доказать, что если $x > 0$, то справедливы неравенства

$$1 + \frac{x}{2+x} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}.$$

4.44. Доказать, что если $|x| < 1$ и $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, то

$$(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n.$$

4.45. Пусть $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что

$$a + a^2 + \ldots + a^{2n-1} \leqslant n(1 + a^{2n}) - a^n.$$

4.46. Пусть $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$. Доказать, что

$$a^m + \frac{1}{a^m} \leqslant a^n + \frac{1}{a^n}.$$

4.47. Доказать, что если A — наименьшее, B — наибольшее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то справедливо неравенство

$$A \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leqslant B.$$

4.48. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — действительные числа, A — наименьшее, а B — наибольшее из чисел $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|$. Доказать, что

$$A \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \leqslant B.$$

4.49. Доказать, что для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leqslant n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2).$$

4.50. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — действительные числа, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — положительные числа, M — наибольшая, а m — наименьшая из дробей $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$. Доказать, что

$$m \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \leqslant M.$$

4.51. Доказать, что для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 1,$$

справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant 1.$$

4.52. Доказать, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

4.53. Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа такие, что $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, то

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

4.54. Пусть $a_i > -1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и числа a_i имеют один и тот же знак. Доказать неравенство

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

4.55. Пусть $x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные действительные числа, $\alpha > 0$. Доказать, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k a_k\right| \leqslant \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \frac{\alpha}{4} \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

4.56. Доказать, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливы неравенства

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}},$$

связывающие среднее гармоническое, среднее геометрическое, среднее арифметическое и среднее квадратическое чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

4.57. Доказать, что если

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n, \quad b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n,$$

то

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \, \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \leqslant \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n}.$$

4.58. Пусть положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ являются последовательными членами арифметической прогрессии. Доказать, что

$$\sqrt{a_1 a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

4.59. Доказать, что если A — наименьшее, B — наибольшее из положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то справедливы неравенства:

1) $A \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant B.$

2) $A \leqslant \sqrt{\dfrac{a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m}{n}} \leqslant B.$

3) $A \leqslant \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leqslant B.$

4.60. Доказать, что для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедливы неравенства:

1) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}.$

2) $\left|\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k - b_k|.$

3) $\left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right)^2\right)^{1/2} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}.$

4.61. Доказать, что если $a_1 \geqslant 0,\ a_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ a_n \geqslant 0$ и $p \in \mathbb{N}$, то

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}\right)^p \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^p.$$

§ 5. Комплексные числа

1. Определение комплексных чисел. Свойства операций. *Комплексными числами* называются выражения вида $a+bi$ (a и b — действительные числа, i — некоторый символ), для которых следующим образом вводятся понятие равенства и операции сложения и умножения:

а) два комплексных числа a_1+b_1i и a_2+b_2i равны тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$;

б) *суммой* чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется число

$$a_1+a_2+(b_1+b_2)i;$$

в) *произведением* чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется число

$$a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

Таким образом, сложение и умножение комплексных чисел производятся согласно формулам

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=a_1+a_2+(b_1+b_2)i, \qquad (1)$$

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)i. \qquad (2)$$

Множество всех комплексных чисел обозначают $\mathbb{C}$. Элементы множества $\mathbb{C}$ (комплексные числа) часто обозначают одной буквой, причем обычно используют для этого буквы z, w, иногда с индексами, например, z_1, z_2, w_0. Равенство $z=a+bi$ означает, что комплексное число $a+bi$ обозначено буквой z.

Операции сложения (1) и умножения (2) обладают следующими свойствами:

1. Коммутативности сложения

$$z_1+z_2=z_2+z_1.$$

2. Ассоциативности сложения

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

3. Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 существует комплексное число z такое, что $z_1+z=z_2$. Это число называется *разностью* чисел z_2 и z_1 и обозначается z_2-z_1. Разность комплексных чисел $z_2=a_2+b_2i$ и $z_1=a_1+b_1i$ находится по формуле

$$z_2-z_1=(a_2-a_1)+(b_2-b_1)i. \qquad (3)$$

4. Коммутативности умножения

$$z_1z_2=z_2z_1.$$

5. Ассоциативности умножения

$$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3).$$

6. Для любых комплексных чисел $z_1 \neq 0+0i$ и z_2 существует число z такое, что $z_1z=z_2$. Это число называется *частным* комплексных чисел z_2 и z_1 и обозначается $\frac{z_2}{z_1}$ или z_2/z_1. Деление на комплексное число $0+0i$, которое называется нулем, невозможно. Частное z_2/z_1 двух комплексных $z_2=a_2+b_2i$ и $z_1=a_1+b_1i$ при условии, что делитель отличен от нуля, может быть найдено по формуле

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1^2+b_1^2}i. \qquad (4)$$

7. Дистрибутивности

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

Комплексное число вида $a+0i$ отождествляют с действительным числом a, т. е. считают, что $a+0\cdot i=a$. Например,

$$0+0\cdot i=0,\ 1+0\cdot i=1,\ -1+0\cdot i=-1.$$

Таким образом, множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел, т. е. $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

Числа $0+bi$ называют *чисто мнимыми* и обозначают bi. Например, $0-2i=-2i$, $0+1\cdot i=i$. Действительное число a называется *действительной частью* комплексного числа $a+bi$. Действительное число b называют *мнимой частью* комплексного числа $a+bi$. Числа $a+bi$ и $a-bi$, т. е. числа, отличающиеся только знаком мнимой части, называются *сопряженными* комплексными числами. Число, сопряженное числу z, обозначается $\bar{z}$. Комплексное число i принято называть *мнимой единицей*. Для мнимой единицы справедлива формула

$$i^2=-1. \qquad (5)$$

Формула (2) умножения комплексных чисел не нуждается в запоминании, так как она получается, если формально перемножить двучлены a_1+b_1i и a_2+b_2i по обычному правилу умножения двучленов и затем в соответствии с формулой (5) заменить i^2 на -1.

Пример 1. Найти сумму и произведение комплексных чисел

$$z_1=-2+3i,\ z_2=7-8i.$$

$\triangle$ По формуле (1) находим

$$z_1+z_2=(-2+7)+(3-8)i=5-5i.$$

Произведение находим формальным перемножением двучленов $(-2+3i)$ и $(7-8i)$:

$$z_1z_2=(-2+3i)(7-8i)=-14+16i+21i-24i^2=10+37i. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Найти сумму и произведение сопряженных комплексных чисел.

△ Пусть $z = x + yi$, тогда $\bar{z} = x - yi$.

Сумму находим по формуле (1):

$$z_1 + z_2 = (x + yi) + (x - yi) = 2x.$$

Произведение находим по правилу умножения двучленов:

$$z_1 z_2 = (x + yi)(x - yi) = x^2 - xyi + xyi - y^2 i^2 = x^2 + y^2.$$

Таким образом, сумма сопряженных чисел есть всегда число действительное, а произведение — число действительное и, более того, неотрицательное. ▲

Пример 3. Даны комплексные числа $z_1 = -1 + 6i$ и $z_2 = 2 + 5i$. Найти разность $z_2 - z_1$ и частное z_2/z_1.

△ По формуле (3) находим

$$z_2 - z_1 = (2 + 5i) - (-1 + 6i) = 3 - i.$$

Частное находим по формуле (4):

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2+5i}{-1+6i} = \frac{(-1)\cdot 2 + 6\cdot 5}{(-1)^2 + 6^2} + \frac{(-1)\cdot 5 - 2\cdot 6}{(-1)^2 + 6^2}\, i = \frac{28}{37} - \frac{17}{37} i. \quad ▲$$

Пример 4. Выполнить действия

$$\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}.$$

△ Перемножив числа, стоящие в знаменателе, получим

$$z = \frac{3+i}{(1+i)(1-2i)} = \frac{3+i}{1-2i+i+2} = \frac{3+i}{3-i}.$$

Далее можно воспользоваться формулой (4), но удобнее поступить иначе. Умножим числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю, тогда

$$z = \frac{(3+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{9+6i-1}{9+1} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} i. \quad ▲$$

5.1. Доказать свойства 1—7 операций сложения и умножения комплексных чисел.

5.2. Доказать формулу (5): $i^2 = -1$.

5.3. Найти сумму и произведение комплексных чисел z_1 и z_2, если:

1) $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = 3 - 2i$.

2) $z_1 = 0{,}5 - 3{,}2i$, $z_2 = 1{,}5 - 0{,}8i$.

3) $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}\, i$, $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}\, i$.

5.4. Найти разность $z_2 - z_1$ и частное z_2/z_1, если:

1) $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 0{,}4 - 0{,}2i$.

2) $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 0{,}6$.

3) $z_1 = \sqrt{5} - i$, $z_2 = \sqrt{5} - 2i$.

5.5. Найти мнимую часть z, если:

1) $z = (2 - i)^3 (2 + 11i)$. 2) $z = \dfrac{2-3i}{1+4i} + i^6$.

3) $z = \dfrac{5+2i}{2-5i} - \dfrac{3-4i}{4+3i} - \dfrac{1}{i}$.

5.6. Выполнить действия:

1) $i^{17} + i^{18} + i^{19} + i^{20}$. 2) $2i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$.

3) $\dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{1-i}{1+i}$. 4) $\dfrac{13+12i}{6i-8} + \dfrac{(1+2i)^2}{2+i}$.

5) $\dfrac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$.

5.7. Определить, при каких действительных значениях x и y комплексные числа

$$z_1 = y^2 - 7y + 9xi \text{ и } z_2 = -12 + 20i + x^2 i$$

равны.

5.8. Определить, при каких действительных значениях x и y комплексные числа

$$z_1 = 8x^2 - 20i^9 \text{ и } z_2 = 9x^2 - 4 + 10yi^3$$

являются сопряженными.

5.9. Решить уравнения:

1) $(1 + 2i)(z - i) + (4i - 3)(1 - iz) + 1 + 7i = 0$.

2) $z^2 + \bar{z} = 0$.

5.10. Решить систему

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i, \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i. \end{cases}$$

5.11. Доказать равенства:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$. 2) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$.

3) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$. 4) $\overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$, $z_2 \neq 0$.

5) $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$, $n \in \mathbb{N}$.

---

2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа. Каждому комплексному числу $a + bi$ может быть поставлена в соответствие точка $M(a; b)$ координатной плоскости и, наоборот, каждой точке $M(a; b)$ плоскости — комплексное число $a + bi$. Установленное таким образом соответствие является взаимно однозначным. Оно дает возможность рассматривать комплексные числа как точки координатной плоскости. Эту плоскость называют комплексной плоскостью. Ось абсцисс называют *действительной осью* (на ней расположены точки, соответствующие действительным числам), ось ординат — *мнимой осью* (на ней лежат точки, соответствующие мнимым числам).

Часто комплексное число $a+bi$ удобно интерпретировать как вектор $\overrightarrow{OM}$ (рис. 6). Каждому вектору плоскости с началом в точке $O(0;0)$ и с концом в точке $M(a;b)$ соответствует комплексное число $a+bi$ и наоборот. Точке $O(0;0)$ соответствует нулевой вектор.

Соответствие, установленное между множеством комплексных чисел, с одной стороны, и множествами точек или векторов плоскости, с другой стороны, позволяет комплексные числа называть точками или векторами и говорить, например, о векторе $a+bi$ или точке $a+bi$.

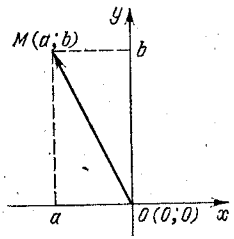


Рис. 6.

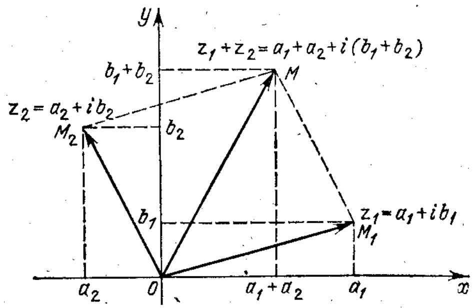


Рис. 7.

Изображение комплексных чисел векторами позволяет дать простое геометрическое истолкование операциям над комплексными числами. Например, сумма комплексных чисел геометрически может быть истолкована как вектор, равный сумме векторов, соответствующих слагаемым комплексным числам (рис. 7).

Модулем комплексного числа называется длина соответствующего этому числу вектора. Для модуля числа z используется обозначение $|z|$. Модуль комплексного числа $z=a+bi$ может быть вычислен по формуле

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}. \qquad (6)$$

Аргументом комплексного числа $z\neq 0$ называется угол между положительным направлением действительной оси и вектором z, причем этот угол считается положительным, если отсчет ведется против часовой стрелки, и отрицательным, если отсчет производится по часовой стрелке. Для числа $z=0$ аргумент не определяется.

Аргумент комплексного числа, в отличие от модуля, определяется неоднозначно. Например (рис. 8), аргументами числа $z=1+i$ являются следующие углы: $\varphi_1=\frac{\pi}{4}$, $\varphi_2=\frac{\pi}{4}+2\pi=$

$=\frac{9}{4}\pi$, $\varphi_3=\frac{\pi}{4}-2\pi=-\frac{7\pi}{4}$; вообще, каждый из углов $\varphi_k=\frac{\pi}{4}+$ $+2\pi k$, где k — произвольное целое число

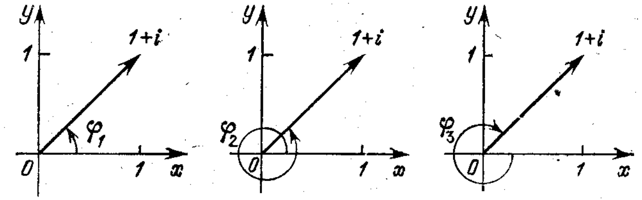


Рис. 8.

Любые два аргумента комплексного числа отличаются на число, кратное 2π. Для обозначения множества всех аргументов числа $z=a+bi$ используется символ $\arg z$ или $\arg(a+bi)$. Если речь идет о каком-либо одном из аргументов, то его обычно обозначают буквой φ.

Действительная и мнимая части комплексного числа $z=a+bi$ выражаются через его модуль $|z|=r$ и аргумент φ следующим образом (рис. 9):

$$\begin{cases} a=r\cos\varphi, \\ b=r\sin\varphi. \end{cases} \qquad (7)$$

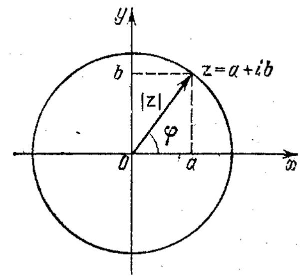


Рис. 9.

Таким образом, аргументы φ комплексного числа могут быть найдены из системы уравнений

$$\begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases} \qquad (8)$$

Аргументы комплексного числа $z=a+bi$ $(a\neq 0)$ можно найти и из уравнения

$$\operatorname{tg}\varphi=b/a, \qquad (9)$$

которое является следствием системы (8). Это уравнение не равносильно системе (8), оно имеет больше решений, но отбор нужных решений (аргументов комплексного числа) не представляет труда, так как из алгебраической формы записи комплексного числа всегда видно, в каком квадранте комплексной плоскости оно расположено.

Пример 5. Найти модули комплексных чисел

$$z_1=2-i, \quad z_2=2\sqrt{6}+5i, \quad z_3=i.$$

△ По формуле (6) находим

$$|z_1|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}, \quad |z_2|=\sqrt{(2\sqrt{6})^2+5^2}=7.$$

Для вычисления модуля z_3 нет необходимости использовать формулу (6). Длина вектора $z_3 = i$, очевидно, равна единице, поэтому $|z_3| = 1$. ▲

Пример 6. Найти аргументы комплексных чисел

$$z_1 = -i,\ z_2 = 1,\ z_3 = -1 + i.$$

△ Построив векторы z_1, z_2, z_3, находим один из аргументов для каждого числа: $\varphi_1 = -\pi/2$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 3\pi/4$. Следовательно,

$$\arg z_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \arg z_2 = 2\pi k,\ \arg z_3 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,$$

где k — произвольное целое число. ▲

Пример 7. Найти аргументы комплексного числа $z = -1 - \sqrt{3}i$.

△ В данном случае $a = -1$, $b = -\sqrt{3}$. Система (8) имеет вид

$$\begin{cases} \cos\varphi = -1/2, \\ \sin\varphi = -\sqrt{3}/2. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $\varphi_k = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$\arg z = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \quad ▲$$

Пример 8. Найти аргументы комплексного числа $z = -\sqrt{3} + i$.

△ Каждый из аргументов φ числа $z = -\sqrt{3} + i$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg}\varphi = -1/\sqrt{3}.$$

Из этого уравнения следует, что

$$\varphi_k = -\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Так как число $z = -\sqrt{3} + i$ расположено во втором квадранте комплексной плоскости, то его аргументами будут числа φ_k при нечетных значениях k. Следовательно,

$$\arg(-\sqrt{3} + i) = -\frac{\pi}{6} + \pi(2n+1) = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \quad ▲$$

5.12. На комплексной плоскости даны точки z_1, z_2, z_3, являющиеся вершинами треугольника. Найти точку пересечения его медиан.

5.13. В точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$ комплексной плоскости расположены материальные точки соответственно с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Найти центр тяжести такой системы материальных точек.

5.14. На комплексной плоскости даны точки z_1, z_2, z_3, являющиеся тремя последовательными вершинами некоторого параллелограмма. Найти четвертую вершину этого параллелограмма.

5.15. На комплексной плоскости даны точки $z_1 = 6 + 8i$, $z_2 = 4 - 3i$. Найти комплексные числа, соответствующие точкам, лежащим на биссектрисе угла, образованного векторами z_1 и z_2.

5.16. Найти модуль комплексного числа z:

1) $z = -4$. 2) $z = -i$. 3) $z = -5 - 2\sqrt{6}i$.

4) $z = 1 + \cos(8\pi/7) + i\sin(8\pi/7)$.

5.17. Решить уравнение:

1) $z^2 + 3|z| = 0$. 2) $z^2 + 2|z| = 1$.

3) $z^2 + |z|^2 = 0$. 4) $z^2 + z|z| + |z^2| = 0$.

5.18. Доказать равенства:

1) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. 2) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$, $z_2 \neq 0$.

5.19. Доказать неравенства

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

5.20. Доказать, что $|z_1 - z_2|$, т. е. модуль разности комплексных чисел z_1 и z_2, равен расстоянию между точками z_1 и z_2 комплексной плоскости.

5.21. Найти множество точек комплексной плоскости, заданное условием:

1) $|z + 1| = 1$. 2) $|z - i| < |z + i|$.

3) $|z + 2i - 1| \leqslant 2$. 4) $|z - 2|^2 + |z + 2|^2 = 26$.

5) $|z - 2| + |z + 2| = 26$. 6) $\sin|z| > 0$.

7) $\lg|z - 10i| < 1$. 8) $|z|^2 + 3z + 3\bar{z} = 0$.

5.22. Решить систему уравнений:

1) $|z + 1 - i| = |3 + 2i - z| = |z + i|$.

2) $\begin{cases} |z + 1| = |z + 2|, \\ |3z + 9| = |5z + 10i|. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (1 - i)\bar{z} = (1 + i)z, \\ |z^2 + 51i| = 1. \end{cases}$

5.23. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} |z + 1 - i| = \sqrt{2}, \\ |z| = 3 \end{cases}$$

не имеет решений.

5.24. Найти аргументы комплексного числа:

1) $z = i$. 2) $z = -1$. 3) $z = 8$. 4) $z = 2 - 2i$.

5) $z = \sin(\pi/9) - i\cos(\pi/9)$. 6) $z = 1 + \cos(\pi/7) + i\sin(\pi/7)$.

5.25. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием:

1) Один из аргументов числа z равен нулю.
2) Один из аргументов равен $5\pi/2$.
3) Один из аргументов φ удовлетворяет неравенствам $2\pi < \varphi < 3\pi$.
4) Один из аргументов φ удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \varphi < 2\pi$?

5.26. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием:

1) $\arg z = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2) $\pi(8k+1)/4 < \arg(z+i) < \pi(4k+1)/2,\quad k \in \mathbb{Z}$?

5.27. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию:

1) $|z+1-i| = 1$, 2) $|z+3-\sqrt{3}i| \leqslant \sqrt{3}$, найти число, имеющее наименьший положительный аргумент.

5.28. Где находится точка z^2, если точка z принадлежит прямой $\operatorname{Im} z = 1$?

5.29. Где находится точка z комплексной плоскости, если точка z^2 принадлежит мнимой оси?

5.30. Пусть $z \neq \pm 1$. Доказать, что точка $(z-1)/(z+1)$ принадлежит мнимой оси тогда и только тогда, когда точка z принадлежит окружности радиуса $R = 1$ с центром в точке $z = 0$.

5.31. Может ли точка $z = 0$ принадлежать какому-нибудь многоугольнику, вершины которого находятся в точках

$$z_k = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{k-1},\quad |z| < 1?$$

---

3. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Каждое комплексное число $z = a + bi$, отличное от нуля, может быть представлено в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где r — модуль числа, а φ — один (любой) из его аргументов. Это представление комплексного числа называется *тригонометрической формой комплексного числа.* Запись числа в виде $z = a + bi$ называют *алгебраической формой комплексного числа.*

Для того чтобы перейти от алгебраической формы числа к тригонометрической, достаточно найти модуль комплексного числа и один из его аргументов.

Два комплексных числа, записанные в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{и} \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

равны тогда и только тогда, когда

$$r_1 = r_2,\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\qquad k \in \mathbb{Z},$$

т. е. когда модули чисел равны, а аргументы отличаются на $2\pi k$, где k — некоторое целое число.

Запись комплексных чисел в тригонометрической форме используется при умножении и делении чисел. Пусть

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ и } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

— два числа, записанные в тригонометрической форме. Тогда

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)), \tag{10}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)). \tag{11}$$

Следовательно,

$$|z_1z_2| = r_1r_2,\quad \arg(z_1z_2) = \varphi_1+\varphi_2+2\pi k,\qquad k \in \mathbb{Z},$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2},\quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \varphi_1-\varphi_2+2\pi k,\qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел, сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения; модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей этих чисел, разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного.

Пример 9. Записать числа $z_1 = -1 - i$, $z_2 = -2$, $z_3 = i$ в тригонометрической форме.

△ Так как $|z_1| = \sqrt{2}$, а $\varphi_1 = -3\pi/4$, то

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos(-3\pi/4) + i\sin(-3\pi/4)).$$

Модуль z_2 равен 2, а одним из аргументов z_2 является угол $\varphi_2 = \pi$, поэтому

$$z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Учитывая, что $|z_3| = 1$, а $\varphi_3 = \pi/2$ — один из аргументов z_3, получаем

$$z_3 = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2).\ ▲$$

Пример 10. Записать числа

$$z_1 = 2\cos(7\pi/4) - 2i\sin(\pi/4),\ z_2 = -\cos(\pi/17) + i\sin(\pi/17)$$

в тригонометрической форме.

△ Для записи чисел z_1 и z_2 в тригонометрической форме нет необходимости предварительно находить их модули и аргументы (хотя сделать это совсем не трудно). Воспользуемся тем, что

$$\cos(7\pi/4) = \cos(-\pi/4),\ \text{а}\ -\sin(\pi/4) = \sin(-\pi/4),$$

и сразу получим тригонометрическую форму для первого числа

$$z_1 = 2(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)).$$

Аналогично, учитывая, что

$$-\cos\frac{\pi}{17} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{17}\right) = \cos\frac{16\pi}{17},$$

а

$$\sin \pi/17 = \sin(\pi - \pi/17) = \sin 16\pi/17,$$

получаем

$$z_2 = \cos(16\pi/17) + i \sin(16\pi/17). \ \blacktriangle$$

Пример 11. Найти произведение чисел

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos(11\pi/4) + i \sin(11\pi/4)) \text{ и } z_2 = \sqrt{8}(\cos(3\pi/8) + i \sin(3\pi/8)).$$

$\triangle$ Так как $|z_1| = \sqrt{2}$, $|z_2| = \sqrt{8}$, то $|z_1 z_2| = 4$.

Аргументом произведения $z_1 z_2$ будет сумма

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 11\pi/4 + 3\pi/8 = 25\pi/8.$$

Следовательно,

$$z_1 z_2 = 4(\cos(25\pi/8) + i \sin(25\pi/8)),$$

или

$$z_1 z_2 = 4(\cos(9\pi/8) + i \sin(9\pi/8)). \ \blacktriangle$$

Пример 12. Записать в тригонометрической форме комплексное число

$$z = \frac{(\cos(\pi/3) - i \sin(\pi/3))(\sqrt{3} + i)}{i - 1}.$$

$\triangle$ Число $z_1 = \cos(\pi/3) - i \sin(\pi/3)$ имеет модуль, равный 1, и аргумент $\varphi_1 = -\pi/3$; число $z_2 = \sqrt{3} + i$ имеет модуль 2 и аргумент $\varphi_2 = \pi/6$; число $z_3 = i - 1$ имеет модуль $\sqrt{2}$ и аргумент $\varphi_3 = 3\pi/4$. Поэтому

$$|z| = \frac{|z_1||z_2|}{|z_3|} = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

а аргумент

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{11}{12}\pi.$$

Следовательно,

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{11}{12}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{11}{12}\pi\right)\right). \ \blacktriangle$$

4. Возведение в степень. Степень комплексного числа z с показателем $n \in \mathbb{N}$ определяется формулой

$$z^n = zz \ldots z,$$

в правой части которой содержится n множителей.

Пусть $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, тогда

$$(r(\cos\varphi + i \sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \tag{12}$$

т. е. при возведении комплексного числа в степень с натуральным показателем его модуль возводится в степень с тем же показателем, а аргумент умножается на показатель степени.

Пример 13. Возвести в девятую степень комплексное число

$$z = \sqrt{3} - i.$$

$\triangle$ Модуль числа z равен 2, а одним из аргументов является угол $\varphi = -\pi/6$, поэтому модуль числа z^9 равен 2^9, а аргумент числа z равен $9\varphi = -3\pi/2$. Следовательно,

$$(\sqrt{3} - i)^9 = 2^9(\cos(-3\pi/2) + i \sin(-3\pi/2)) = 512i. \ \blacktriangle$$

5. Извлечение корня. Число w называется корнем степени n из числа z (обозначается $\sqrt[n]{z}$), если $w^n = z$.

Например, числа $w_1 = i$ и $w_2 = -i$ являются корнями степени 2 (квадратными корнями) из числа $z = -1$, так как $i^2 = -1$ и $(-i)^2 = -1$.

Из определения вытекает, что каждое решение уравнения $w^n = z$ является корнем степени n из числа z. Другими словами, для того чтобы извлечь корень степени n из числа z, достаточно решить уравнение $w^n = z$.

Пусть $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, тогда уравнение $w^n = z$ имеет n решений (корней степени n из z), которые могут быть найдены по формуле

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right), \tag{13}$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Из этой формулы видно, что все корни степени n из числа z имеют один и тот же модуль $\sqrt[n]{r}$, но разные аргументы, отличающиеся друг от друга слагаемым, кратным числу $2\pi/n$. Отсюда следует, что комплексные числа, являющиеся корнями степени n из комплексного числа z, соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в точке $z = 0$ (см. пример 14).

Заметим, что символ $\sqrt[n]{z}$ не имеет однозначного смысла. Поэтому, употребляя его, следует четко представлять себе, что под этим символом подразумевается. Например, используя запись $\sqrt{-1}$, следует позаботиться о том, чтобы было ясно, понимается ли под этим символом пара комплексных чисел i и $-i$ или одно, и если одно, то какое именно.

Пример 14. Найти все значения $\sqrt[4]{-16}$.

$\triangle$ Запишем число $z = -16$ в тригонометрической форме

$$z = -16 = 16(\cos\pi + i \sin\pi).$$

Согласно формуле (13) получаем

$$w_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}k\right)\right) (k = 0, 1, 2, 3).$$

Следовательно,

$$w_0 = 2(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$w_1 = 2(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$w_2 = 2(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},$$

$$w_3 = 2(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

На рис. 10 изображены все четыре значения $\sqrt[4]{-16}$. Точки, соответствующие числам w_0, w_1, w_2, w_3, находятся в вершинах квадрата, вписанного в окружность радиуса $R = 2$ с центром в точке $z = 0$. ▲

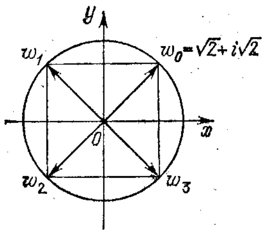


Рис. 10.

Пример 15. Записать число $\dfrac{\sqrt{5+12i} - \sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i} + \sqrt{5-12i}}$ в алгебраической форме при условии, что действительные части корней $\sqrt{5+12i}$ и $\sqrt{5-12i}$ отрицательны.

△ Для извлечения квадратного корня из числа $5 + 12i$ положим $\sqrt{5+12i} = x + iy$, тогда

$$5 + 12i = x^2 + 2xyi - y^2$$

и, следовательно, x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Решив систему, получим два решения $(3;\ 2)$ и $(-3;\ -2)$. По условию действительная часть $\sqrt{5+12i}$ отрицательна, поэтому $\sqrt{5+12i} = -3 - 2i$. Аналогично найдем $\sqrt{5-12i} = -3 + 2i$. Таким образом,

$$z = \frac{-3 - 2i - (-3 + 2i)}{-3 - 2i + (-3 + 2i)} = \frac{2}{3}i. \ ▲$$

5.32. Представить комплексное число z в тригонометрической форме:

1) $z = -\sqrt{3} + i$. 2) $z = -1$. 3) $z = -\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}$.

4) $z = 1 + \cos\frac{10\pi}{9} + i\sin\frac{10\pi}{9}$. 5) $z = \operatorname{tg} 1 - i$.

5.33. Записать комплексное число z в алгебраической и в тригонометрической формах:

1) $z = \dfrac{i(\cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3))}{\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)}$.

2) $z = \dfrac{1}{\cos(4\pi/3) - i\sin(4\pi/3)}$. 3) $z = \dfrac{i}{(1+i)^2}$.

4) $z = \dfrac{-\cos(5\pi/12) + i\sin(5\pi/12)}{\cos(13\pi/12) - i\sin(13\pi/12)}$.

5) $z = \dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{i}$.

5.34. Представить в тригонометрической форме комплексное число z:

1) $z = \dfrac{5(\cos 100^\circ + i\sin 100^\circ)\, i}{3(\cos 40^\circ - i\sin 40^\circ)}$.

2) $z = \dfrac{\sin(2\pi/5) + i(1 - \cos(2\pi/5))}{i - 1}$.

5.35. При повороте на угол $\pi/2$ по часовой стрелке и удлинении в два раза вектор $z_1 = 2 + 5i$ переходит в вектор z_2. Найти комплексное число, соответствующее вектору z_2.

5.36. Вектор $z = -2 + 3i$ повернут на 180° и удлинен в 1,5 раза. Найти комплексное число, соответствующее получившемуся вектору.

5.37. Записать комплексное число z в алгебраической форме:

1) $z = \left(\dfrac{i}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$. 2) $z = (\cos 31^\circ + i\sin 31^\circ)^{-10}$.

8) $z = \left(\dfrac{i^8 + \sqrt{3}\, i^5}{4}\right)^5$. 4) $z = \dfrac{(2i)^7}{(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^6}$. 5) $z = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

5.38. Записать комплексное число z в тригонометрической форме:

1) $z = (\sqrt{3} - i)^{100}$. 2) $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}\, i + 1}{i - 1}\right)^6$.

3) $z = \dfrac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$. 4) $z = (\operatorname{tg} 2 - i)^4$.

5) $z = \left(\sin\frac{6\pi}{5} + i\left(1 + \cos\frac{6\pi}{5}\right)\right)^5$.

5.39. При каких целых значениях n справедливо равенство

$$(1+i)^n = (1-i)^n?$$

5.40. Найти все значения $\sqrt[n]{z}$, если:

1) $z = -1$, $n = 3$. 2) $z = 8i$, $n = 3$.

3) $z = 1$, $n = 5$. 4) $z = 1 + i$, $n = 8$.

5.41. Решить уравнения:

1) $z^3 = 1 + i$. 2) $z^4 + 1 = 0$. 3) $z^5 = 1 + \sqrt{3}i$.
4) $z^6 + 64 = 0$. 5) $z^2 = \bar{z}^3$. 6) $z^n = \bar{z}$, $n \in \mathbb{N}$.

5.42. Пусть A_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — вершины правильного n-угольника, вписанного в окружность единичного радиуса. Найти:

1) $|A_1A_2|^2 + |A_1A_3|^2 + \ldots + |A_1A_n|^2$.
2) $|A_1A_2| \cdot |A_1A_3| \ldots |A_1A_n|$.

6. Комплексная степень числа e. Операция возведения числа e в комплексную степень $z = x + yi$ определяется формулой

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{14}$$

Например,

$$e^{1+i} = e(\cos 1 + i \sin 1),$$
$$e^{\pi i/2} = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) = i,$$
$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

Основные свойства комплексной степени числа e:

1) а) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, б) $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$,

т. е. для e^z сохраняются обычные свойства степени.

2) Для действительных значений $z = x + 0 \cdot i$

$$e^z = e^{x+0i} = e^x,$$

т. е. комплексная степень числа e превращается в этом случае в степень с действительным показателем.

3) Для любого комплексного числа z справедливо равенство

$$e^{z+2\pi n i} = e^z, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{15}$$

в частности, $e^{2\pi n i} = 1$.

Из формулы (14) при $z = i\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$, получается важная формула

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi, \tag{16}$$

которая называется *формулой Эйлера*.

Каждое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в виде

$$z = re^{i\varphi}, \tag{17}$$

где r — модуль числа z, а φ — один (любой) из его аргументов. Это представление комплексного числа называется *показательной формой комплексного числа*. Для комплексных чисел, записанных в показательной форме, формулы умножения, деления, возведения в натуральную степень, извлечения корня принимают следующий компактный вид:

а) если $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{18}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}; \tag{19}$$

б) если $z = re^{i\varphi}$, то

$$z^n = r^ne^{in\varphi}, \tag{20}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,e^{\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)i} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{21}$$

Пример 16. Представить в показательной форме комплексное число

$$z = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i.$$

△ Находим модуль числа

$$|z| = \sqrt{\frac{3}{64} + \frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$$

и один из его аргументов

$$\operatorname{tg}\varphi = -1/\sqrt{3}, \quad \varphi = -\pi/6$$

(так как z находится в четвертом квадранте). Следовательно,

$$z = \frac{1}{4}e^{-\pi i/6}. \ ▲$$

Пример 17. Записать в показательной форме комплексное число

$$z = \frac{(-\sqrt{3} + i)(\cos(\pi/12) - i \sin(\pi/12))}{1 - i}.$$

△ Каждое из чисел $-\sqrt{3} + i$, $\cos(\pi/12) - i \sin(\pi/12)$, $1 - i$ представим в показательной форме

$$-\sqrt{3} + i = 2e^{5\pi i/6},$$
$$\cos(\pi/12) - i \sin(\pi/12) = \cos(-\pi/12) + i \sin(-\pi/12) = e^{-\pi i/12},$$
$$1 - i = \sqrt{2}\,e^{-\pi i/4}.$$

Используя формулы (18) и (19), получаем

$$z = \frac{2e^{5\pi i/6}e^{-\pi i/12}}{\sqrt{2}\,e^{-\pi i/4}} = \sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\,e^{i\pi}. \ ▲$$

Пример 18. Представить в показательной форме комплексное число $z = (-1 + i)^5$.

△ Записываем в показательной форме основание степени и применяем формулу (20):

$$(-1 + i)^5 = \left(\sqrt{2}\,e^{3\pi i/4}\right)^5 = 4\sqrt{2}\,e^{15\pi i/4} = 4\sqrt{2}\,e^{-\pi i/4}. \ ▲$$

Пример 19. Записать все значения корня $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$ в показательной форме.

Представляем число $\sqrt{3}+i$ в показательной форме и применяем формулу (21):

$$\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}=\sqrt[4]{2e^{\pi i/6}}=\sqrt[4]{2}\,e^{\pi i(12k+1)/24}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3). \ \blacktriangle$$

5.43. Доказать свойства 1)—3) комплексной степени числа e.

5.44. Пусть $z=x+iy$; найти модуль и аргументы числа e^z.

5.45. Представить z в алгебраической форме:

1) $z=e^{2-i}$. 2) $z=e^{-\frac{3}{2}\pi i+12\pi i}$. 3) $z=e^{3i+7+3\pi i-\frac{\pi}{2}i}$.

5.46. Представить в показательной форме комплексное число:

1) $z=-\sqrt{12}-2i$. 2) $z=-\cos(\pi/7)+i\sin(\pi/7)$.

5.47. Записать в показательной и в алгебраической формах комплексное число:

1) $z=5e^{\frac{\pi i}{4}}\cdot 0{,}2e^{\frac{\pi i}{6}}(\cos(5\pi/12)-i\sin(5\pi/12))$

2) $z=\left(\frac{1}{2}e^{\pi i/12}\right)^{-3}$. 3) $z=(\sqrt{3}-i)^6$.

4) $z=\dfrac{1}{(\cos 12^\circ+i\sin 12^\circ)^5}$. 5) $z=\dfrac{e^{-\pi i/3}(1+\sqrt{3}\,i)^7}{i}$.

5.48. Доказать формулу

$$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{2n}=\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{2n}e^{in\alpha},\quad n\in\mathbb{N},\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

5.49. Используя формулу (21), записать в показательной форме все значения $\sqrt[n]{z}$:

1) $z=1,\ n=3$. 2) $z=-1,\ n=5$.

3) $z=-4+\sqrt{48}i,\ n=3$. 4) $z=-1-\sqrt{3}\,i,\ n=4$.

5.50. Найти суммы:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n}e^{ik\varphi}$.

2) $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin k\varphi,\quad \varphi\neq 2\pi p,\ p\in\mathbb{Z}$.

3) $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos k\varphi,\quad \varphi\neq 2\pi p,\ p\in\mathbb{Z}$.

§ 6. Многочлены. Алгебраические уравнения. Рациональные дроби

1. Многочлены. Алгебраические уравнения. *Многочленами* (*полиномами*) относительно переменной z называются выражения вида

$$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0, \tag{1}$$

где n — неотрицательное целое число, a_k $(k=0,1,\ldots,n)$ — некоторые числа.

Говорят, что многочлен (1) задан над множеством комплексных чисел, если $a_k\in\mathbb{C}$, и над множеством действительных чисел, если $a_k\in\mathbb{R}$.

Числа a_k называют *коэффициентами* многочлена; коэффициент a_0 называют *свободным членом*, коэффициент a_n — *старшим коэффициентом*. Если $a_n=1$, то многочлен называют *приведенным*.

Если $a_n\neq 0$, то число n называется *степенью* многочлена.

Для сокращенной записи многочленов обычно используют обозначения $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$, ..., если переменная $z\in\mathbb{C}$, и $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ и т. д., если переменная $z=x\in\mathbb{R}$. Если хотят подчеркнуть, что многочлен $P(z)$ имеет степень n, то пишут $P_n(z)$.

Многочлены $P_0(z)=a_0$, $a_0\neq 0$, т. е. многочлены нулевой степени, — это не равные нулю комплексные числа. Число 0 также считают многочленом и называют его нулевым. Нулевой многочлен — это единственный многочлен, который не имеет степени.

Многочлены $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ считаются *равными* (пишут $P_n(z)=Q_m(z)$), если равны их коэффициенты при одинаковых степенях z. Для равенства многочленов, очевидно, необходимо равенство их степеней.

Для многочленов определяются операции сложения и умножения. Каждая из этих операций подчиняется коммутативному и ассоциативному законам. Операции сложения и умножения связаны между собой дистрибутивным законом.

Суммой $P_n(z)+Q_m(z)$ многочленов

$$P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0,$$
$$Q_m(z)=b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_1z+b_0$$

называется многочлен, коэффициенты которого при каждой степени z равны сумме коэффициентов при этой степени z многочленов $P_n(z)$ и $Q_m(z)$.

Например, если $P_5(z)=z^5+3iz^3-1$ и $Q_3(z)=iz^3+z+1$, то

$$P_5(z)+Q_3(z)=z^5+4iz^3+z.$$

Сумма многочленов $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ есть многочлен, степень которого не превосходит наибольшего из чисел n и m или не существует.

Произведением $P_n(z)\,Q_m(z)$ многочленов

$$P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0,$$
$$Q_m(z)=b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_1z+b_0$$

называется многочлен

$$S_{n+m}(z)=c_{m+n}z^{n+m}+\ldots+c_kz^k+\ldots+c_1z+c_0,$$

коэффициент c_k $(0\leqslant k\leqslant n+m)$ которого равен сумме всевозможных произведений a_ib_j, где $i+j=k$.

Для нахождения произведения многочленов $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ достаточно каждый член a_kz^k многочлена $P_n(z)$ умножить на каждый член b_lz^l многочлена $Q_m(z)$ и записать сумму всех полученных произведений $a_kb_lz^{k+l}$.

Например, если $P_4(z)=z^4-1$ и $Q_3(z)=2z^3+z$, то

$$P_4(z)\,Q_3(z)=(z^4-1)\,(2z^3+z)=2z^7+z^5-2z^3-z.$$

Если $N(z)$ — нулевой многочлен, то для любого многочлена $P(z)$ по определению полагают

$$P(z)+N(z)=P(z),\quad P(z)\,N(z)=N(z).$$

Разностью $P(z)-Q(z)$ многочленов $P(z)$ и $Q(z)$ называется многочлен $R(z)$ такой, что

$$P(z)=Q(z)+R(z).$$

Разность существует для любых двух многочленов и определяется однозначно.

Для любых двух многочленов $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ существуют многочлены $T(z)$ и $R(z)$ такие, что

$$P_n(z)=Q_m(z)\,T(z)+R(z), \tag{2}$$

причем либо степень $R(z)$ меньше m, либо $R(z)=0$ (т. е. $R(z)$ — нулевой многочлен). Многочлены $T(z)$ и $R(z)$ определяются однозначно; многочлен $T(z)$ называется *частным*, а многочлен $R(z)$ — *остатком* от деления многочлена $P_n(z)$ на многочлен $Q_m(z)$.

Если $R(z)=0$, то говорят, что $P_n(z)$ делится на $Q_m(z)$. В этом случае $Q_m(z)$ называют *делителем* многочлена $P_n(z)$.

Для определения частного и остатка от деления двух многочленов существуют разные способы. Чаще всего пользуются «делением углом» или методом «неопределенных коэффициентов».

Например, «деление углом» многочлена $2z^4-5z^3+2z$ на многочлен z^2-1 проводится так:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
-\,2z^4 & -5z^3 & & +2z & & z^2-1 \\ \cline{6-6}
2z^4 & & -2z^2 & & & 2z^2-5z+2 \\ \cline{1-5}
& -\,-5z^3 & +2z^2 & +2z & & \\
& -5z^3 & & +5z & & \\ \cline{2-5}
& & -\,2z^2 & -3z & & \\
& & 2z^2 & & -2 & \\ \cline{3-5}
& & & -3z & +2 &
\end{array}$$

Поэтому

$$2z^4-5z^3+2z=(z^2-1)\,(2z^2-5z+2)+(-3z+2),$$

т. е. многочлен $T(z)=2z^2-5z+2$ является частным, а $R(z)=-3z+2$ — остатком.

Для отыскания частного и остатка от деления тех же многочленов методом «неопределенных коэффициентов» поступают следующим образом. Так как первый многочлен имеет степень 4, а второй — степень 2, то частное ищут в виде $T(z)=az^2+bz+c$, а остаток — в виде $R(z)=b_1z+c_1$. Записывают равенство (2):

$$2z^4-5z^3+2z=(z^2-1)\,(az^2+bz+c)+b_1z+c_1.$$

Если многочлены равны, то равны их коэффициенты при одинаковых степенях z, т. е. коэффициенты многочленов $T(z)$ и $R(z)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 2=a, \\ -5=b, \\ 0=c-a, \\ 2=-b+b_1, \\ 0=-c+c_1. \end{cases}$$

Из системы находят $a=2$, $b=-5$, $c=2$, $b_1=-3$, $c_1=2$.

Особый интерес представляет деление многочлена $P_n(z)$ на приведенный многочлен первой степени $z-z_0$. Равенство (2) в этом случае принимает вид

$$P_n(z)=(z-z_0)\,T_{n-1}(z)+w_0,$$

где w_0 — некоторое комплексное число.

Если в этом равенстве положить $z=z_0$, то получим $P_n(z_0)=w_0$.

Число $w_0=P_n(z_0)$ называют *значением многочлена* $P_n(z)$ *при* $z=z_0$.

Таким образом, остаток от деления многочлена $P_n(z)$ на $z-z_0$ равен значению многочлена $P_n(z)$ при $z=z_0$ (*теорема Безу*).

Если $w_0=P_n(z_0)=0$, то многочлен $P_n(z)$ делится на линейный двучлен $z-z_0$, т. е. $z-z_0$ является делителем многочлена $P_n(z)$.

Если значение многочлена $P_n(z)$ при $z=z_0$ равно нулю, т. е. $P_n(z_0)=0$, то число z_0 называют *корнем многочлена* $P_n(z)$. В этом случае говорят также, что число z_0 является *корнем* (или *решением*) *уравнения*

$$a_nz^n+\ldots+a_1z+a_0=0, \qquad a_n\neq 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) называют *алгебраическим уравнением n-й степени.* Решить уравнение (3) — это значит найти все его корни или, что то же самое, найти все корни многочлена $P_n(z)$.

Если многочлен $P_n(z)$ делится на многочлен $(z-z_0)^k$, $k\in\mathbb{N}$, но не делится на многочлен $(z-z_0)^{k+1}$, то корень z_0 называют *k-кратным корнем* многочлена $P_n(z)$ и k-кратным корнем уравнения (3). Однократный корень часто называют *простым корнем*, k-кратный корень при $k>1$ называют *кратным.* Многочлен

$$P_n'(z)=na_nz^{n-1}+(n-1)a_{n-1}z^{n-2}+\ldots+2a_2z+a_1$$

называется *производной* многочлена $P_n(z)$. При определении кратности корня многочлена часто используют следующее утверждение: кратный корень многочлена $P_n(z)$ является корнем и многочлена $P_n'(z)$.

Алгебраическое уравнение нулевой степени, очевидно, корней не имеет.

Алгебраическое уравнение первой степени

$$az+b=0$$

имеет один корень

$$z=-b/a.$$

Корни уравнения второй степени (корни квадратного уравнения)

$$az^2+bz+c=0$$

находятся по формуле

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (4)$$

Число $D=b^2-4ac$ называется *дискриминантом* квадратного уравнения, а под $\sqrt{D}$ понимается какое-либо значение корня. Если $D=0$, то квадратное уравнение имеет один двукратный корень; если $D\neq 0$, то два простых корня.

Корни двучленного алгебраического уравнения

$$az^n+b=0$$

находятся по формуле

$$z=\sqrt[n]{-b/a}. \qquad (5)$$

Если $b\neq 0$, то такое уравнение имеет n простых (однократных) корней, которые могут быть найдены по формуле (13) § 5.

В общем случае не существует формул (подобных формулам (4), (5)), позволяющих выразить корни алгебраического

уравнения через его коэффициенты. Отсутствие общего метода решения алгебраических уравнений не мешает, конечно, в частных случаях использовать ту или иную специфику уравнения и найти его корни. Тем более, что при решении многих задач требуется найти не все корни уравнения, а только те, которые принадлежат какому-либо множеству, например множеству действительных чисел или множеству целых чисел. При решении уравнений с целыми коэффициентами часто оказывается полезной следующая теорема.

Теорема. Целые корни алгебраического уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена.

Существование корней алгебраического уравнения устанавливается основной теоремой алгебры комплексных чисел — *теоремой Гаусса.*

Теорема. Алгебраическое уравнение степени n в множестве комплексных чисел имеет n корней при условии, что каждый k-кратный корень считается k раз.

Из теоремы Гаусса следует, что каждый многочлен $P_n(z)$ допускает представление в виде

$$P_n(z)=a_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\ldots(z-z_l)^{k_l}, \qquad (6)$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_l$ — различные корни многочлена, а $k_1, k_2, \ldots, k_l$ — их соответствующие кратности, причем

$$k_1+k_2+\ldots+k_l=n.$$

Каждый многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами допускает представление в виде

$$P_n(x)=a_n(x-x_1)^{k_1}\ldots(x-x_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{r_m}, \qquad (7)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_l$ — различные действительные корни многочлена; $k_1, k_2, \ldots, k_l$ — их соответствующие кратности; $p_1, q_1, \ldots, p_m, q_m$ — различные пары действительных чисел, удовлетворяющие неравенствам

$$p_1^2-4q_1<0, \ldots, p_m^2-4q_m<0;$$

$r_1, r_2, \ldots, r_m$ — натуральные числа, причем

$$k_1+k_2+\ldots+k_l+2(r_1+r_2+\ldots+r_m)=n.$$

Пример 1. Решить уравнение

$$z^2+3z+3=0.$$

△ По формуле (4) находим

$$z=\frac{-3\pm\sqrt{9-12}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-3\pm i\sqrt{3}}{2}=-\frac{3}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}. \ ▲$$

Пример 2. Решить уравнение

$$z^2-(2+i)z-1+7i=0.$$

△ По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z=\frac{2+i\pm\sqrt{(2+i)^2+4(1-7i)}}{2}=\frac{2+i\pm\sqrt{7-24i}}{2}.$$

Для определения какого-либо значения $\sqrt{7-24i}$ положим

$$\sqrt{7-24i}=x+iy.$$

Тогда

$$7-24i=x^2+2xyi-y^2$$

и, следовательно, x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2-y^2=7, \\ xy=-12, \end{cases}$$

причем x и y — действительные числа. Система имеет решение $x=4$, $y=-3$. Поэтому

$$z_1=\frac{2+i+4-3i}{2}=3-i,$$

$$z_2=\frac{2+i-4+3i}{2}=-1+2i. \ ▲$$

Пример 3. Решить уравнение

$$z^3-6z-9=0.$$

△ Рассматривая делители свободного члена, убеждаемся в том, что только $z=3$ является целым корнем уравнения. Делим левую часть уравнения на $z-3$:

$$\begin{array}{r|l} -\,z^3 \qquad -6z-9 & z-3 \\ \underline{z^3-3z^2 \qquad\qquad} & \overline{z^2+3z+3} \\ -\,3z^2-6z-9 & \\ \underline{3z^2-9z \quad} & \\ -\,3z-9 & \\ \underline{3z-9} & \\ 0 & \end{array}$$

Таким образом,

$$z^3-6z-9=(z-3)(z^2+3z+3)$$

и, решая квадратное уравнение

$$z^2+3z+3=0,$$

получаем остальные корни. Итак,

$$z_1=3,\quad z_2=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad z_3=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}. \ ▲$$

Пример 4. Выяснить, существуют ли целые корни у уравнения

$$2z^3-5z^2-2z+2=0.$$

△ Целыми корнями уравнения могут быть только числа ±1, ±2. Подстановка в уравнение показывает, что ни одно из этих четырех чисел не удовлетворяет ему. Данное уравнение целых корней не имеет. ▲

Пример 5. Решить уравнение

$$z^5-2z^4-13z^3+26z^2+36z-72=0.$$

△ Подвергая испытанию делители свободного члена, найдем, что $z=\pm2$ суть корни уравнения. Разделив левую часть уравнения на z^2-4, придем к уравнению

$$z^3-2z^2-9z+18=0,$$

корнем которого является $z=2$. Разделив левую часть полученного уравнения на $z-2$, получим z^2-9. Таким образом, уравнение может быть выписано в виде

$$(z+3)(z+2)(z-2)^2(z-3)=0,$$

т. е. имеет три однократных (простых) корня $z=-3$, $z=-2$, $z=3$ и один двукратный корень $z=2$. ▲

Пример 6. Представить многочлен

$$P(z)=z^7+z^6+64z+64$$

в виде произведения: а) линейных множителей, б) линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами.

△ Найдем все корни многочлена. Так как

$$z^7+z^6+64z+64=(z+1)(z^6+64),$$

то $z_1=-1$, а для нахождения остальных корней нужно извлечь корень шестой степени из числа -64. По формуле (13) § 5 получаем

$$z_2=\sqrt{3}+i,\quad z_3=\sqrt{3}-i,\quad z_4=-\sqrt{3}+i,$$
$$z_5=-\sqrt{3}-i,\quad z_6=2i,\quad z_7=-2i.$$

Поэтому данный многочлен представим в виде произведения семи линейных множителей:

$$P(z)=(z+1)\left(z-\sqrt{3}-i\right)\left(z-\sqrt{3}+i\right)\left(z+\sqrt{3}-i\right)\cdot$$
$$\cdot\left(z+\sqrt{3}+i\right)(z-2i)(z+2i).$$

Перемножая попарно линейные двучлены, соответствующие комплексно сопряженным корням, получаем разложение многочлена на множители с действительными коэффициентами:

$$P(z)=(z+1)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)\left(z^2+2\sqrt{3}z+4\right)(z^2+4).$$

Это разложение можно было получить и путем следующих преобразований:

$$z^7+z^6+64z+64=(z+1)(z^6+64)=$$
$$=(z+1)(z^2+4)(z^4-4z^2+16)=$$
$$=(z+1)(z^2+4)(z^4+8z^2+16-12z^2)=$$
$$=(z+1)(z^2+4)\left(z^2+4-2\sqrt{3}z\right)\left(z^2+4+2\sqrt{3}z\right). \blacktriangle$$

2. Рациональные дроби. Выражение $\frac{P(z)}{Q(z)}$, где $P(z)$ и $Q(z)$ — многочлены, причем $Q(z)$ — ненулевой многочлен, называется *рациональной дробью.* Многочлен $P(z)$ называют числителем, многочлен $Q(z)$ — знаменателем рациональной дроби. Каждый многочлен $T(z)$ является, очевидно, рациональной дробью (в этом случае $P(z)=T(z)$, $Q(z)=1$).

Рациональные дроби $\frac{P(z)}{Q(z)}$ и $\frac{R(z)}{S(z)}$ считаются равными, если

$$P(z)S(z)=R(z)Q(z).$$

Отсюда следует, что две рациональные дроби с равными знаменателями равны тогда и только тогда, когда равны числители дробей.

Суммой $\frac{P(z)}{Q(z)}+\frac{R(z)}{S(z)}$ рациональных дробей $\frac{P(z)}{Q(z)}$ и $\frac{R(z)}{S(z)}$ называется рациональная дробь $\frac{P(z)S(z)+R(z)Q(z)}{Q(z)S(z)}$, а их произведением $\frac{P(z)}{Q(z)}\frac{R(z)}{S(z)}$ — рациональная дробь $\frac{P(z)R(z)}{Q(z)S(z)}$.

Разность и частное двух рациональных дробей определяются как результат операций, обратных по отношению к сложению и умножению.

Операции сложения и умножения рациональных дробей коммутативны и ассоциативны; они связаны между собой дистрибутивным законом.

Рациональная дробь $\frac{P(z)}{Q(z)}$ называется *правильной*, если степень многочлена $P(z)$ меньше степени многочлена $Q(z)$. Если степень многочлена $P(z)$ больше или равна степени многочлена $Q(z)$, то рациональная дробь $\frac{P(z)}{Q(z)}$ называется *неправильной.*

Каждую неправильную рациональную дробь $\frac{P(z)}{Q(z)}$ можно представить либо в виде многочлена, либо в виде суммы многочлена и некоторой правильной рациональной дроби. В самом деле, если $T(z)$ — частное и $R(z)$ — остаток от деления многочлена $P(z)$ на многочлен $Q(z)$, то верно равенство

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=T(z)+\frac{R(z)}{Q(z)}, \tag{8}$$

где либо дробь $\frac{R(z)}{Q(z)}$ является правильной, либо $R(z)=0$.

Представление неправильной дроби в виде (8) называется *выделением целой части* неправильной рациональной дроби.

Пример 7. Представить рациональную дробь $\frac{z^6-z^2+1}{z^3+1}$ в виде суммы многочлена и правильной дроби.

△ Разделив многочлен $P(z)=z^6-z^2+1$ на многочлен $Q(z)=z^3+1$, получим частное $T(z)=z^3-1$ и остаток $R(z)=-z^2+2$. Следовательно,

$$z^6-z^2+1=(z^3+1)(z^3-1)-z^2+2,$$

откуда

$$\frac{z^6-z^2+1}{z^3+1}=z^3-1+\frac{2-z^2}{z^3+1}. \blacktriangle$$

3. Разложение правильной рациональной дроби в множестве комплексных чисел на элементарные дроби. Пусть $\frac{P(z)}{Q(z)}$ — правильная рациональная дробь, и пусть разложение многочлена $Q(z)$ на линейные множители имеет вид (6).

Тогда существуют постоянные

$$A_j^{(k)}\ (j=1,2,\ \ldots,\ l;\qquad k=1,2,\ \ldots,\ k_j),$$

при которых верно равенство

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{k_j}\frac{A_j^{(k)}}{(z-z_j)^k}. \tag{9}$$

Слагаемые (не равные нулю) правой части формулы (9) называют *элементарными* (*простейшими*) *рациональными дробями* в множестве комплексных чисел. Правая часть формулы (9) называется *разложением рациональной дроби в сумму элементарных рациональных дробей.* Коэффициенты разложения определяются однозначно. Таким образом, каждая правильная рациональная дробь в множестве комплексных чисел может быть представлена, причем единственным образом, в виде суммы элементарных рациональных дробей. Вид этой суммы полностью определяется тем, какие корни и какой кратности имеет знаменатель рациональной дроби. Если корни знаменателя рациональной дроби известны, то коэффициенты можно найти разными способами. Чаще всего их находят методом «неопределенных коэффициентов».

Пример 8. Разложить рациональную дробь $\frac{z^2+1}{z^3-z}$ в множестве комплексных чисел в сумму элементарных дробей.

△ Знаменатель рациональной дроби имеет корни $z_1=0$, $z_2=-1$, $z_3=1$. Поэтому существуют постоянные A, B, C

такие, что верно равенство

$$\frac{z^2+1}{z^3-z}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1}+\frac{C}{z-1}.$$

Для определения коэффициентов A, B и C сложим дроби в правой части равенства:

$$\frac{z^2+1}{z^3-z}=\frac{A(z^2-1)+Bz(z-1)+Cz(z+1)}{z^3-z}.$$

Рациональные дроби с равными знаменателями равны только тогда, когда равны числители этих дробей. Поэтому

$$z^2+1=A(z^2-1)+Bz(z-1)+Cz(z+1). \qquad (10)$$

Если два многочлена равны, то равны их значения при одинаковых значениях z. Полагая в равенстве (10) последовательно $z=0$, $z=-1$, $z=1$, получим $1=-A$, $2=2B$, $2=2C$, т. е. $A=-1$, $B=1$, $C=1$. Искомое разложение имеет вид

$$\frac{z^2+1}{z^3-z}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}. \ ▲$$

Пример 9. Разложить рациональную дробь $\frac{z+3}{(z-1)(z^2+1)}$ в множестве комплексных чисел в сумму элементарных дробей.

△ Знаменатель рациональной дроби имеет корни $z_1=1$, $z_2=i$, $z_3=-i$. Поэтому искомое разложение имеет вид

$$\frac{z+3}{(z-1)(z^2+1)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-i}+\frac{C}{z+i}.$$

Из этого равенства рациональных дробей следует равенство многочленов

$$z+3=A(z^2+1)+B(z-1)\ (z+i)+C(z-1)(z-i).$$

Положив последовательно z равным 1, i и $-i$, получим

$$4=2A,\ i+3=B(i-1)2i,\ -i+3=C(-i-1)(-2i),$$

т. е.

$$A=2,\quad B=-1+\frac{i}{2},\quad C=-1-\frac{i}{2}.$$

Итак,

$$\frac{z+3}{(z-1)(z^2+1)}=\frac{2}{z-1}+\frac{-1+\frac{i}{2}}{z-i}+\frac{-1-\frac{i}{2}}{z+i}. \ ▲$$

4. Разложение правильной рациональной дроби в множестве действительных чисел на элементарные дроби. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь, $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами, причем разложение многочлена $Q(x)$ на линейные и квадратичные множители имеет вид (7).

Тогда существуют действительные постоянные

$$A_i^{(k)}\quad (i=1,2,\ldots,l;\quad k=1,2,\ldots,k_i),$$
$$M_j^{(r)} \text{ и } N_j^{(r)}\quad (j=1,2,\ldots,m;\quad r=1,2,\ldots,r_j),$$

при которых верно равенство

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{k_j}\frac{A_j^{(k)}}{(x-x_j)^k}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r_j}\frac{M_j^{(k)}x+N_j^{(k)}}{(x^2+p_jx+q_j)^k}. \qquad (11)$$

Слагаемые (не равные нулю) правой части формулы (11) называют элементарными (простейшими) рациональными дробями в множестве действительных чисел. Правая часть формулы (11) называется разложением рациональной дроби в сумму элементарных рациональных дробей. Коэффициенты разложения определяются однозначно. Таким образом, каждая правильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в множестве действительных чисел может быть представлена, причем единственным образом, в виде суммы элементарных дробей. Подчеркнем, что вид разложения (11) определяется тем, какие корни и какой кратности имеет знаменатель рациональной дроби. Способы нахождения коэффициентов разложения будут показаны на примерах.

Пример 10. Указать вид разложения в сумму элементарных дробей в множестве действительных чисел для рациональных дробей:

$$1)\ \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x-2)}.\qquad 2)\ \frac{x^7+x^3-13}{x^8+x^7+2x^6+2x^5+x^4+x^3}.$$

△ Каждая из данных рациональных дробей является правильной, и поэтому искомые разложения существуют. Знаменатель первой дроби имеет простой корень $x=2$ и двукратный корень $x=-1$. Поэтому разложение для первой дроби имеет вид

$$\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x-2)}=\frac{A_1^{(1)}}{x-2}+\frac{A_2^{(1)}}{x+1}+\frac{A_2^{(2)}}{(x+1)^2}.$$

Знаменатель второй дроби разлагается на линейные и квадратичные множители следующим образом:

$$x^8+x^7+2x^6+2x^5+x^4+x^3=(x+1)x^3(x^2+1)^2.$$

Поэтому разложение для второй дроби имеет вид

$$\frac{x^7+x^3-13}{x^8+x^7+2x^6+2x^5+x^4+x^3}=$$
$$=\frac{A_1^{(1)}}{x+1}+\frac{A_2^{(1)}}{x}+\frac{A_2^{(2)}}{x^2}+\frac{A_2^{(3)}}{x^3}+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{x^2+1}+\frac{M_1^{(2)}x+N_1^{(2)}}{(x^2+1)^2}. \ ▲$$

Пример 11. Разложить в множестве действительных чисел на элементарные дроби:

1) $\frac{1}{2(x-1)(x-2)(x-3)}$. 2) $\frac{x^3+7x+32}{x(x^2+4)^2}$.

3) $\frac{2x+1}{x^2(1+x^2)^2}$. 4) $\frac{x^3+3}{(x+3)^{100}}$. 5) $\frac{6+3x^3}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

△ 1) Знаменатель рациональной дроби имеет простые корни $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, поэтому искомое разложение записывается в виде

$$\frac{1}{2(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{x-3}.$$

Из равенства рациональных дробей (по определению) следует равенство многочленов

$$1/2=A_1(x-2)(x-3)+A_2(x-1)(x-3)+ \\ +A_3(x-1)(x-2). \qquad (12)$$

Если многочлены равны, то равны их значения при одинаковых значениях x. Полагая в равенстве (12) последовательно $x=1$, $x=2$, $x=3$, находим $1/2=2A_1$, $1/2=-A_2$, $1/2=2A_3$, т. е.

$$A_1=1/4,\ A_2=-1/2,\ A_3=1/4.$$

Таким образом, искомым разложением является разложение

$$\frac{1}{2(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{1/4}{x-1}-\frac{1/2}{x-2}+\frac{1/4}{x-3}.$$

2) Знаменатель рациональной дроби уже разложен в произведение линейных и квадратичных множителей. Разложение в сумму элементарных дробей в данном случае имеет следующий вид:

$$\frac{x^3+7x+32}{x(x^2+4)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}+\frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}.$$

Из равенства рациональных дробей следует равенство многочленов

$$x^3+7x+32=A(x^2+4)^2+(Bx+C)x(x^2+4)+(Dx+E)x.$$

Из равенства многочленов следует равенство их коэффициентов при одинаковых степенях x. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, получим линейную систему уравнений

$$\begin{cases} 0=A+B, \\ 1=C, \\ 0=8A+4B+D, \\ 7=4C+E, \\ 32=16A. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $A=2$, $B=-2$, $C=1$, $D=-8$, $E=3$. Следовательно,

$$\frac{x^3+7x+32}{x(x^2+4)^2}=\frac{2}{x}-\frac{2x-1}{x^2+4}-\frac{8x-3}{(x^2+4)^2}.$$

3) В данном случае можно получить искомое разложение, не прибегая к методу «неопределенных коэффициентов». Преобразуем рациональную дробь следующим образом:

$$\frac{2x+1}{x^2(1+x^2)^2}=(2x+1)\frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)^2}=$$

$$=(2x+1)\left(\frac{1}{x^2(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)=(2x+1)\frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}-\frac{2x+1}{(1+x^2)^2}=$$

$$=(2x+1)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)-\frac{2x+1}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2x+1}{x^2+1}-\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

Полученное разложение и является разложением данной рациональной дроби в сумму элементарных дробей.

4) В этом случае, как и в предыдущем, искомое разложение можно получить простыми преобразованиями. Положив $x+3=t$, перепишем рациональную дробь следующим образом:

$$\frac{x^3+3}{(x+3)^{100}}=\frac{(t-3)^3+3}{t^{100}}=\frac{t^3-9t^2+27t-24}{t^{100}}=$$

$$=\frac{1}{t^{97}}-\frac{9}{t^{98}}+\frac{27}{t^{99}}-\frac{24}{t^{100}}=\frac{1}{(x+3)^{97}}-\frac{9}{(x+3)^{98}}+\frac{27}{(x+3)^{99}}-\frac{24}{(x+3)^{100}}.$$

Полученное разложение является искомым.

5) Разложение на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{6+3x^3}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Из равенства дробей следует равенство многочленов

$$6+3x^3=(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+1).$$

Полагая здесь последовательно $x=i$ и $x=2i$, получаем

$$\begin{cases} 6-3i=3(Ai+B), \\ 6-24i=-3(2Ci+D). \end{cases}$$

Из системы находим $A=-1$, $B=2$, $C=4$, $D=-2$. Следовательно,

$$\frac{6+3x^3}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{2-x}{x^2+1}+\frac{4x-2}{x^2+4}. \ ▲$$

6.1. При каких значениях A, B, C, D равны многочлены

$$P(z)=(Az+B)(z^2-z+1)+(Cz+D)(z^2+3)$$

и

$$Q(z)=2z^3+z^2+5z+1?$$

4*

6.2. Подобрать многочлены $P(z)$ и $Q(z)$ наименьшей степени так, чтобы выполнялось равенство

$$(z^4-2z^3-4z^2+6z+1)P(z)+(z^3-5z-3)Q(z)=z^4.$$

6.3. При каких значениях A, B, C, D для многочленов

$$P(z)=z^4+Az^3+Bz^2-8z+4 \text{ и } Q(z)=z^2+Cz+D$$

справедливо равенство $P(z)=Q^2(z)$?

6.4. Найти степень многочлена:

1) $P(z)=z^2(z^4-1)+(1-z)(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)$.

2) $Q(z)=1-\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}-\frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}-\frac{(z-z_3)(z-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)}$,

z_1, z_2, z_3 — попарно различные комплексные числа.

6.5. Найти частное $T(z)$ и остаток $R(z)$ от деления многочлена $P(z)$ на многочлен $Q(z)$:

1) $P(z)=z^3+5z^2-7z-3$, $Q(z)=z^2-8z+16$.

2) $P(z)=z^5+3z^2+7iz-1$, $Q(z)=z-i$.

3) $P(z)=z^5-z^3+1$, $Q(z)=(z-i)^3$.

4) $P(z)=z^2-1$, $Q(z)=2z^4-5z^3+2z$.

5) $P(z)=z^{30}-1$, $Q(z)=z^5+1$.

6.6. Определить, является ли многочлен $Q(z)$ делителем многочлена $P(z)$:

1) $P(z)=z^{100}-3z^2+2$, $Q(z)=z^2-1$.

2) $P(z)=z^{100}-3z+2$, $Q(z)=z^2-1$.

3) $P(z)=6z^5+11z^4+5z^3+5z^2-z-6$, $Q(z)=z^2+1$.

6.7. При каких значениях a и b многочлен $Q(z)$ является делителем многочлена $P(z)$:

1) $Q(z)=(z-1)^2$, $P(z)=az^4+bz^3+1$.

2) $Q(z)=z^2-(1+i)z+i$, $P(z)=z^{1982}+az+b$.

3) $Q(z)=z^2+az+b$, $P(z)=z^4-1$?

6.8. При каких натуральных значениях n и m $(n\geqslant m)$ многочлен $Q(z)$ является делителем многочлена $P(z)$:

1) $Q(z)=z^m-a^m$, $P(z)=z^n-a^n$, $a\neq 0$.

2) $Q(z)=z^m+a^m$, $P(z)=z^n+a^n$, $a\neq 0$.

3) $Q(z)=z^m+a^m$, $P(z)=z^n-a^n$, $a\neq 0$.

4) $Q(z)=z^2+z+1$, $P(z)=z^{3n+1}+z^{3m}+z^2$.

5) $Q(z)=z^4+z^2+1$, $P(z)=z^{3n+1}+z^{3m}+z^5$?

6.9. Найти многочлен наибольшей степени, являющийся делителем многочленов $P(z)$ и $Q(z)$:

1) $P(z)=(z^3-1)(z^2-2z+1)$, $Q(z)=(z^2-1)^3$.

2) $P(z)=z^{210}-1$, $Q(z)=z^{90}-1$.

3) $P(z)=z^{75}-z^{45}-z^{30}+1$, $Q(z)=75z^{74}-45z^{44}-30z^{29}$.

6.10. При делении многочлена $P(z)$ на $z-1$ в остатке получается 3, а при делении на $z-2$ в остатке получается 4. Найти остаток от деления $P(z)$ на z^2-3z+2.

6.11. При делении многочлена $P(z)$ на $z-i$ в остатке получается i, а при делении на $z+i$ в остатке получается $1+i$. Найти остаток от деления $P(z)$ на z^2+1.

6.12. Найти остаток от деления многочлена $P(z)=z^{1983}-1$ на многочлен $Q(z)=(z^2+1)(z^2+z+1)$.

6.13. Решить уравнения:

1) $z^2-2z+5=0$. 2) $z^2-2iz-5=0$.

3) $z^2-20z+92+6i=0$. 4) $z^2-8z-3iz+13+13i=0$.

5) $(3-i)z^2-(8-i)z+4+7i=0$.

6.14. Решить уравнения:

1) $z^4-30z^2+289=0$. 2) $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$.

3) $\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^4=i$. 4) $(z-i)z(z+i)(z+2i)=24$.

6.15. Найти корни уравнений, действительная часть которых отрицательна:

1) $z^6-z^3-2=0$. 2) $z^{10}-z^5-992=0$.

6.16. Доказать, что целые корни алгебраического уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена.

6.17. Найти целые корни уравнений:

1) $z^3+2z^2+z+2=0$. 2) $z^3-6z^2+15z-14=0$.

3) $2z^3-5z^2-2z-2=0$.

4) $z^4+4z^3-25z^2-16z+84=0$.

5) $z^6-6z^5+11z^4-z^3-18z^2+20z-8=0$.

6.18. Доказать, что каждый рациональный корень алгебраического уравнения с целыми коэффициентами представим в виде p/q, где p — некоторый делитель свободного члена, а q — некоторый делитель старшего коэффициента уравнения.

6.19. Найти рациональные корни уравнений:

1) $3z^3+z^2+z+35=0$. 2) $2z^4+3z^3-46z^2+6z+8=0$.

6.20. Решить уравнения:

1) $2z^3 + 12z^2 + 13z + 15 = 0$.

2) $z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = 0$.

3) $z^5 + 2z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 32 = 0$.

4) $z^5 - 2z^4 - 13z^3 + 26z^2 + 36z - 72 = 0$.

6.21. Доказать, что если уравнение

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

с действительными коэффициентами имеет корень z_0, то число $\bar{z}_0$ также является корнем этого уравнения.

6.22. Доказать, что если многочлен с действительными коэффициентами имеет корень $z_0 = a + bi$, то многочлен $(z-a)^2 + b^2$ является его делителем.

6.23. Убедиться в том, что число z_0 является корнем уравнения, и найти остальные корни:

1) $3z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 4z - 2 = 0$, $z_0 = 1 + i$.

2) $z^6 + z^5 + 3z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 1 = 0$, $z_0 = i$.

6.24. Доказать, что каждый многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень.

6.25. При каких рациональных значениях a и b число $1 + \sqrt{2}$ является корнем уравнения

$$z^5 + az^3 + bz^2 + 5z + 2 = 0?$$

Найти остальные корни уравнения при найденных значениях a и b.

6.26. Найти общие корни уравнений:

1) $z^6 + 2z^5 + 3z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = 0$,
$z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 6z + 4 = 0$.

2) $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$,
$z^{1982} + z^{100} + 1 = 0$.

6.27. Определить кратность корня z_0 для уравнения:

1) $3z^4 - 4z^3 + 1 = 0$, $z_0 = 1$.

2) $z^5 - 5z^4 + 7z^3 - 2z^2 + 4z - 8 = 0$, $z_0 = 2$.

3) $z^{2n} - nz^{n+1} + nz^{n-1} - 1 = 0$, $n > 1$, $z_0 = 1$.

6.28. При каких значениях a и b уравнение

$$z^5 + 10az^3 + 5bz - 24\sqrt{3} = 0$$

имеет корень кратности 3?

6.29. Доказать, что уравнение

$$\frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + z + 1 = 0$$

не имеет кратных корней.

6.30. Найти многочлен $P(x)$ наименьшей степени, имеющий корень $x = 0$ десятого порядка и такой, что многочлен $P(x) - 1$ имеет корень $x = 1$ пятого порядка.

6.31. Найти приведенный многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, корнями которого являются: 1) $z_1 = 3$ и $z_2 = 2 - i$, 2) $z_1 = i$ (корень кратности 2) и $z_2 = -1 - i$.

6.32. Найти приведенный многочлен наименьшей степени с рациональными коэффициентами, корнем которого является $z_0 = \sqrt{5} - \sqrt{2}$.

6.33. Доказать, что корни $z_1, z_2, \ldots, z_n$ уравнения

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

связаны с его коэффициентами формулами Виета:

$$\begin{gathered} z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n = -a_{n-1}, \\ z_1z_2 + z_1z_3 + \ldots + z_{n-1}z_n = a_{n-2}, \\ z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + \ldots + z_{n-2}z_{n-1}z_n = -a_{n-3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_1z_2z_3 \ldots z_n = (-1)^n a_0. \end{gathered}$$

6.34. Уравнение $2z^3 + az^2 + bz + 12 = 0$ имеет корни $z_1 = 1$, $z_2 = -2$. Найти третий корень этого уравнения.

6.35. Пусть z_1, z_2, z_3 — корни уравнения $z^3 - z^2 - 1 = 0$. Составить уравнение, корнями которого были бы числа $z_2 + z_3$, $z_3 + z_1$, $z_1 + z_2$.

6.36. При каких значениях c корни уравнения

$$z^3 + z^2 + 2z + c = 0$$

образуют геометрическую прогрессию? Найти корни при этом условии.

6.37. Найти сумму квадратов и сумму кубов корней уравнения

$$8z^4 - 5z^2 + 2z + 1 = 0.$$

6.38. Найти сумму квадратов корней уравнения

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_0 = 0.$$

6.39. Найти сумму коэффициентов многочлена:

1) $(4z - 5)^{16}$. 2) $\left(3\sqrt{2}z - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^8$.

3) $(4z^2 - 2z - 1)^{13}(5z^2 - 7)^4$.

6.40. Представить многочлен в виде произведения линейных множителей:

1) z^3+1. 2) $z^3-6z^2+11z-6$.

3) $6z^4-11z^3-z^2-4$.

4) $z^5-4z^4-6z^3+16z^2+29z+12$.

5) $z^3+(1-i)z^2+(1-2i)z-1-i$.

6.41. Представить многочлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами:

1) x^4+4. 2) x^6+27.

3) $(x^2+x)^2+4x^2+4x-12$. 4) $x^2+(x+1)^2+(x^2+x)^2$.

5) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.

6) $x^4-2x^3-27x^2-44x+7$.

7) $x^7+x^5-x^4+x^3-x^2-1$.

6.42. Существует ли многочлен, квадрат которого был бы равен многочлену

$$z^n+z^{n-1}+\ldots+z+1?$$

6.43. Найти многочлен $P(z)$ наименьшей степени, удовлетворяющий условию:

1) $P(-3)=13$, $P(4)=13$, $P(5)=21$.

2) $P(-1)=4$, $P(0)=3$, $P(1)=0$, $P(2)=7$.

3) $P(-1)=-1$, $P(1)=0$, $P(3)=1$, $P(5)=2$.

6.44. Существует ли многочлен $P(z)$ с целыми коэффициентами, удовлетворяющий условиям $P(7)=5$ и $P(15)=9$?

6.45. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}$ — попарно различные числа. Найти многочлен $P_n(z)$, имеющий корни $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и удовлетворяющий условию $P_n(z_{n+1})=1$.

6.46. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}$ — произвольные попарно различные числа и $w_1, w_2, \ldots, w_n, w_{n+1}$ — произвольные числа. Доказать, что существует один и только один многочлен $P_n(z)$, удовлетворяющий условиям

$$P_n(z_k)=w_k \qquad (k=1, 2, \ldots, n+1).$$

6.47. Выделить целую часть рациональной функции:

1) $\dfrac{z^3+3z^2+5z+7}{z^2+2}$. 2) $\dfrac{z^6-7z^4+8z^3-7z+7}{z^3+1}$.

3) $\dfrac{z^6-z^2+1}{(z-1)^3}$. 4) $\dfrac{(z^2+1)^{10}}{z^2+4}$.

6.48. Указать вид разложения рациональной дроби на элементарные в множестве: а) комплексных чисел, б) действительных чисел:

1) $\dfrac{z^3}{z^4+18z^2+81}$. 2) $\dfrac{z+1}{2(z+1)^4-32}$. 3) $\dfrac{1}{z^6+2z^3+1}$.

6.49. Разложить рациональную дробь на элементарные дроби в множестве комплексных чисел:

1) $\dfrac{z}{4z^2-2z+1}$. 2) $\dfrac{i}{z^2+(5-2i)z+5-5i}$.

3) $\dfrac{z^4+1}{z^5+z^3}$. 4) $\dfrac{8z^2}{z^4-1}$.

5) $\dfrac{1}{z^4+1}$. 6) $\dfrac{1}{z^n-1}$, $n\in\mathbb{N}$.

6.50. Разложить рациональную дробь на элементарные дроби в множестве действительных чисел:

1) $\dfrac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$. 2) $\dfrac{6}{x^3-1}$.

3) $\dfrac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}$. 4) $\dfrac{3}{x^2-x^5}$.

5) $\dfrac{5x^2+6x-23}{(x-2)(x+1)^2(x-1)^3}$. 6) $\dfrac{16x^3-32x+2}{\left(\frac{x}{2}\right)^4-2\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}$.

7) $\dfrac{2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$. 8) $\dfrac{1-2x}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$.

9) $\dfrac{101x}{x^{101}-1}$. 10) $\dfrac{3x^2-3}{x^3-3x+1}$.

§ 7. Числовые функции. Последовательности

1. Понятие числовой функции. Пусть дано числовое множество $X\subset\mathbb{R}$, и пусть каждому $x\in X$ поставлено в соответствие число $y\in\mathbb{R}$, тогда говорят, что на множестве X определена *числовая функция*. Правило, устанавливающее соответствие, обозначают некоторым символом, например, f и пишут

$$y=f(x), \qquad x\in X.$$

В этой записи x называют *аргументом* или независимой переменной, числа из множества X называют значениями аргумента, множество X называют *областью определения* функции, его обозначают также $D(f)$. Число y_0, соответствующее значению аргумента x_0, называют *значением функции* при $x=x_0$ (или значением функции в точке x_0) и обозначают $f(x_0)$ или $f(x)|_{x=x_0}$. Множество значений функции обозначают иногда $E(f)$.

Для указания функции используют иногда только символ, которым обозначен закон соответствия, например, f.

Функции f и g называют *равными*, если $D(f)=D(g)$ и равенство $f(x)=g(x)$ верно для любого значения аргумента. Если же это равенство верно лишь на множестве $A \subset D(f) \cap D(g)$, то функции f и g называют *равными на множестве A*.

Например, функции $y = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ (берется арифметическое значение корня), и $y = x$, $x \in \mathbb{R}$, равны на множестве $A = [0; +\infty)$. Если $x < 0$, то $\sqrt{x^2} \neq x$. Указанная функция $y = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, равна функции $y = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, так как их области определения совпадают и для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{при } x \geqslant 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть заданы функции $y = f(x)$ и $z = F(y)$, и пусть область значений функции f содержится в области определения функции F. Функцию

$$z = F(f(x)), \ x \in D(f),$$

называют *сложной функцией* или *композицией* (суперпозицией) функций f и F и обозначают $F \circ f$.

Например, функция

$$z = \sqrt{1 - x^2}, \qquad x \in [-1; 1],$$

является композицией функций

$$y = 1 - x^2, \ x \in [-1; 1], \text{ и } z = \sqrt{y}, \ y \in [0; +\infty).$$

2. Элементарные функции. *К основным элементарным функциям* относят постоянную, степенную, показательную, логарифмическую, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Элементарной функцией называют функцию, которая может быть задана с помощью конечного числа арифметических операций и композиций из основных элементарных функций. Например, элементарными являются функции:

линейная функция

$$y = ax + b, \qquad x \in \mathbb{R},$$

здесь $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;

квадратичная функция

$$y = ax^2 + bx + c, \ x \in \mathbb{R},$$

здесь $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$; функции

$$z = \sqrt{1 - x^2}, \ x \in [-1; 1], \ y = x \sin(1/x), \ x \in \mathbb{R}, \ x \neq 0,$$

и т. д.

Многочленом называют элементарную функцию вида

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

здесь $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$. Если $a_n \neq 0$, то $P(x)$ называют многочленом n-й степени, обозначают его часто

$P_n(x)$, а число n называют степенью многочлена. Если все коэффициенты многочлена равны нулю, то его называют нулевым многочленом. Имеет место теорема: два ненулевых многочлена равны тогда и только тогда, когда их степени одинаковы и коэффициенты при одинаковых степенях x совпадают.

Рациональной функцией называют элементарную функцию, которая может быть задана в виде

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ — многочлен, $Q(x)$ — ненулевой многочлен. Эта функция определена для всех значений x таких, что $Q(x) \neq 0$.

Иррациональной функцией называют элементарную функцию, которая не является рациональной и может быть задана с помощью композиций конечного числа рациональных функций, степенных функций с рациональными показателями и арифметических действий. Примерами иррациональных функций являются функции

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \qquad x \in [-1; 1], \qquad y = \sqrt[3]{x^2 - 1}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$y = \frac{x - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^{7/3} + 1}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Элементарные функции, не являющиеся рациональными или иррациональными, называют *трансцендентными*. Показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции являются трансцендентными.

Под функцией, заданной формулой, понимают функцию, областью определения которой являются все значения аргумента, для которых эта формула имеет смысл и результатом каждой операции, указанной в формуле, является действительное число.

Пример 1. Найти область определения функции, заданной формулой

$$y = \sqrt[3]{\frac{x - 1}{x^2 - \sqrt{x}}}.$$

$\triangle$ Значения $\sqrt{x}$ определены лишь при $x \geqslant 0$. При $x = 0$ и $x = 1$ знаменатель $x^2 - \sqrt{x}$ равен нулю, поэтому следует считать, что $x \neq 0$, $x \neq 1$. Значения $\sqrt[3]{a}$ определены для любого действительного числа a, и при любом $x > 0$, $x \neq 1$, $a = \frac{x - 1}{x^2 - \sqrt{x}}$ — действительное число. Поэтому областью определения рассматриваемой функции является множество всех $x > 0$, $x \neq 1$. $\blacktriangle$

Найти области определения функций, заданных формулами (7.1—7.2):

7.1. 1) $y=\frac{x}{x+1}$. 2) $y=\frac{x+1}{x^2-1}$. 3) $y=\frac{x^3-1}{x^2-6x+8}$.

4) $y=\frac{(x+2)^2}{x^3-4x}$. 5) $y=\frac{1}{x+|x|}$. 6) $y=\frac{x^2}{2|x|-3}$.

7) $y=\frac{|x+2|+1-2x-2x^2}{|2x+2|-1}$.

7.2. 1) $y=\sqrt[3]{x^2-1}$. 2) $y=\sqrt{-x^2}$. 3) $y=\sqrt[4]{2-x}$.

4) $y=\sqrt{2-x-x^2}$. 5) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 6) $y=\frac{\sqrt[6]{x^2-1}}{x}$.

7) $y=\frac{x}{(9-x^2)^{2/3}}$. 8) $y=\sqrt{x^2(x-2)}$. 9) $y=\sqrt{\frac{x-3}{1-3x+2x^2}}$.

7.3. Найти линейную функцию $y=ax+b$ и нарисовать ее график, если:

1) $y(1)=0$, $y(0)=-2$. 2) $y(-1)=2$, $y(1)=-1$.

3) $y(5)=3$, $y(-2)=1$. 4) $y(-1{,}5)=1{,}5$, $y(2{,}5)=-0{,}5$.

5) $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$.

7.4. Найти квадратичную функцию f и нарисовать ее график, если:

1) $f(-1)=0$, $f(0)=5$, $f(6)=-7$.

2) $f(-2)=2$, $f(1)=-1$, $f(3)=7$.

3) $f(-6)=7$, $f(-3)=-8$, $f(2)=7$.

4) $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$, $f(x_3)=y_3$, $x_i\neq x_j$, $i, j=1, 2, 3$.

7.5. Найти многочлен $P(x)$ степени не выше трех, удовлетворяющий условиям:

1) $P(-2)=1$, $P(-1)=6$, $P(0)=5$, $P(1)=10$.

2) $P(x_1)=y_1$, $P(x_2)=y_2$, $P(x_3)=y_3$, $P(x_4)=y_4$, $x_i\neq x_j$, $i, j=1, 2, 3, 4$.

7.6. Найти многочлен $P(x)$ степени не выше n, удовлетворяющий условиям

$$P(x_1)=y_1,\ P(x_2)=y_2,\ \ldots,\ P(x_n)=y_n,\ P(x_{n+1})=y_{n+1},$$

если $x_i\neq x_j$ при $i\neq j$ $(i, j=1, 2, \ldots, n+1)$. Такой многочлен называют *интерполяционным*.

7.7. Найти области определения функций f_1, f_2, f_1+f_2, если f_1 и f_2 заданы формулами:

1) $f_1(x)=\sqrt[4]{3-x}$, $f_2(x)=\sqrt{x+1}$.

2) $f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$, $f_2(x)=\sqrt[3]{\frac{x}{2x-1}}$.

3) $f_1(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-3}$, $f_2(x)=\lg(x^2-$

4) $f_1(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{5x-x^2}}$, $f_2(x)=\operatorname{tg} x$.

5) $f_1(x)=\lg(16-x^2)$, $f_2(x)=\frac{1}{1-\sin x}$.

6) $f_1(x)=x+\sqrt{x-1}$, $f_2(x)=x-\sqrt{x-1}$.

7.8. Найти области определения функций f и $1/f$, если f задана формулой:

1) $f(x)=x^2-x+1$. 2) $f(x)=|x|-2$.

3) $f(x)=\lg(1-x^2)$. 4) $f(x)=x+\sqrt{x+2}$.

5) $f(x)=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}$.

6) $f(x)=5^x-2^{x+1}$. 7) $f(x)=3-2\cos x$.

8) $f(x)=\sqrt{2}-2\sin x$. 9) $f(x)=1-\operatorname{ctg} x$.

7.9. Найти $f(3)$, $f(a)+f(-a)$, $f(b)-1$, $f(b-1)$, $f(1/p)$, $1/f(p)$, если:

1) $f(x)=x/(x-2)$. 2) $f(x)=(1+x)^4-(1-x)^4$.

7.10. Найти $f(-4)$, $f(-1)$, $f(-0{,}5)$, $f(1)$, $f(1984)$, если:

1) $f(x)=\begin{cases} 2-|x| & \text{при } -1<x<2,\\ 1 & \text{при } x\leqslant -1,\\ 0 & \text{при } x\geqslant 2.\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} 2x-|x| & \text{при } x>-1,\\ 2^{x+1} & \text{при } x\leqslant -1.\end{cases}$

7.11. Для функции

$$f(x)=5x^m+ax^n+bx^{-m}+2x^{-n},$$
$$x\in\mathbb{R},\quad x\neq 0,\quad m,\ n\in\mathbb{N},$$

найти a и b так, чтобы $f(x)=f(1/x)$ для любого $x\neq 0$.

7.12. Найти $f(a)+f(-a)$, если $f(x)=x^3+3x-1$.

7.13. Найти $f(1+b)-f(1-b)$, если $f(x)=x^4-2x^2+1$.

7.14. Найти все значения a, при которых функция:

1) $y=ax^2+(a+3)x+4a$, $x\in\mathbb{R}$, имеет только положительные значения.

2) $y=(a-1)x^2+(a+1)x+a+1$, $x\in\mathbb{R}$, имеет только отрицательные значения.

7.15. Найти $y\left(a+\frac{1}{a}\right)$, если $y=\sqrt{x^2-4}$ и

1) $a>1$; 2) $0<a<1$; 3) $-1\leq a\leq 0$; 4) $a\leq -1$.

7.16. Найти множество значений функции:

1) $f(x)=2x-5,\ x\in[-2;2]$.

2) $f(x)=|x-1|,\ x\in[0;5]$.

3) $f(x)=x+\operatorname{sign}x,\ x\in\mathbb{R}$.

4) $f(x)=x^2+2x-3,\ x\in\mathbb{R}$.

5) $f(x)=-2x^2+x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

6) $f(x)=5-12x-2x^2,\ x\in[-4;\ 1]$.

7) $f(x)=x+\frac{1}{x},\ x\in(0;\ +\infty)$.

8) $f(x)=\frac{x^2+4}{x},\ x\in(-\infty;\ 0)$.

9) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$.

7.17. Найти множество значений функции, заданной формулой:

1) $y=\sqrt{x^2+1}$. 2) $y=\sqrt[4]{x^2-1}$. 3) $y=\sqrt{x(4-x)}$.

4) $y=\sqrt{\frac{9x^2+1}{x}}$. 5) $y=ax+\frac{b}{x}$, где $ab>0$.

6) $y=ax+\frac{b}{x}$, где $ab<0$. 7) $y=\frac{x^2+2x-2}{x^2-x+1}$.

7.18. При каких a функция, заданная формулой

$$y=\frac{x^3+ax^2+2x}{2x-1},$$

на своей области определения совпадает с квадратичной функцией?

7.19. При каких a и b функция

$$y=\frac{x^3+ax^2+bx+2b}{x^2+x+1}$$

является линейной?

7.20. Значения $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$ квадратичной функции $y(x)$ — целые числа. Доказать, что при любом целом x значение $y(x)$ — целое число.

7.21. Пусть x_1 — нуль функции $y=x^2+px+q$, x_2 — нуль функции $y=-x^2+px+q$. Доказать, что между x_1 и x_2 найдется нуль функции:

1) $y=\frac{1}{9}x^2+px+q$. 2) $y=\frac{1}{2}x^2-px-q$.

7.22. Найти композиции $f\circ g$ и $g\circ f$ и указать их области определения для функций, заданных формулами:

1) $f(x)=x^2,\ g(x)=\sqrt{x}$. 2) $f(x)=g(x)=\sqrt{1-x^2}$.

3) $f(x)=10^x,\ g(x)=\lg x$. 4) $f(x)=x^5,\ g(x)=x+5$.

5) $f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0;\ +\infty),\\ 0, & x\in(-\infty;\ 0),\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & x\in[0;\ +\infty),\\ x^2, & x\in(-\infty;\ 0).\end{cases}$

6) $f(x)=\ln x^2,\ g(x)=\sin x$.

7.23. Написать формулы, задающие композиции:

1) $u\circ v\circ w\circ y\circ z$, 2) $z\circ y\circ w\circ v\circ u$,

3) $w\circ y\circ v\circ z\circ u$, 4) $y\circ v\circ z\circ u\circ w$,

если $u=\sin x,\ v=\log_2 x,\ w=1+x,\ y=1/x,\ z=\sqrt{x}$.

7.24. Доказать *ассоциативность* композиции, т. е. что

$$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h).$$

7.25. Найти какую-либо функцию f, удовлетворяющую условию:

1) $f(x-2)=\frac{1}{x+1},\ x\in\mathbb{R},\ x\neq-1$.

2) $f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2+1,\ x\in\mathbb{R},\ x\neq 0$.

3) $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=x,\ x\in\mathbb{R},\ x\neq-1$.

4) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x^4+1}{x^2},\ x\in\mathbb{R},\ x\neq 0$.

5) $f(x^2)=1-|x|^3,\ x\in\mathbb{R}$.

7.26. Существует ли функция $f(x)$, $x\in[0;+\infty)$, удовлетворяющая для любого $x\in\mathbb{R}$ равенству $f(x^2)=1+x$?

7.27. Пусть $f(x)=\frac{x}{ax+b}$, $g(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$. Найти:

1) $f\circ f\circ f(x)$. 2) $g\circ g\circ g(x)$.

3) $f\circ f\circ\ldots\circ f(x)$ (n композиций).

4) $g\circ g\circ\ldots\circ g(x)$ (n композиций).

7.28. Пусть $P(x)$ — многочлен и $P(x)=0$ для всех $x\neq 0$. Доказать, что $P(0)=0$.

7.29. Доказать, что если многочлен равен нулю при любом значении аргумента, то все его коэффициенты равны нулю.

---

3. График функции. *Графиком функции* $y=f(x)$, $x\in D(f)$, в прямоугольной системе координат Oxy называют множество всех точек плоскости с координатами $(x;f(x))$, $x\in D(f)$.

Не всякое множество точек координатной плоскости является графиком функции. Для того чтобы данное множество было графиком функции, необходимо и достаточно, чтобы каждая прямая, параллельная оси ординат, пересекала это множество не более чем в одной точке.

Функцию $y=f(x)$, определенную на симметричном относительно нуля множестве X, называют *четной*, если для любого $x \in X$ верно равенство

$$f(-x)=f(x);$$

нечетной, если для любого $x \in X$ верно равенство

$$f(-x)=-f(x).$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат, график нечетной функции симметричен относительно начала координат. Примеры графиков четной и нечетной функций изображены на рис. 11, 12.

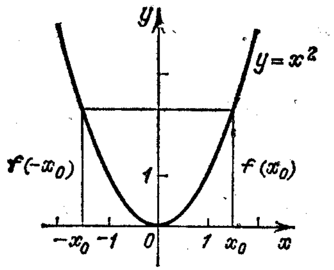


Рис. 11.

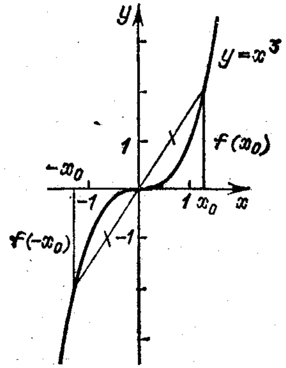


Рис. 12.

В ряде случаев график функции $y=g(x)$ можно получить преобразованием известного графика другой функции $y=f(x)$. В таблице 1 указаны простейшие из этих случаев.

Таблица 1

Функция $y=g(x)$	Преобразование графика функции $y=f(x)$
$y=f(x)+c$	сдвиг вдоль оси ординат на c
$y=f(x-c)$	сдвиг вдоль оси абсцисс на c
$y=f(-x)$	симметрия относительно оси ординат
$y=-f(x)$	симметрия относительно оси абсцисс
$y=af(x)$	умножение каждой ординаты на a
$y=f(ax)$	деление каждой абсциссы на a

Вместо преобразования графика функции $y=f(x)$ можно воспользоваться преобразованием системы координат. Например, график функции $y=f(x)+c$ получится, если, не меняя графика функции $y=f(x)$ (как множества точек плоскости),

взять новую систему координат, сдвинутую на $-c$ вдоль прежней оси ординат, и т. д.

Пример 2. По известному графику функции $y=x^2$ (рис. 11) построить график функции $y=x^2-4x+2$, $x \in \mathbb{R}$.

△ Поскольку $y=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$, искомый график получается сдвигом параболы $y=x^2$ (рис. 11) на 2 единицы вправо, а затем на 2 единицы вниз (рис. 13). Этот же результат получится, если систему координат, в которой построена парабола $y=x^2$ (рис. 11), сдвинуть вверх на 2 единицы и влево на 2 единицы, оставляя параболу неизменной.

Аналогично из графика параболы $y=x^2$ можно получить график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, записав ее в виде

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right).$$

Характерными точками параболы $y=ax^2+bx+c$ являются вершина с координатами $x_0=-b/2a$, $y_0=(4ac-b^2)/4a$, точка $(0; c)$ пересечения с осью ординат и точки пересечения с осью абсцисс (если они есть).

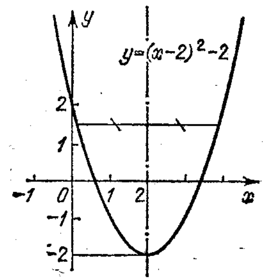


Рис. 13.

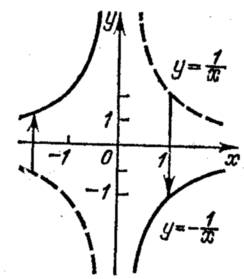


Рис. 14.

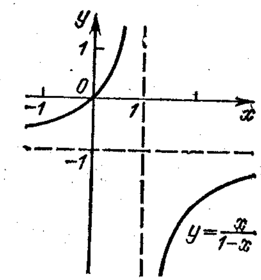


Рис. 15.

Пример 3. По известному графику функции $y=1/x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ (гипербола, рис. 14), построить график функции

$$y=\frac{x}{1-x}, x \in \mathbb{R}, \qquad x \neq 1.$$

△ Имеем

$$y=\frac{x}{1-x}=-\frac{1+(x-1)}{x-1}=-\frac{1}{x-1}-1. \qquad (2)$$

Симметрия относительно оси абсцисс гиперболы $y=1/x$ дает график функции $y=-1/x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ (рис. 14). Возьмем новую систему координат, получающуюся из прежней в соответствии с (2) сдвигом влево вдоль оси абсцисс на единицу, а затем сдвигом на единицу вверх по оси ординат (рис. 15). Кривая, изображающая график функции $y=-1/x$, будет в новой системе координат графиком функции $y=x/(1-x)$. ▲

Пример 4. Построить график функции

$$y = E(x),\ x \in \mathbb{R}\ (\text{целая часть } x),$$

где $E(x)$ — наибольшее целое число, не превосходящее x *).

△ На каждом промежутке $[n; n+1)$, где $n \in \mathbb{Z}$, данная функция постоянна и равна n. В соответствии с этим изобра-

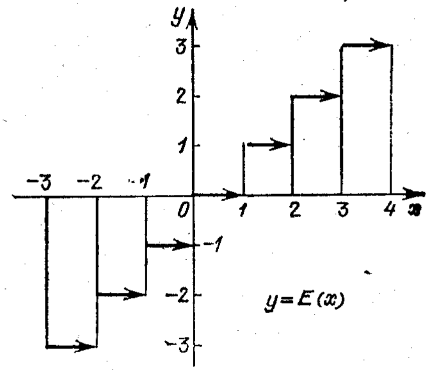


Рис. 16.

жен ее график на рис. 16. Стрелка на графике указывает на то, что точка в ее острие не принадлежит графику. ▲

7.30. Какие из указанных функций являются четными, какие нечетными, какие не являются ни четными, ни нечетными:

1) $y = |x|,\ x \in \mathbb{R}$. 2) $y = \frac{x^3}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}$.

3) $y = \frac{1}{1-x^5},\ x \in (-1; 1)$. 4) $y = \frac{1}{1-x^4},\ x \in (-1; 1)$.

5) $y = \begin{cases} x^4, & x > 0, \\ x^2, & x \leqslant 0. \end{cases}$ 6) $y = \frac{x^6}{x^2+1},\ x \in (-\infty; 1]$.

7) $y = |x+1|,\ x \in \mathbb{R}$. 8) $y = |x+1| + |x-1|,\ x \in \mathbb{R}$.

9) $y = |10-x| - |10+x|,\ x \in \mathbb{R}$?

7.31. Доказать, что произведение двух четных или двух нечетных функций — функция четная, а произведение четной и нечетной функций — функция нечетная.

7.32. Построить графики функций:

1) $y = 2x^2 - 4x + 5$. 2) $y = 2x - x^2 - 2$.

3) $y = x^2 - 2x + c$, где а) $c = 2$; б) $c = 1$; в) $c = 0$; г) $c = -3$.

4) $y = \sqrt{x-2} + x + \sqrt{2-x}$.

---

*) Иногда эту функцию обозначают $y = [x]$.

7.33. В одной системе координат построить графики функций:

1) $y = x$; $y = x^2$; $y = x^3$; $y = x^4$.

2) $y = \frac{1}{x}$; $y = \frac{1}{x^2}$; $y = \frac{1}{x^3}$.

3) $y = x$; $y = x^{1/2}$; $y = x^{1/3}$; $y = x^{1/4}$.

4) $y = \frac{1}{x}$; $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Построить графики функций (7.34—7.37):

7.34. 1) $y = \sqrt{4-x^2}$. 2) $y = -\sqrt{9-x^2}$.

2) $y = 3 - \sqrt{1-x^2}$. 4) $y = \sqrt{2x-x^2} - 1$.

7.35. $\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ (читается: «*сигнум икс*»).

7.36. 1) $y = \{x\}$, где $\{x\} = x - E(x)$ — *дробная часть* x.
2) $y = E(1/x)$.

7.37. 1) $y = |x-1|$. 2) $y = |x+2|$. 3) $y = |x+1| + |x-1|$.

4) $y = (|x+1| - |x-1|)/2$.

5) $y = \operatorname{sign} x - (|x+1| - |x-1|)/2$.

6) $y = \operatorname{sign} x^2$. 7) $y = \operatorname{sign}(x^2-1)$.

8) $y = \operatorname{sign}\frac{2-x}{2+x}$. 9) $y = \operatorname{sign}(x^3-4x)$.

7.38. Построить графики функций $f(x)$, $-f(x)$, $f(-x)$, $-f(-x)$, $f(x)-3$, $f(x-3)$, если:

1) $f(x) = 2x+6$. 2) $f(x) = 4x - x^2$.

3) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$. 4) $f(x) = 1/x$.

7.39. Построить графики функций:

1) $y = \frac{2x-1}{x}$. 2) $y = \frac{1}{x+1}$. 3) $y = \frac{3x}{x-2}$. 4) $y = \frac{x-1}{x+2}$.

7.40. Построить графики функций $f(x)$, $|f(x)|$ и $f(|x|)$, если:

1) $f(x) = 3x - 8$. 2) $f(x) = 3 - 2x$. 3) $f(x) = x^2 - x - 2$.

4) $f(x) = 6x - x^2 - 5$. 5) $f(x) = \frac{1}{x+1}$. 6) $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$.

7.41. Продолжить функцию $y = f(x)$, $x \in (0; a)$, на $(-a; 0]$ так, чтобы получившаяся на $(-a; a)$ функция была: а) четной, б) нечетной:

1) $y=x,\ x\in(0;\ +\infty)$. 2) $y=x^2,\ x\in(0;\ +\infty)$.

3) $y=\sqrt{x},\ x\in(0;\ +\infty)$. 4) $y=x+5,\ x\in(0;\ +\infty)$.

5) $y=\sqrt{1-x^2},\ x\in(0;\ 1)$. 6) $y=x^2-4x+3,\ x\in(0;\ +\infty)$.

7) $y=\dfrac{1}{x(x+1)},\ x\in(0;\ +\infty)$.

Задать продолжение формулой и построить график получившейся функции.

7.42. Построить в одной системе координат графики функций $f(x)$ и $1/f(x)$, если:

1) $f(x)=3x-2$. 2) $f(x)=x^2+1$.

3) $f(x)=x^2-1$. 4) $f(x)=\dfrac{2-x}{2+x}$.

7.43. Построить в одной системе координат графики функций f_1, f_2 и f_1+f_2, если:

1) $f_1(x)=x^3,\ f_2(x)=\dfrac{1}{2}x$. 2) $f_1(x)=x^2,\ f_2(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

3) $f_1(x)=x,\ f_2(x)=\dfrac{1}{x}$. 4) $f_1(x)=x^2,\ f_2(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

7.44. Построить в одной системе координат графики функций f_1, f_2 и f_1-f_2, если:

1) $f_1(x)=\sqrt{4-x^2},\ f_2(x)=x^2$. 2) $f_1(x)=x,\ f_2(x)=1/x$.

3) $f_1(x)=x^3,\ f_2(x)=4x$. 4) $f_1(x)=x^3,\ f_2(x)=1/x^2$.

---

4. Обратная функция. Пусть функция $y=f(x)$, $x\in D(f)$, такова, что для любых $x_1, x_2\in D(f)$ из того, что $x_1\neq x_2$, следует, что $f(x_1)\neq f(x_2)$. Тогда для каждого $y\in E(f)$ найдется только одно значение $x\in D(f)$ такое, что $f(x)=y$.

Функцию, определенную на $E(f)$ и сопоставляющую значению $y\in E(f)$ такое $x\in D(f)$, что $f(x)=y$, называют *обратной* для функции f и обозначают f^{-1}, т. е.

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in E(f).$$

Согласно определению $D(f^{-1})=E(f)$, $E(f^{-1})=D(f)$, т. е. множества определения и значений исходной и обратной функций меняются местами.

Функцию, имеющую обратную, называют *обратимой.*

Каждая прямая $y=y_0$, где $y_0\in E(f)$, пересекает график обратимой функции в единственной точке $(x_0;\ y_0)$, где $f(x_0)=y_0$.

Обозначая, как обычно, аргумент обратной функции x, а значение y, ее записывают в виде

$$y=f^{-1}(x),\ x\in D(f^{-1}).$$

Из определения обратной функции следует, что

$$\forall x\in E(f)\ \ f(f^{-1}(x))=x, \tag{3}$$

$$\forall x\in D(f)\ \ f^{-1}(f(x))=x. \tag{4}$$

График обратной функции $y=f^{-1}(x)$, $x\in D(f^{-1})$, симметричен графику функции $y=f(x)$, $x\in D(f)$, относительно прямой $y=x$. На рис. 17 изображены графики взаимно обратных функций $y=x^3$ и $y=\sqrt[3]{x}$, $x\in\mathbb{R}$.

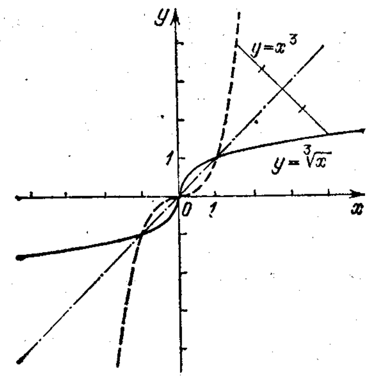


Рис. 17.

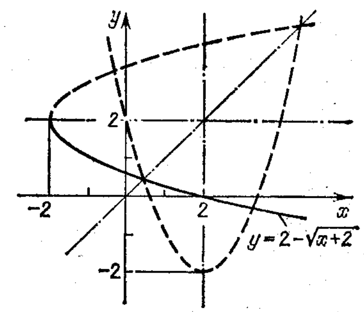


Рис. 18.

Пример 5. Доказать, что функция, заданная формулой

$$y=x^2-4x+2: \tag{5}$$

а) на $\mathbb{R}$ необратима;

б) на $(-\infty;\ 2]$ обратима.

В случае б) построить график обратной функции.

△ а) Уравнение

$$x^2-4x+2=y_0 \tag{6}$$

имеет решения

$$x_1=2+\sqrt{y_0+2}\ \text{ и }\ x_2=2-\sqrt{y_0+2}$$

для любого $y_0\geqslant-2$. При $y_0>-2$ эти решения различны, т. е. для $y_0>-2$ имеются два различных значения аргумента x_1 и x_2 такие, что $y(x_1)=y(x_2)$ (каждая прямая $y=y_0$, $y_0>-2$, пересекает график функции в двух точках (см. рис. 13)). Значит, функция, определенная формулой (5) на всем $\mathbb{R}$, необратима.

б) Уравнение (6) для любого $y_0\geqslant-2$ имеет лишь одно решение

$$x=2-\sqrt{y_0+2} \tag{7}$$

из промежутка $(-\infty;\ 2]$. Значит, функция, определенная формулой (5), на $(-\infty;\ 2]$ обратима. Графиком этой функции является левая от прямой $x=2$ часть параболы на рис. 18, каждая прямая $y = y_0$, $y_0 \geqslant -2$, пересекает этот график только в одной точке. Область значений данной функции — промежуток $[-2; +\infty)$ — является областью определения обратной функции, которая согласно (7) задается формулой

$$y = 2 - \sqrt{x+2}. \tag{8}$$

Чтобы получить график обратной функции, совершим симметрию параболы $y = x^2 - 4x + 2$ (см. рис. 13) относительно прямой $y = x$ (рис. 18). Нижняя от прямой $y = 2$ часть получившейся параболы и будет графиком функции (8). ▲

7.45. Доказать, что функции f и g взаимно обратны:

1) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = \frac{x}{1-x}$.

2) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$, $g(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$.

7.46. Доказать, что график функции f симметричен относительно прямой $y = x$:

1) $f(x) = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$. 2) $f(x) = \sqrt[7]{2-x^7}$.

7.47. Являются ли взаимно обратными функции, заданные формулами:

1) $y = \frac{x+1}{x-1}$, $y = \frac{x+1}{x-1}$. 2) $y = 1 - \sqrt[3]{x}$, $y = (1-x)^3$.

3) $y = 1 + \sqrt{x}$, $y = (x-1)^2$. 4) $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = \sqrt{1-x^2}$?

7.48. Среди функций указать обратимые:

1) $y = 2x - 1$. 2) $y = |x|$. 3) $y = 1/x^3$.

4) $y = x^2 + 2x - 3$. 5) $y = \sqrt[3]{x^5}$. 6) $y = \sqrt{x-1}$.

7) $y = \operatorname{sign} x$. 8) $y = x^2 \operatorname{sign} x$.

Обратные функции задать формулами и построить их графики.

7.49. 1) При каких a и b функция $y = ax + b$ имеет обратную и совпадает с ней?

2) При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $y = x^\alpha$, $x > 0$, совпадает со своей обратной?

---

5. Ограниченные и неограниченные функции. Функцию f называют *ограниченной сверху на множестве* $X \subset D(f)$, если существует число C такое, что для любого $x \in X$ верно неравенство

$$f(x) \leqslant C.$$

Используя символы $\exists$ и $\forall$, это определение записывают так:

$$\exists C\ \forall x((x \in X) \Rightarrow (f(x) \leqslant C)). \tag{9}$$

Аналогично, функция f *ограничена снизу на множестве* $X \subset D(f)$, если

$$\exists C\ \forall x((x \in X) \Rightarrow (f(x) \geqslant C)). \tag{10}$$

Функцию, ограниченную и сверху и снизу на множестве X, называют *ограниченной на множестве* X. Это определение равносильно следующему: функция f ограничена на множестве $X \subset D(f)$, если существует число $C > 0$ такое, что для любого $x \in X$ верно неравенство $|f(x)| \leqslant C$; короче,

$$\exists C > 0\ \forall x((x \in X) \Rightarrow (|f(x)| \leqslant C)). \tag{11}$$

Если в этих определениях $X = D(f)$, то функцию называют соответственно *ограниченной сверху*, *ограниченной снизу*, *ограниченной*.

Например, функция $y = 1/x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, ограниченна сверху на множестве $X = (-\infty; 0)$, так как $1/x < 0$ при $x < 0$, т. е. (9) выполнено при $C = 0$. Эта же функция ограничена снизу на $(0; +\infty)$, так как (10) выполнено при $C = 0$. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, ограничена снизу при $a > 0$, так как для любого $x \in \mathbb{R}$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \tag{12}$$

и, значит, $ax^2 + bx + c \geqslant (4ac - b^2)/4a$, т. е. (10) выполнено при $C = (4ac - b^2)/4a$. При $a < 0$ квадратичная функция ограничена сверху, так как из (12) следует, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$ax^2 + bx + c \leqslant (4ac - b^2)/4a.$$

Пример 6. Доказать, что функция

$$y = \frac{x}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

ограничена.

△ Из неравенства для среднего геометрического и среднего арифметического следует, что $|x| \leqslant (x^2+1)/2$. Отсюда имеем

$$\left|\frac{x}{x^2+1}\right| = \frac{|x|}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$$

для любого $x \in \mathbb{R}$, т. е. (11) выполнено при $C = 1/2$ и, значит, данная функция ограничена. ▲

Отрицание определения ограниченной функции (см. (11)) выглядит так: функция f *неограничена*, если для любого $C > 0$ найдется $x \in D(f)$ такое, что $|f(x)| > C$; короче,

$$\forall C > 0\ \ \exists x((x \in D(f)) \Rightarrow (|f(x)| > C)). \tag{13}$$

Аналогично формулируются отрицания определений ограниченной сверху (снизу) функции.

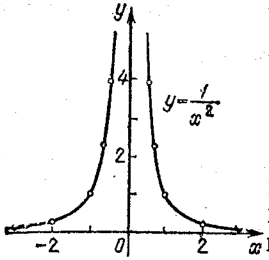


Рис. 19.

Пример 7. Доказать, что функция $y=1/x^2$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$, неограничена, и построить ее график.

△ Пусть C — произвольное положительное число. Неравенство $1/x^2>C$ равносильно неравенству $|x|<1/\sqrt{C}$ при $x\neq 0$. Взяв, например, $x=1/(2\sqrt{C})$ получим, что $1/x^2=4C>C$, а это согласно (13) и означает, что данная функция неограничена.

График функции представлен на рис. 19. Он симметричен относительно оси ординат, поскольку данная функция четная, и расположен выше оси абсцисс, так как $1/x^2>0$ для любого $x\neq 0$. ▲

7.50. Доказать ограниченность функций:

1) $y=x^2-x-1$, $x\in[-1;\,5]$. 2) $y=\dfrac{1}{x-10}$, $x\in[0;\,5]$.

3) $y=\dfrac{x^3}{x^4+1}$, $x\in\mathbb{R}$. 4) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^4+10}}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5) $y=\dfrac{x^2-1}{|x^3-1|}$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 1$. 6) $y=\dfrac{3x^2+6x+10}{\sqrt{0{,}1x^4+1}}$.

7.51. Сформулировать и записать, используя символы $\exists$, $\forall$, определения того, что функция: 1) неограничена сверху, 2) неограничена снизу.

7.52. Доказать, что функция $y=1/x$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$: 1) неограничена сверху, 2) неограничена снизу.

7.53. Доказать, что функция $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(-1;\,1)$, ограничена снизу и неограничена сверху.

7.54. Доказать, что квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$: 1) неограничена сверху при $a>0$, 2) неограничена снизу при $a<0$.

7.55. Доказать, что 1) сумма, 2) произведение ограниченных функций — ограниченная функция.

---

6. Верхняя и нижняя грани, наибольшее и наименьшее значения функции. Монотонные функции. Верхнюю (нижнюю) грань множества всех значений функции $y=f(x)$, $x\in D(f)$, называют *верхней (нижней) гранью функции* и обозначают

$$\sup f,\ \sup f(x)\quad (\inf f,\ \inf f(x)).$$

Если в этом определении рассматривают значения функции лишь на множестве $X\subset D(f)$, то говорят о *верхней (нижней) грани функции на множестве* X и пишут

$$\sup_X f,\ \sup_{x\in X} f(x)\quad (\inf_X f,\ \inf_{x\in X} f(x)).$$

Значение $f(x_0)$, где $x_0\in X\subset D(f)$, функции называют *наибольшим (наименьшим) на множестве* X, если для любого $x\in X$ верно неравенство $f(x)\leqslant f(x_0)$ (соответственно $f(x)\geqslant f(x_0)$). В этом случае число $f(x_0)$ обозначают

$$\max_X f,\ \max_{x\in X} f(x)\quad (\text{соответственно } \min_X f,\ \min_{x\in X} f(x)).$$

Если $X=D(f)$, то говорят коротко о *наибольшем (наименьшем) значении* функции и обозначают его

$$\max f,\ \max f(x)\quad (\min f,\ \min f(x)).$$

Наибольшее (наименьшее) значение функции называют также *максимальным (минимальным)* значением.

Если существует $\max\limits_X f$, то $\sup\limits_X f=\max\limits_X f$; если существует $\min\limits_X f$, то $\inf\limits_X f=\min\limits_X f$.

Из существования конечного $\sup\limits_X f$ $(\inf\limits_X f)$ не следует, вообще говоря, существование максимального (минимального) значения функции. Например, функция, график которой изображен на рис. 20, не имеет максимального значения, и в то же время $\sup f=1$.

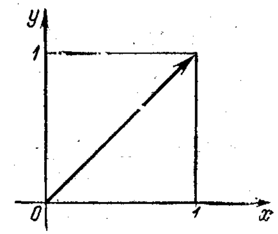


Рис. 20.

Функцию f называют *возрастающей (неубывающей) на множестве* $X\subset D(f)$, если для любых $x_1, x_2\in X$ из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)\leqslant f(x_2)$.

Это определение коротко записывают так:

$$\forall x_1\forall x_2((x_1\in X,\ x_2\in X,\ x_1<x_2)\Rightarrow (f(x_1)\leqslant f(x_2))).$$

Функцию f называют *убывающей (невозрастающей) на множестве* $X\subset D(f)$, если для любых $x_1, x_2\in X$ из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)\geqslant f(x_2)$; короче,

$$\forall x_1\forall x_2((x_1\in X,\ x_2\in X,\ x_1<x_2)\Rightarrow (f(x_1)\geqslant f(x_2))).$$

Если в этих определениях из неравенства $x_1<x_2$ следует строгое неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ (соответственно $f(x_1)>f(x_2)$), то функцию называют *строго возрастающей* (соответственно *строго убывающей*) *на множестве* X.

Возрастающие и убывающие функции объединяют названием *монотонные*, строго возрастающие и строго убывающие — *строго монотонные*.

Если $X=D(f)$, то указание на множество X опускают.

Примером строго возрастающей функции является функция $y=x^3$, $x\in\mathbb{R}$ (см. рис. 12). Функция $y=x^2$, $x\in\mathbb{R}$ (см. рис. 11), строго убывает на $(-\infty;\,0)$ и строго возрастает на $(0;\,+\infty)$, на всей своей области определения $\mathbb{R}$ она не является монотонной.

7.56. Найти $\max\limits_X f$, $\min\limits_X f$, если:

1) $f(x)=x^2-4x-5$, $X=[0;\ 5]$.

2) $f(x)=-x^2+5x-6$, $X=[0;\ 4]$.

3) $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$, $X=[-10;\ -3]$.

4) $f(x)=\dfrac{4-x^2}{4+x^2}$, $X=[-1;\ 3]$.

5) $f(x)=\dfrac{x^4+4}{x^2}$, $X=[1;\ 2]$.

6) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+9}$, $X=\mathbb{R}$.

7.57. Доказать, что если функция f знакопостоянна на множестве X, то

$$\max_X \frac{1}{f}=\min_X f,\quad \min_X \frac{1}{f}=\max_X f.$$

7.58. Доказать, что $\max f$ и $\min f$ не существуют, если:

1) $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|}$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$.

2) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $x\in(-1;\ +\infty)$. 3) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

7.59. Доказать, что существует $\min f$, но не существует $\max f$, и найти $\min f$, если:

1) $f(x)=x^2-3x$, $x\in\mathbb{R}$. 2) $f(x)=x^3+\dfrac{8}{x^3}$, $x\in(0;\ +\infty)$.

3) $f(x)=\dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\in\mathbb{R}$. 4) $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x^2-4}$, $x\in[1;\ 2)$.

7.60. Доказать, что существует $\max f$, но не существует $\min f$; найти $\max f$, если:

1) $f(x)=4x-x^2-6$, $x\in\mathbb{R}$.

2) $f(x)=2\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x\in(-8;\ 0)$.

3) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^4}$, $x\in\mathbb{R}$. 4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, $x\in[0;\ 1)$.

7.61. Найти $\sup\limits_X f$, $\inf\limits_X f$, а также $\max\limits_X f$, $\min\limits_X f$, если последние существуют:

1) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$, $X=(0;\ +\infty)$.

2) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$, $X=(-\infty;\ 0)$.

3) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $X=\mathbb{R}$.

4) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$, $X=\{x\in[-2;\ 3],\ x\neq 2\}$.

5) $f(x)=x-E(x)$, $X=\mathbb{R}$.

7.62. 1) Доказать, что если существует $\max\limits_X f$, то

$$\sup_X f=\max_X f.$$

2) Доказать, что если существует $\min\limits_X f$, то

$$\inf_X f=\min_X f.$$

7.63. Доказать, что

$$\inf_{x\in X}(-f(x))=-\sup_{x\in X} f(x).$$

7.64. Доказать, что квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$: 1) при $a>0$ строго убывает на $(-\infty;\ -b/2a]$ и строго возрастает на $[-b/2a;\ +\infty)$; 2) при $a<0$ строго возрастает на $(-\infty;\ -b/2a]$ и строго убывает на $[-b/2a;\ +\infty)$.

7.65. Доказать, что функция $y=x^3+x$ возрастает.

7.66. Доказать, что функция $y=(1-x^2)/x$ убывает на любом интервале, не содержащем нуля.

7.67. Доказать, что функция $y=(1+x^2)/x$: 1) строго возрастает на $(-\infty;\ -1]$ и на $[1;\ +\infty)$; 2) строго убывает на $[-1;\ 0)$ и на $(0;\ 1]$.

7.68. Найти наибольшие промежутки, на которых функция $y=x^4-2x^2-2$: 1) возрастает, 2) убывает.

7.69. 1) Доказать, что строго монотонная функция взаимно однозначна.

2) Привести пример взаимно однозначной немонотонной функции.

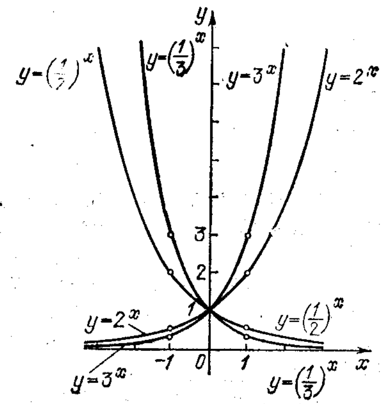


Рис. 21.

7. Показательная и логарифмическая функции. Пусть a — данное положительное число, $a\neq 1$. *Показательная функция*

$$y=a^x \tag{14}$$

определена на $\mathbb{R}$, множеством ее значений является интервал $(0;\ +\infty)$. При $a>1$ функция строго возрастает, при $0<a<1$ строго убывает (рис. 21).

Показательная функция $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, обратима. Обратную функцию называют *логарифмической* и обозначают

$$y = \log_a x, \tag{15}$$

она определена на интервале $(0; +\infty)$, множеством ее значений является множество $\mathbb{R}$. При $a > 1$ логарифмическая функция строго возрастает, при $0 < a < 1$ строго убывает. Графики

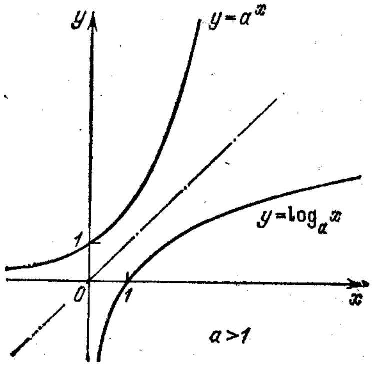


Рис. 22.

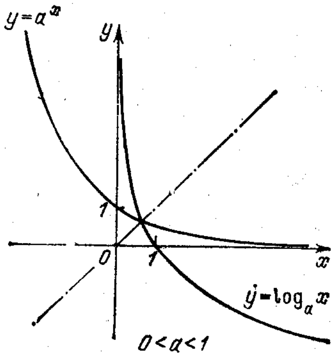


Рис. 23.

функций $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, и $y = \log_a x$, $x \in (0; +\infty)$, симметричны друг другу относительно прямой $y = x$ (рис. 22, 23).

То, что функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, взаимно обратны, означает, что

$$\forall x \in (0; +\infty) \quad a^{\log_a x} = x, \tag{16}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \log_a a^x = x. \tag{17}$$

Пример 8. Построить график функции, заданной формулой

$$y = \frac{1}{2^x - 1}.$$

$\triangle$ Функция определена для всех $x \in \mathbb{R}$ таких, что $2^x \neq 1$, т. е. $x \neq 0$. При построении ее графика можно использовать график функции $y = 2^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ (рис. 24). Эта функция строго возрастает от -1 до $+\infty$. Значения данной функции обратны значениям функции $y = 2^x - 1$. На $(-\infty; 0)$ данная функция убывает от -1 до $-\infty$, а на $(0; +\infty)$ убывает от $+\infty$ до 0 (рис. 25). $\blacktriangle$

Пример 9. Построить график функции, заданной формулой

$$y = \log_3(x^2 - 1).$$

$\triangle$ Функция определена для всех x таких, что $|x| > 1$, т. е. на объединении интервалов $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$. Функция — четная, ее график симметричен относительно оси ординат.

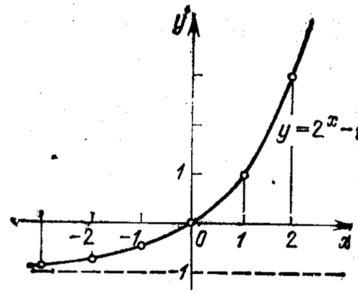


Рис. 24.

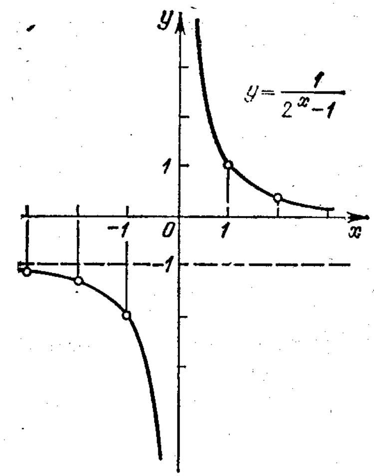


Рис. 25.

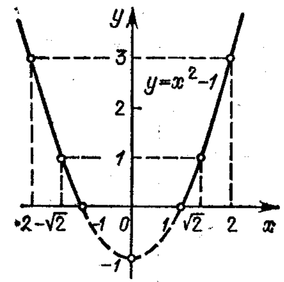


Рис. 26.

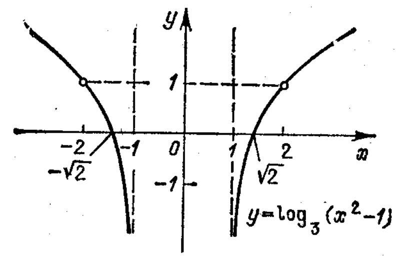


Рис. 27.

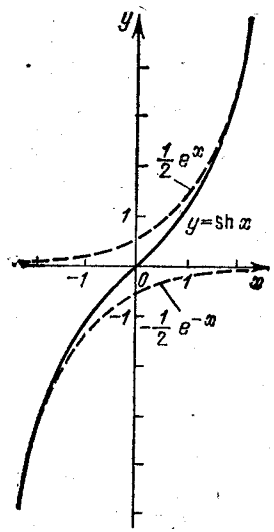


Рис. 28.

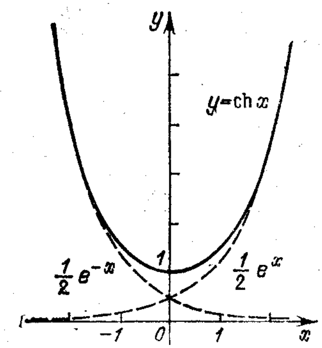


Рис. 29.

Данная функция является композицией функций $y = x^2 - 1$ (ее график показан на рис. 26) и логарифмической функции $y = \log_3 x$. На интервале $(1; +\infty)$ значения $x^2 - 1$ строго возрастают от 0 до $+\infty$, поэтому значения $\log_3(x^2 - 1)$ строго возрастают от $-\infty$ до $+\infty$. График пересекает ось абсцисс при $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{2}$ (рис. 27). ▲

8. Гиперболические функции. *Гиперболические синус* и *косинус* определены на $\mathbb{R}$ соответственно формулами

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{18}$$

Функция $y = \operatorname{sh} x$ — нечетная, строго возрастающая. Функция $y = \operatorname{ch} x$ — четная, строго убывающая на $(-\infty; 0]$ и строго возрастающая на $[0; +\infty)$. Графики этих функций изображены на рис. 28, 29.

Гиперболические тангенс и *котангенс* определены формулами

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \qquad x \in \mathbb{R},\ x \neq 0. \tag{20}$$

Обе функции — нечетные, их графики представлены на рис. 30, 31.

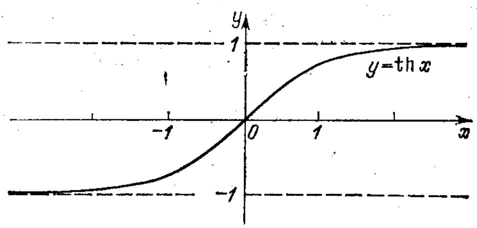


Рис. 30.

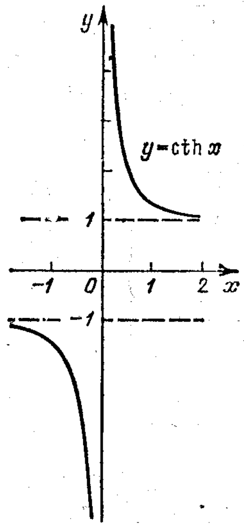


Рис. 31.

Функции $y = \operatorname{sh} x$ и $y = \operatorname{th} x$, $x \in \mathbb{R}$, обратимы, их обратные функции обозначают соответственно

$$y = \operatorname{arsh} x, \quad x \in \mathbb{R} \tag{21}$$

(читают: *ареасинус гиперболический*),

$$y = \operatorname{arth} x, \quad x \in \mathbb{R} \tag{22}$$

(читают: *ареатангенс гиперболический*).

Пример 10. Доказать, что функция, обратная для функции

$$y = \operatorname{ch} x, \qquad x \in [0; +\infty),$$

является элементарной, и построить ее график.

△ На $[0; +\infty)$ функция $y = \operatorname{ch} x$ строго возрастает и поэтому обратима. Областью определения обратной функции будет промежуток $[1; +\infty)$, являющийся множеством значений исходной функции. Для каждого $y \in [1; +\infty)$ уравнение $\operatorname{ch} x = y$, т. е.

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y,$$

сводится к квадратному относительно e^x уравнению

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0.$$

Отсюда находим $e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$, $x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right)$. Условию $x \geqslant 0$ удовлетворяет только решение $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$. Таким образом, обратная функция задается формулой

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \in [1; +\infty). \tag{23}$$

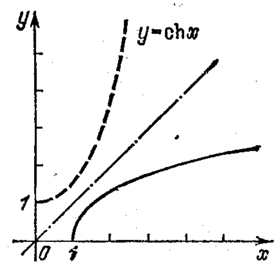


Рис. 32.

Видно, что эта функция получается с помощью конечного числа арифметических операций и композиций степенных и логарифмической функций, т. е. является элементарной.

График обратной функции получаем симметрией относительно прямой $y = x$ графика функции $y = \operatorname{ch} x$, $x \in [0; +\infty)$ (рис. 32). ▲

7.70. Найти области определения функций:

1) $y = \dfrac{1}{16^{x^2} - 2^x}$. 2) $y = \sqrt{2^x - 3^x}$.

3) $y = \log_2 x^2$ и $y = 2\log_2 x$.

4) $y = \log_x 5$. 5) $y = (\lg(100 - x))^{-1}$.

6) $y = \ln x + \ln(x - 1)$ и $y = \ln x(x - 1)$.

7) $y = \log_{3+x}(x^2 - 1)$. 8) $y = \log_3 \log_{0,5} x$.

7.71. Найти множество значений функций:

1) $y = 10^{-x^2}$. 2) $y = \dfrac{1}{1 - 2^{-x}}$. 3) $y = 4^x - 2^x + 1$.

4) $y = \lg(x^2 + 10)$. 5) $y = \log_2(4 - x^4)$.

6) $y = \log_3 x + \log_x 3$.

7.72. Какие из функций являются четными, какие нечетными, какие не являются ни четными, ни нечетными:

1) $y = x \cdot 2^{-x}$. 2) $y = |\lg x|$. 3) $y = \ln e^x$. 4) $y = 10^{\lg x}$.

5) $y = 10^x + 10^{-x}$. 6) $y = \dfrac{1}{3^x} - \dfrac{1}{3^{-x}}$.

7) $y = \operatorname{th} x - \sqrt[3]{x}$. 8) $y = \ln(1 - x^2)$.

8) $y = \ln \operatorname{cth} x$?

7.73. Доказать:

1) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$.

2) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.

3) $\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$.

4) $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.

5) $\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = (\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y))/2$.

6) $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = (\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y))/2$.

7) $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = (\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y))/2$.

7.74. Доказать ограниченность функций:

1) $y = 10^{-|x|}$. 2) $y = 0{,}3^{x^2-1}$. 3) $y = \dfrac{1}{\lg(2+x^4)}$.

4) $y = \log_4(x^2+5) - \log_2(1+|x|)$.

5) $y = (\lg x + \log_x 10)^{-1}$.

7.75. Доказать неограниченность функций:

1) $y = 0{,}4^x$, $x \in \mathbb{R}$. 2) $y = \log_{0,1} x$, $x \in (1; +\infty)$.

3) $y = x^x$, $x \in (0; +\infty)$. 4) $y = \log_x 2$, $x \in (1; +\infty)$.

7.76. Доказать, что при $a > 1$:

1) $\sup\limits_{(0;\,+\infty)} a^{1/x} = +\infty$, $\inf\limits_{(0;\,+\infty)} a^{1/x} = 1$.

2) $\sup\limits_{(-\infty;\,0)} a^{1/x} = 1$, $\inf\limits_{(-\infty;\,0)} a^{1/x} = 0$.

7.77. Найти $\inf f$, $\sup f$, а также $\max f$, $\min f$, если они существуют:

1) $f(x) = 2^{-|x+2|}$. 2) $f(x) = (\sqrt{2} - 1)^{1-x^2}$.

3) $f(x) = 1 - 2^{1/(x-1)}$. 4) $f(x) = 8 - 2^{x+1} - 4^x$.

5) $f(x) = \lg(x^2 + x - 2)$. 6) $f(x) = \log_{0,1}(4x - 3 - x^2)$.

7) $f(x) = (\log_2(2/x)) \log_2 8x$.

7.78. Доказать, что функция $y = 2^{1/x}$ убывает на каждом интервале, не содержащем нуля.

7.79. Доказать, что функция $y = \log_3(x^2 - 2x)$ убывает на $(-\infty; 0)$ и возрастает на $(2; +\infty)$.

7.80. Исследовать на монотонность функции:

1) $y = (2/3)^{1/x}$. 2) $y = 3^{|x|}$.

3) $y = 2^{1-x} - 2^{x-1}$. 4) $y = \lg(1+x^3)$.

5) $y = \log_x 10$. 6) $y = \ln(4x - x^2)$.

7) $y = \log_{0,5} \dfrac{x}{x+1}$.

Построить графики функций (7.81—7.82):

7.81. 1) $y = 3^{-|x+2|}$. 2) $y = 2^{1/x}$.

3) $y = \dfrac{2^x}{2^{x+1} - 1}$. 4) $y = \log_4 |x+1|$.

5) $y = 1 - 2\log_{1/3}|x|$. 6) $y = |\log_{0,5} x| - 1$.

7) $y = \lg x^2$. 8) $y = \log_{0,2} 5^x$. 9) $y = 8^{\log_8 (x-3)}$.

7.82. 1) $y = (1{,}5)^{x^2-1}$. 2) $y = 2^{(x+1)/x}$.

3) $y = \log_2(x^2 + x - 2)$. 4) $y = \log_{0,1}(4x - 3 - x^2)$.

5) $y = \log_3((x+2)/x)$. 6) $y = \log_x 3$.

7.83. Функцию, заданную на $(0; +\infty)$, продолжить, задав формулой, на $(-\infty; 0]$: а) четно, б) нечетно; построить график получившейся функции:

1) $y = -3 \cdot 2^{x-1}$. 2) $y = 1 - 2\lg x$.

3) $y = \log_{x+2} x$. 4) $y = \operatorname{th}(x-1)$.

7.84. Найти функцию, обратную данной функции, указать ее область определения и построить ее график:

1) $y = 3^{1-x}$. 2) $y = 1 + \lg(x+2)$.

3) $y = \dfrac{2^x}{2^x + 1}$. 4) $y = \log_x 10$.

5) $y = 2^{x-1} - 2^{-x}$. 6) $y = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

7.85. Для указанной функции задать обратную функцию формулой и построить график:

1) $y = \operatorname{ch} x$, $x \in (-\infty; 0)$. 2) $y = \operatorname{sh} x$, $x \in \mathbb{R}$.

3) $y = \operatorname{th} x$, $x \in \mathbb{R}$. 4) $y = \operatorname{cth} x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

7.86. Доказать, что график функции $y = \ln(1 - e^x)$ симметричен относительно прямой $y = x$.

---

9. Периодические функции. Тригонометрические функции. Число $T \neq 0$ называют *периодом функции* f, если для любого $x \in D(f)$ выполнено

$$x + T \in D(f), \quad x - T \in D(f) \quad \text{и} \quad f(x+T) = f(x).$$

Функцию, имеющую период, называют *периодической*.

Если T — период функции, то для любого $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, число nT также является периодом этой функции.

График периодической с периодом T функции при сдвиге вдоль оси абсцисс на T переходит в себя.

Тригонометрические функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ — периодические с наименьшим положительным периодом 2π, а $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ — периодические с наименьшим положительным периодом π.

Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ определены на $\mathbb{R}$. Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена для всех $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ определена для всех $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

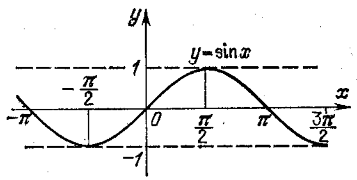


Рис. 33.

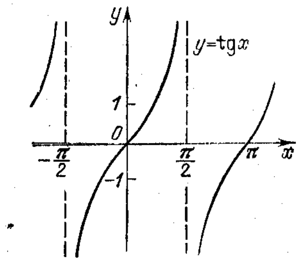


Рис. 34.

Графики функций $y = \sin x$ и $y = \operatorname{tg} x$, наглядно показывающие их свойства, изображены на рис. 33, 34.

Из формулы приведения

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

следует, что график функции $y = \cos x$ получается сдвигом графика функции $y = \sin x$ на $\pi/2$ влево по оси абсцисс (рис. 35). Из формулы

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

вытекает, что график функции $y = \operatorname{ctg} x$ получается из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ сдвигом вправо на $\pi/2$ по оси абсцисс и симметрией относительно этой оси (рис. 36). Функции $y = \sin x$,

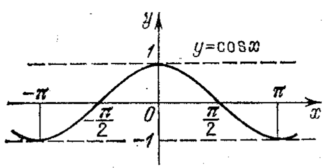


Рис. 35

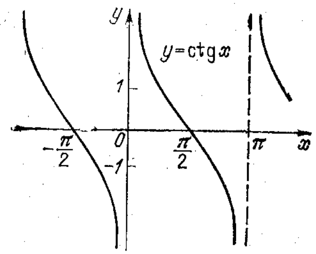


Рис. 36.

$y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ — нечетные, их графики симметричны относительно начала координат. Функция $y = \cos x$ — четная, ее график симметричен относительно оси ординат.

Пример 11. Построить график функции, заданной формулой

$$y = \cos^2 x.$$

△ Функция определена на $\mathbb{R}$, является четной, периодической с периодом π. Поскольку

$$\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2,$$

ее график получается из графика функции $y = \cos x$ сжатием вдвое вдоль оси Ox, сдвигом на единицу вверх по оси Oy и

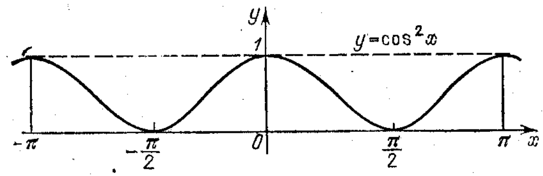


Рис. 37.

сжатием вдвое вдоль оси Oy. В соответствии с этим изображен график на рис. 37. ▲

Пример 12. Построить график функции, заданной формулой

$$y = \frac{1}{\sin x}.$$

△ Областью определения функции является множество всех $x \in \mathbb{R}$ таких, что $\sin x \neq 0$, т. е. $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Функция — нечетная, периодическая с периодом 2π. Построим график на интервале $(0; \pi)$, затем продолжим его на $(-\pi; 0)$ симметрично

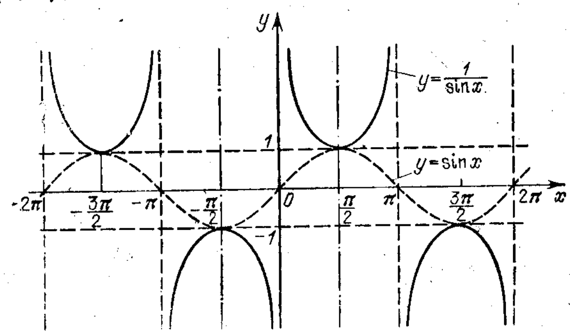


Рис. 38.

относительно начала координат, а далее продолжим периодически с периодом 2π.

Если $x \in (0; \pi)$, то $0 < \sin x < 1$, и поэтому

$$1 \leqslant \frac{1}{\sin x},$$

причем

$$\min \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}\Big|_{x=\pi/2} = 1.$$

Поскольку $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, график симметричен относительно прямой $x=\pi/2$. При увеличении x от 0 до $\pi/2$ значения $\sin x$ строго возрастают от 0 до 1, поэтому значения $1/\sin x$ строго убывают от $+\infty$ до 1 (рис. 38). ▲

Функции, заданные формулами

$$y=\frac{1}{\sin x}, \quad y=\frac{1}{\cos x},$$

называют соответственно *косеканс* и *секанс* и обозначают

$$\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}, \quad \sec x=\frac{1}{\cos x}. \tag{24}$$

Пример 13. Построить график функции $y=x\cos x$, $x\in\mathbb{R}$.

△ Функция — нечетная, поэтому построим ее график при $x\geqslant 0$, а затем совершим симметрию относительно начала координат. При построении графика будем руководствоваться

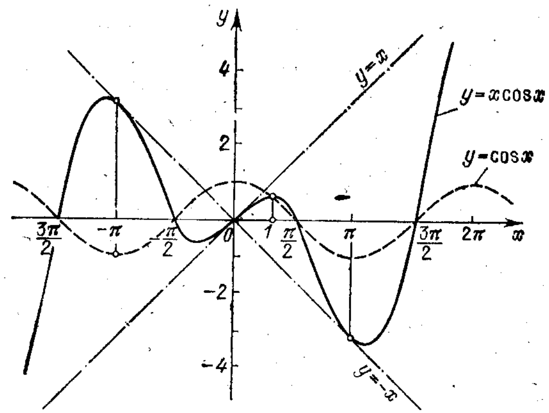


Рис. 39.

тем, что ординаты его точек получаются перемножением ординат точек графиков функции $y=x$ и $y=\cos x$ (рис. 39).

График проходит через начало координат, пересекает ось Ox при $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ (где $\cos x=0$). Поскольку $-1\leqslant$ $\leqslant\cos x\leqslant 1$, при $x\geqslant 0$ имеем

$$-x\leqslant x\cos x\leqslant x,$$

т. е. график лежит между прямыми $y=x$ и $y=-x$. При $x=2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ (где $\cos x=1$), график имеет общие точки с прямой $y=x$, а при $x=\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ (где $\cos x=-1$), — общие точки с прямой $y=-x$.

Если $0<x<1$, то $0<x\cos x<\cos x$ и $x\cos x<x$, т. е. график лежит ниже графиков $y=\cos x$ и $y=x$. При $x=1$ графики $y=x\cos x$ и $y=\cos x$ пересекаются, при этом

$y=\cos 1\approx 0{,}54$. Если $x>1$, то $|x\cos x|>|\cos x|$, если $\cos x\neq 0$, т. е. точки графика $y=x\cos x$ лежат дальше от оси Ox, чем соответствующие точки графика $y=\cos x$. В соответствии с этим, рассчитав и отметив несколько промежуточных точек, изображаем график (рис. 39). Он представляет собой кривую, колеблющуюся между прямыми $y=x$ и $y=-x$. ▲

Пример 14. Доказать, что функция $y=\sin x^2$, $x\in\mathbb{R}$, — непериодическая.

△ Достаточно доказать, что функция не имеет положительного периода, так как если бы число $T<0$ было периодом, то число $-T$ было бы положительным периодом. Доказательство проведем методом от противного.

Допустим, что число $T>0$ — период функции, т. е. для любого $x\in\mathbb{R}$

$$\sin(x+T)^2=\sin x^2.$$

При $x=0$ отсюда следует, что $\sin T^2=0$, т. е. $T^2=\pi n$, а $T=\sqrt{\pi n}$ при некотором $n\in\mathbb{N}$. Если $0<x<\sqrt{\pi}$, то $\sin x^2\neq 0$, а поскольку $\sqrt{\pi n}$ — период, то и $\sin\left(x+\sqrt{\pi n}\right)^2\neq 0$. Если же $x=\sqrt{\pi}$, то $\sin\left(\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi n}\right)^2=\sin\left(\sqrt{\pi}\right)^2=0$. Значит, число $\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi n}$ является ближайшим справа к $\sqrt{\pi n}$ числом, при котором $\sin x^2=0$. Отсюда следует, что $\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi n}\leqslant$ $\leqslant\sqrt{\pi(n+1)}$, так как $\sqrt{\pi(n+1)}>\sqrt{\pi n}$ и $\sin\left(\sqrt{\pi(n+1)}\right)^2=$ $=0$. Но неравенство $\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi n}\leqslant\sqrt{\pi(n+1)}$, равносильное неравенству $1\leqslant\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, неверно для любого $n\in\mathbb{N}$, так как

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<1.$$

Значит, неверно и допущение о периодичности функции $\sin x^2$, т. е. эта функция — непериодическая. ▲

10. Обратные тригонометрические функции. Периодическая функция необратима; в частности, необратимы и тригонометрические функции. Но на некоторых подмножествах своей области определения эти функции обратимы.

Функция $\sin x$ на отрезке $[-\pi/2;\ \pi/2]$ имеет обратную, которую обозначают

$$y=\arcsin x, \qquad x\in[-1;\ 1]. \tag{25}$$

Множеством значений этой функции является отрезок $[-\pi/2;\ \pi/2]$. Ее график симметричен относительно прямой $y=x$ графику функции $y=\sin x$, $x\in[-\pi/2;\ \pi/2]$ (рис. 40). Функция $y=\arcsin x$ является нечетной.

Функция $y=\cos x$, $x\in[0;\ \pi]$, имеет обратную функцию

$$y=\arccos x, \qquad x\in[-1;\ 1], \tag{26}$$

множество значений которой — отрезок $[0;\ \pi]$. График этой функции представлен на рис. 41, он симметричен относительно точки $(0; \pi/2)$. Функция $y = \arccos x$ не является ни четной, ни нечетной.

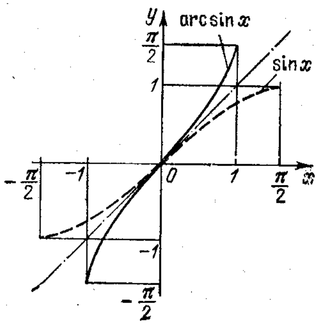


Рис. 40.

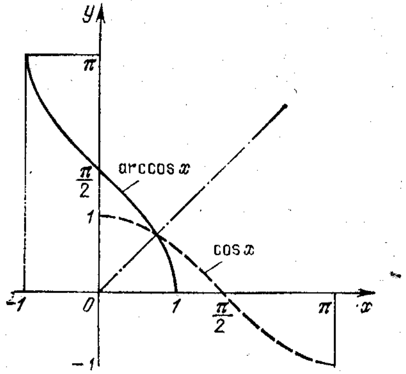


Рис. 41.

Функция $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2; \pi/2)$, имеет обратную функцию

$$y = \operatorname{arctg} x, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{27}$$

множество значений которой — интервал $(-\pi/2; \pi/2)$. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ является нечетной. Ее график изображен на рис. 42.

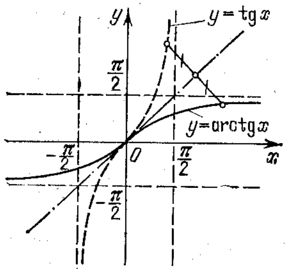


Рис. 42.

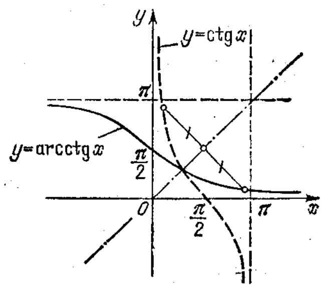


Рис. 43.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$, имеет обратную функцию

$$y = \operatorname{arcctg} x, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

множество значений которой — интервал $(0; \pi)$. Эта функция не является ни четной, ни нечетной. Ее график показан на рис. 43, он симметричен относительно точки $(0; \pi/2)$.

Пример 15. Доказать, что

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2, \qquad x \in [-1; 1].$$

△ Функции $\sin x$, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$, и $\arcsin x$, $x \in [-1; 1]$, взаимно обратны, поэтому (см. (3)) для любого $x \in [-1; 1]$

$$\sin(\arcsin x) = x.$$

Отсюда и из формулы $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ следует, что

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right), \qquad x \in [-1; 1]. \tag{29}$$

Функции $\cos t$, $t \in [0; \pi]$, и $\arccos t$, $t \in [-1; 1]$, взаимно обратны, поэтому (см. (4)) для любого $t \in [0; \pi]$

$$\arccos(\cos t) = t.$$

В частности, это верно и для $t = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, поскольку $\frac{\pi}{2} - \arcsin x \in [0; \pi]$. Отсюда и из формулы (29) получаем, что $\arccos x = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, т. е. $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$ для любого $x \in [-1; 1]$. ▲

Пример 16. Построить графики функций, заданных формулами:

1) $y = \sin(\arcsin x)$; 2) $y = \arcsin(\sin x)$.

△ 1) Эта функция определена на $[-1; 1]$. Функция $\sin x$, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$, является обратной для функции $\arcsin x$, $x \in [-1; 1]$, поэтому (см. (3)) для любого $x \in [-1; 1]$ верно равенство

$$\sin(\arcsin x) = x.$$

Отсюда следует, что $y = x$, $x \in [-1; 1]$, т. е. графиком данной функции является отрезок прямой $y = x$ (рис. 44).

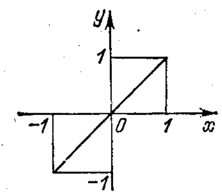


Рис. 44.

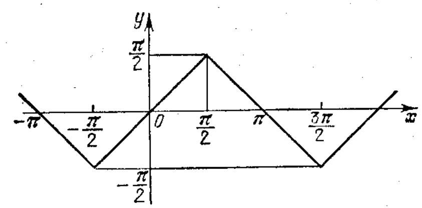


Рис. 45.

2) Эта функция определена на $\mathbb{R}$, периодична с периодом 2π, так как $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ и, значит,

$$\arcsin(\sin(x + 2\pi)) = \arcsin(\sin x).$$

Из того, что $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, следует, что

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right),$$

значит, график данной функции симметричен относительно прямой $x = \pi/2$. Построим график на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$, продолжим его симметрично относительно прямой $x = \pi/2$ на отрезок

$[\pi/2; 3\pi/2]$, затем с отрезка $[-\pi/2; 3\pi/2]$ продолжим периодически с периодом 2π.

Функция $\arcsin x$, $x \in [-1; 1]$, — обратная для функции $\sin x$, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$, поэтому для любого $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ имеем

$$\arcsin(\sin x) = x.$$

Таким образом, на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ график данной функции совпадает с прямой $y = x$ (рис. 45). Из симметрии графика относительно прямой $x = \pi/2$ следует, что на отрезке $[\pi/2; 3\pi/2]$ он совпадает с прямой $y = \pi - x$, т. е.

$$\arcsin(\sin x) = \pi - x, \quad x \in [\pi/2; 3\pi/2].$$

На этом отрезке функция $y = \arcsin x$, $x \in [-1; 1]$, не является обратной для функции $y = \sin x$. ▲

Пример 17. Построить график функции, заданной формулой

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}.$$

△ Данная функция является композицией функций $z = 1/x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, с множеством значений $(0; +\infty)$ и функции $y = \operatorname{arctg} z$, $z \in \mathbb{R}$. Областью определения данной функции являются все значения $x \neq 0$. Функция — четная, ее график симметричен относительно оси ординат.

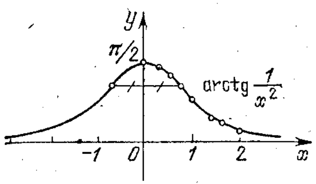


Рис. 46.

Из свойств функций $z = 1/x^2$ (рис. 19) и $y = \operatorname{arctg} z$ (рис. 42) следует, что при возрастании x от 0 до $+\infty$ значения $1/x^2$ убывают от $+\infty$ до 0, а значения $\operatorname{arctg}(1/x^2)$ убывают от $\pi/2$ до 0. Рассчитав и отметив несколько промежуточных точек, рисуем график (рис. 46). Точка $(0; \pi/2)$ не входит в график. ▲

7.87. Доказать, что функция

$$y = x - E(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

— периодическая, и найти ее наименьший положительный период.

7.88. Доказать, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное,} \end{cases}$$

периодична и любое ненулевое рациональное число — ее период, никакое же иррациональное число периодом не является.

7.89. Найти наименьший положительный период функции:

1) $y = \sin 3x$. 2) $y = 6\cos(3\pi x/4)$.

3) $y = \operatorname{tg}(3x + 5)$. 4) $y = \sin^2(x - 1)$.

5) $y = |\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x|$. 6) $y = \sin x + \cos 2x$.

7) $y = \cos 2x \cos 6x$.

7.90. Доказать, что следующие функции непериодичны:

1) $y = \sin |x|$. 2) $y = \cos(1/x)$.

3) $y = \cos x \cos \sqrt{3} x$

7.91. Доказать, что если функция $y = f(x)$ периодична с периодом T, то функция $y = f(ax + b)$, $a \neq 0$, периодична с периодом T/a.

7.92. Найти область определения функции:

1) $y = \dfrac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin(x/3)}$. 2) $y = \sqrt{\cos x}$.

3) $y = (\sin x - 2\sin^2 x)^{-3/4}$. 4) $y = \arccos(3 - x)$.

5) $y = \arcsin(0{,}5x - 1) + \arccos(1 - 0{,}5x)$.

6) $y = \ln \cos x$. 7) $y = \sqrt{\ln \sin x}$.

7.93. Найти множество значений функции:

1) $y = 1 - 2|\cos x|$. 2) $y = \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

3) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$. 4) $y = \dfrac{1 + \sin x}{\sin x}$.

5) $y = \arccos |x|$. 6) $y = \pi - |\operatorname{arctg} x|$.

7) $y = \cos \arcsin x$. 8) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

Какие из функций являются четными, какие нечетными и какие не являются ни четными ни нечетными (**7.94—7.95**):

7.94. 1) $y = x + \sin x$. 2) $y = x^2 - \cos x$.

3) $y = \sin x \operatorname{tg} x$. 4) $y = (1 - x^2)\cos x$.

5) $y = (1 + \cos x)\operatorname{ctg} x$. 6) $y = \dfrac{1 + \sin x}{\sin x}$.

7) $y = \cos(x + 1)$. 8) $y = \sin 5x + \cos 3x$.

7.95. 1) $y = \arcsin x^2$. 2) $y = 2\arccos(-x)$.

3) $y = \arccos |x|$. 4) $y = |\operatorname{arctg} x|$.

5) $y = \arccos(\cos x)$. 6) $y = \cos(\arccos x)$.

7) $y = \arcsin x + \arccos x$.

7.96. Доказать:

1) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, $|x| \leqslant 1$.

2) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2$, $x \in \mathbb{R}$.

3) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R}$.

7.97. Используя неравенства

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \qquad x \in (0; \pi/2),$$

доказать неравенства:

1) $\sin x \geqslant x,\ x \leqslant 0$. 2) $|\sin x| \leqslant |x|,\ x \in \mathbb{R}$.

3) $\operatorname{ctg} x < 1/x,\ x \in (0;\ \pi/2)$. 4) $\cos x < \frac{\pi}{2} - x,\ x \in (0;\ \pi/2)$.

5) $\operatorname{ctg} x > \frac{\pi}{2} - x,\ x \in (0;\ \pi/2)$.

6) $\operatorname{tg} x < \frac{2}{\pi - 2x},\ x \in (0;\ \pi/2)$.

7) $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2},\ x \in \mathbb{R}$.

8) $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{2},\ x \in (0;\ +\infty)$.

9) $\arcsin x > x,\ x \in (0;\ 1)$.

10) $|\operatorname{arctg} x| \leqslant |x|,\ x \in \mathbb{R}$.

7.98. Доказать ограниченность функции:

1) $y = \frac{\cos x}{1,5 - \sin x}$. 2) $y = \frac{2 \sin x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

3) $y = \operatorname{ctg} x \sin 2x$. 4) $y = \cos 2x \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

5) $y = \frac{1}{x} \sin x$.

7.98. Доказать неограниченность функции:

1) $y = x \sin x$. 2) $y = 1/\cos x$.

3) $y = \frac{\sin x}{0,5 + \sin x}$. 4) $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

7.99. Найти $\sup f$, $\inf f$, а также $\max f$ и $\min f$, если они существуют:

1) $y = 4 \sin^2 x - 12 \sin x + 5$. 2) $y = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin x}$.

3) $y = \frac{\cos x}{1 + \cos x}$. 4) $y = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$. 5) $y = \cos x \operatorname{tg} x$.

6) $y = \operatorname{arctg}(1/x)$. 7) $y = \operatorname{arcctg}|x|$.

7.100. Исследовать на монотонность функцию:

1) $y = 1/\cos x,\ x \in [-\pi;\ \pi],\ |x| \neq \pi/2$.

2) $y = \sin(1/x),\ x \geqslant 2/(3\pi)$. 3) $y = \operatorname{arctg}(1/x)$.

4) $y = \arccos|x|$. 5) $y = \sin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

6) $y = \cos \frac{x^2}{1 + x^2}$. 7) $y = \operatorname{arctg} x - x$.

Построить график функции (**7.101—7.103**):

7.101. 1) $y = \cos 3x$. 2) $y = 2 \sin(2x - 3)$.

3) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$. 4) $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$.

5) $y = |\sin x|$. 6) $y = \sin|x|$.

7) $y = \sin^2 x$. 8) $y = \cos x$ и $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$.

9) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$.

7.102. 1) $y = \sec x$. 2) $y = \sin(\cos x)$. 3) $y = \sqrt{\sin x}$.

4) $y = 2^{\cos x}$. 5) $y = \log_2 \sin x$.

7.103. 1) $y = \arcsin(1 - x)$. 2) $y = \operatorname{arctg}|x|$.

3) $y = \operatorname{arcctg}(1/x)$. 4) $y = \cos \arccos x$.

5) $y = \arccos \cos x$. 6) $y = x - \arcsin(\sin x)$.

7.104. Функцию, заданную формулой при $x > 0$, продолжить, задав формулой, на значения $x \leqslant 0$: а) четно, б) нечетно; построить график получившейся функции:

1) $y = 1 + \sin x$. 2) $y = \operatorname{ctg} x$. 3) $y = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$.

4) $y = \arccos 2x$. 5) $y = \operatorname{arctg}(x - 1)$.

7.105. Выразить через элементарные функции обратные функции к заданным и построить их графики:

1) $y = \sin x,\ x \in [-3\pi/2;\ -\pi/2]$. 2) $y = \cos x,\ x \in [-\pi;\ 0]$

3) $y = \operatorname{tg} x,\ x \in (\pi/2;\ 3\pi/2)$. 4) $y = \operatorname{ctg} x,\ x \in (-\pi;\ 0)$.

5) $y = 2 \sin 3x,\ x \in [\pi/6;\ \pi/2]$. 6) $y = 2 \arcsin(x/2),\ |x| \leqslant 2$.

7) $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1;\ 0]$.

8) $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2},\ x \in [0;\ 1]$.

9) $y = \operatorname{arctg}(1/x),\ x \neq 0,\ x \in \mathbb{R}$.

7.106. Доказать, что график функции

$$y = \arccos(2 \sin^2(x/2)), \qquad x \in [0; \pi],$$

симметричен относительно прямой $y = x$.

---

11. Неявный способ задания функции. Функцию называют заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$ (*неявной функцией*), если каждое значение ее аргумента x и соответствующее ему значение функции y являются решением данного уравнения $F(x, y) = 0$.

Графиком уравнения $F(x, y) = 0$ в прямоугольной системе координат xOy называют множество всех точек плоскости, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют этому уравнению.

График всякой функции, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$, содержится в графике этого уравнения.

Уравнение $F(x, y) = 0$ может задавать не одну, а множество функций.

Иногда от неявного способа задания удается перейти к явному, т. е. задать функцию формулой $y = f(x)$. Например,

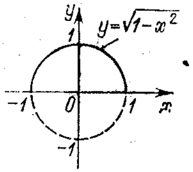


Рис. 47.

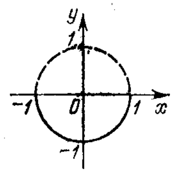


Рис. 48.

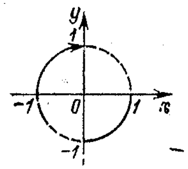


Рис. 49.

функцию с неотрицательными значениями, заданную уравнением $x^2 + y^2 = 1$, можно задать явно в виде $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1; 1]$. График данного уравнения — единичная окружность, а график рассматриваемой функции — верхняя полуокружность (рис. 47). Это же уравнение задает и другие функции, графики двух из них изображены на рис. 48, 49 сплошной линией.

7.107. Доказать, что следующее уравнение задает функцию, и построить ее график:

1) $\dfrac{xy - 1}{y - x} = 0$. 2) $\dfrac{y - 2x^2}{y - 8} = 0$. 3) $\dfrac{x^2 + y^2 - 6}{\sqrt{y} + x} = 0$.

4) $\dfrac{x^5 + y^4}{x^2 + y^2} = 0$. 5) $\dfrac{x^4 - y^8}{\lg^2 x + y^2} = 0$.

7.108. Изобразить графики уравнений:

1) $|x| + |y| = 1$. 2) $|x| - |y| = 2$. 3) $x^4 - y^4 = 0$.

4) $x^2 - y^4 = 0$. 5) $x^2 + y^2 - 4y = 0$. 6) $y^2 + 2\cos 2x = 2$.

7) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (эллипс). 8) $x^2 - y^2 = x^4$.

7.109. Доказать, что график следующего уравнения является объединением графиков нескольких функций $y = f(x)$ или $x = g(y)$; построить графики этих функций:

1) $|y| + |x - 2| = x$. 2) $|x + y| + |x - y| = 1$.

3) $|y| = \log_{0,5} x$. 4) $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$.

7.110. Построить график уравнения и показать, что он не может быть получен объединением конечного числа графиков функций:

1) $|x| - x = |y| - y$. 2) $|y| = |y - \sin x|$.

---

12. Функции, заданные параметрически. Пусть на множестве T заданы две функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$. Множество всех точек координатной плоскости с координатами $(\varphi(t); \psi(t))$, $t \in T$, называют *кривой, заданной параметрически.*

Например, пара функций $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$, задает параметрически единичную окружность.

Пример 18. Построить кривую

$$x = t^2, \quad y = t^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

△ Функция $x = t^2$ при $t \geqslant 0$ обратима, и обратной к ней является функция $t = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$. Поэтому при $t \geqslant 0$ имеем $y = (\sqrt{x})^3 = x^{3/2}$, т. е. кривая совпадает с графиком функции $y = x^{3/2}$, $x \geqslant 0$ (рис. 50). При $t \leqslant 0$ аналогично имеем $t = -\sqrt{x}$, $x \geqslant 0$, и $y = (-\sqrt{x})^3 = -(x)^{3/2}$, т. е. при $t \leqslant 0$ кривая совпадает с графиком функции $y = -(x)^{3/2}$, $x \geqslant 0$ (рис. 50).

Отметим, что данная кривая совпадает с графиком уравнения $x^3 = y^2$, а также с графиком функции $x = y^{2/3}$. ▲

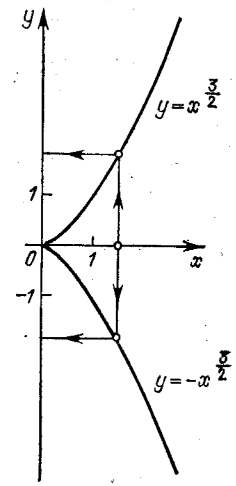


Рис. 50.

Пусть X и Y — соответственно множества значений функций $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, определенных на T. Для каждого $t \in T$ значению $x = \varphi(t)$ сопоставим значение $y = \psi(t)$. При этом может случиться, что значению $x \in X$ сопоставлено более чем одно значение $y \in Y$ (см., например, рис. 50). Пусть дано правило, по которому из множества значений y, сопоставленных указанным выше способом значению x, выбирается только одно значение. Функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, $t \in T$, вместе с этим правилом определяют функцию $y = f(x)$, $x \in X$, которую называют *заданной параметрически.*

Например, функции $x = t^2$, $y = t^3$, $t \in \mathbb{R}$, вместе с условием $y \geqslant 0$ задают параметрически функцию $y = f(x)$, $x \geqslant 0$, которую в данном случае можно задать и явно в виде $y = x^{3/2}$, $x \geqslant 0$.

7.111. Какие из данных точек A и B принадлежат кривой:

1) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$; $A(0; 0)$, $B(3; 3)$.

2) $x = \sin t + 1$, $y = \cos t - 1$; $A(0; -1)$, $B(1,6; -0,2)$.

3) $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$; $A(3/2; \sqrt{3})$; $B(1; 2)$.

4) $x = 2^t \sin t$, $y = 2^t \cos t$; $A(2; 2)$, $B(0; 2^{\pi})$?

7.112. Исключив параметр t, получить уравнение, график которого совпадает с кривой; изобразить этот график:

1) $x=t-1,\ y=t^2-2t+2$. 2) $x=2-3\cos t,\ y=1+3\sin t$.
3) $x=2\cos t,\ y=3\sin t$. 4) $x=|\ln t|,\ y=1+t^3$.
5) $x=(t+1)^2,\ y=(t-1)^2$.

7.113. Построить по точкам кривые:
1) $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$ (*циклоида*).
2) $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$ (*астроида*).

---

13. График функции в полярных координатах. Зафиксируем на плоскости луч l с началом O (рис. 51). Паре чисел $(\varphi; r)$, где $r>0$, сопоставим точку M плоскости такую, что

а) $|OM|=r$;

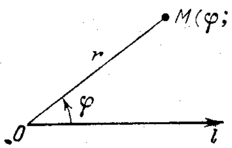


Рис. 51.

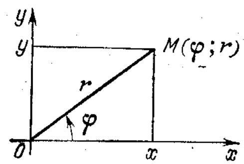


Рис. 52.

б) угол поворота луча l до луча OM равен φ, причем, если $\varphi>0$, то поворот совершается против часовой стрелки, а если $\varphi<0$ — по часовой стрелке.

Всем парам $(\varphi; 0)$ сопоставим точку O.

Таким образом, каждой паре чисел $(\varphi; r)$, $r\geqslant 0$, сопоставлена одна точка плоскости. Каждая точка плоскости, отличная от O, оказывается сопоставленной множеству пар $(\varphi+2\pi n;\ r)$, где $n\in\mathbb{Z}$, $r>0$. Эти пары чисел называют *полярными координатами точки*.

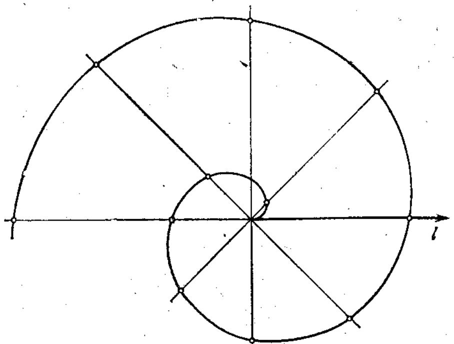


Рис. 53.

Пусть дана функция $r=f(\varphi)$, $\varphi\in\Phi$, причем $f(\varphi)\geqslant 0$. Графиком этой функции в полярных координатах называют множество всех точек плоскости с полярными координатами $(\varphi; f(\varphi))$.

Если луч l совпадает с положительным лучом оси Ox прямоугольной системы координат xOy (рис. 52), то координаты $(x; y)$ и $(\varphi; r)$ точки связаны формулами

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi. \tag{30}$$

Пример 19. Построить график функции $r=\varphi,\ \varphi\in[0;+\infty)$ в полярных координатах.

С ростом φ растут и значения r, т. е. расстояние от точки графика до центра O. Рассчитав и отметив на плоскости несколько точек, рисуем график. Отметим, что каждый луч, составляющий с лучом l угол α $(0\leqslant\alpha<2\pi)$, пересекает график в бесконечном множестве точек вида $(\alpha+2\pi n;\ \alpha+2\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$, $n\geqslant 0$ (рис. 53).

График данной функции называют *спиралью Архимеда*. ▲

При построении графиков функций в полярных координатах иногда бывает удобно перейти к прямоугольным координатам. В свою очередь для некоторых функций их графики в прямоугольных координатах бывает проще построить, перейдя к полярным координатам.

Пример 20. Построить в полярных координатах график функции, заданной формулой

$$r=\frac{1}{\cos\varphi-\sin\varphi}. \tag{31}$$

△ Областью определения этой функции являются все те значения φ, для которых

$$\cos\varphi-\sin\varphi>0. \tag{32}$$

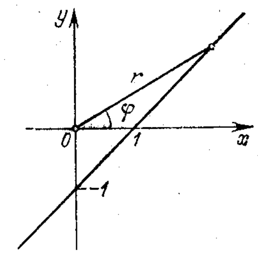


Рис. 54.

Функция периодична с периодом 2π, поэтому достаточно рассмотреть лишь значения φ из промежутка $(-3\pi/2;\ \pi/2)$, удовлетворяющие неравенству (32), т. е. $\varphi\in(-3\pi/4;\ \pi/4)$. Для таких φ имеем $r\cos\varphi-r\sin\varphi=1$, или, переходя к прямоугольным координатам согласно (30), $x-y=1$, т. е. $y=x-1$. График функции $y=x-1$ есть прямая (рис. 54). Как доказано, каждая точка графика функции (31) принадлежит этой прямой. Легко показать, что верно и обратное: каждая точка прямой $y=x-1$ принадлежит графику функции (31). Значит, графиком (31) является прямая $y=x-1$. ▲

7.114. Записать в полярных координатах уравнение и построить график: 1) $x+y+1=0$. 2) $x^2+y^2=2x$. 3) $2xy=x^2-y^2$. 4) $x=y^2-\frac{1}{4}$.

7.115. Построить график функции в полярных координатах: 1) $r=1/\varphi$ (*гиперболическая спираль*). 2) $r=e^{\varphi}$ (*логарифмическая спираль*). 3) $r=8\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)$. 4) $r=\frac{1}{1-\sin\varphi}$.

7.116. Построить график уравнения, перейдя к полярным координатам:
1) $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$ (*лемниската Бернулли*).
2) $y^2(1-x)=x^3$ (*циссоида*).

Найти область определения функции (7.117—7.120):

7.117. 1) $y=\sqrt{\frac{x}{6-x}}$. 2) $y=\sqrt{3-5x-2x^2}$.

3) $y=\sqrt[3]{\frac{x}{1-|x|}}$. 4) $y=\sqrt{x^2-|x|-2}$.

5) $y=\sqrt[4]{3+x}+\sqrt[4]{3-x}$. 6) $y=(8-2x-x^2)^{-3/2}$.

7.118. 1) $y=\lg(x^2+1)$. 2) $y=\sqrt[3]{\frac{x+2}{\lg\cos x}}$.

3) $y=\lg\frac{3x-x^2}{x-1}$. 4) $y=\sqrt{\log_3\frac{2x-3}{x-1}}$.

5) $y=\frac{\sqrt{x+5}}{\lg(9-5x)}$. 6) $y=\frac{\sqrt{x^2-4}}{\log_2(x^2+2x-3)}$.

7) $y=\log_{x+1}(x^2-3x+2)$.

8) $y=\log_x\log_{0,5}\left(\frac{4}{3}-2^{x-1}\right)$. 9) $y=\lg\left(1{,}25^{1-x^2}-0{,}4096^{1+x}\right)$.

10) $y=\ln(1-\lg(x^2-5x+16))$.

7.119. 1) $y=\frac{\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$. 2) $y=\sqrt{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}}$.

3) $y=\lg(16-x^2)+\operatorname{ctg}x$.

7.120. 1) $y=\arccos(0{,}5x-1)$. 2) $y=\arccos x-\arcsin(3-x)$.

3) $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2-9}$. 4) $y=\arcsin\frac{x^2-1}{x}$.

5) $y=\sqrt{\arcsin x-\arccos x}$. 6) $y=\arcsin(2\cos x)$.

7) $y=\operatorname{tg}(2\arccos x)$. 8) $y=\lg(1-2\operatorname{arcctg}x)$.

9) $y=\frac{\arcsin(0{,}5x-1)}{\sqrt{x^2-3x+1}}$. 10) $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{\arcsin(2-x)}$.

11) $y=\frac{\sqrt{\cos x-\frac{1}{2}}}{\sqrt{6-35x-6x^2}}$. 12) $y=\frac{\log_{2x}3}{\arccos(2x-1)}$.

Найти множество значений функции (7.121—7.122):

7.121. 1) $y=\frac{2x}{x^2+9}$. 2) $y=\frac{3-x^2}{3+x^2}$.

3) $y=\sqrt{x^2+2x+2}$. 4) $y=\sqrt{8-2x-x^2}$.

5) $y=\sqrt{2x-1-x^2}$. 6) $y=2^{x^2+4x-5}$.

7) $y=\log_3(5+4x-x^2)$.

8) $y=\log_{x^2}x$. 9) $y=\sqrt{2\log_2 x-\log_2^2 x}$.

7.122. 1) $y=\sin x-5\cos x$. 2) $y=1-2|\sin 2x|$.

3) $y=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$. 4) $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$.

5) $y=\sqrt{\lg\sin x}$. 6) $y=\cos^2 x-\sin x$.

7) $y=\log_2(\cos x+\sin^2 x)$. 8) $y=\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)$.

9) $y=\operatorname{arcctg}(\sin x)$.

7.123. 1) Доказать, что для любого $x\in\mathbb{R}$:

а) $E(x+1)=E(x)+1$;

б) $E(x+n)=E(x)+n$, $n\in\mathbb{Z}$.

2) Найти множество значений функции $x-E(x-2)$.

7.124. Пусть $f(x)=x+6$, $g(x)=6/(x+1)$. Найти все значения x, для которых:

1) $|f(x)+g(x)|=f(x)+g(x)$.
2) $|f(x)+g(x)|=f(x)-g(x)$.
3) $|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)|$.
4) $|f(x)+g(x)|=|f(x)|-|g(x)|$.

7.125. Используя арифметические операции и композиции функций, выразить данную функцию через основные элементарные функции:

1) $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}$. 2) $y=\left(\frac{x}{x-1}\right)^2$.

3) $y=\frac{1}{2^{\sqrt{x}}}$. 4) $y=\ln^2(1+e^x)$.

5) $y=\cos\lg x^2$. 6) $y=\sqrt{\sin(\operatorname{arcctg}x^3)}$.

7.126. Для функции $f(x)=(x^3-1)/x^2$: а) найти все значения a, для которых уравнение $f(x)=f(a)$ имеет единственное решение; б) найти наибольшее значение b такое, что для любого $a\in(-\infty;b)$ уравнение $f(x)=f(a)$ имеет на интервале $(-\infty;b)$ единственное решение.

7.127. При каких значениях a область определения функции f содержит область значений функции g, если:

1) $f(x)=\sqrt{\frac{2a+x}{a-x}}$; $g(x)=\frac{1}{x^2+2x+4a-2}$.

2) $f(x)=\lg(x^2+a)$; $g(x)=\frac{x^2+x-a}{x}$.

3) $f(x)=\arcsin(2^x-a)$; $g(x)=\log_2\left(2a+\frac{1}{2}-a\cdot 2^x\right)$?

7.128. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD=2$, $BC=1$ и высотой $h=1$ проведена прямая, перпендикулярная основанию AD и пересекающая его в точке M. Найти зависимость площади S отсеченной части с вершиной A от расстояния $x=AM$.

7.129. Около сферы радиуса r описан конус. Найти зависимость объема V этого конуса от его высоты; указать область определения получившейся функции.

7.130. Рассматриваются сечения правильного тетраэдра $ABCD$, параллельные ребру AB и высоте DO тетраэдра. Найти зависимость площади S сечения от расстояния x между плоскостью сечения и ребром AB, если высота грани тетраэдра равна b. Найти наибольшее значение S.

7.131. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен R. Найти зависимость радиуса вписанной окружности от угла α при вершине треугольника. Найти наибольшее значение этого радиуса.

7.132. На бесконечную нить с началом O равномерно на расстоянии l друг от друга нанизаны бусинки, первая из них находится в точке O. Нить однородна с линейной плотностью ρ, масса каждой бусинки равна m. Найти зависимость массы участка OM нити от длины $x = OM$.

7.133. Два луча, угол между которыми равен 60°, имеют общее начало. Из этого начала по одному из лучей вылетела частица со скоростью v а через час по другому лучу — вторая частица со скоростью $3v$. Найти зависимость расстояния между частицами от времени движения первой частицы. На какое наименьшее расстояние сблизятся частицы после вылета второй из них?

7.134. Функция $f(a)$ определена для всех $a \in \mathbb{R}$, при которых уравнение

$$(a^2 - 4a + 9)\,|x - 1| = (9 - a^2)\,|x|$$

имеет решение. Значение $f(a)$ равно наибольшему при данном a корню этого уравнения (если корень один, то $f(a)$ равно этому корню). Найти: 1) область определения функции $f(a)$; 2) $\min f(a)$.

7.135. Область определения функции содержит m элементов, а область значений — n элементов. Доказать, что 1) $n \leqslant m$; 2) для того чтобы функция была взаимно однозначной, необходимо и достаточно, чтобы $n = m$.

7.136. Найти число всех

1) функций, определенных на множестве D из m элементов, со значениями из множества E из n элементов;

2) взаимно однозначных функций, область определения и множество значений которых содержат по n элементов.

7.137. Область определения функции f — счетное множество.

1) Доказать, что если функция f взаимно однозначна, то и множество ее значений счетно.

2) Привести пример не взаимно однозначной функции f, множество значений которой также счетно.

7.138. Какие из заданных функций обратимы:

1) $y = 2 + x - x^2,\quad x \in [0{,}5; +\infty)$.

2) $y = x^3 - x,\quad x \in \mathbb{R}$.

3) $y = x^4 - 2x^2 - 8,\quad x \in [0; 2]$.

4) $y = -x|x| - 2x + 8,\quad x \in \mathbb{R}$.

5) $y = 1 - \sin x,\quad x \in [0; \pi]$.

6) $y = \operatorname{tg} x,\quad x \in (0; \pi),\ x \neq \pi/2$.

7) $y = 9^x - 3^x,\quad x \in \mathbb{R}$.

8) $y = \arccos(|x| - 1),\quad x \in [-1; 2]$.

9) $y = \operatorname{arcctg}(x|x|),\quad x \in \mathbb{R}$?

7.139. Доказать, что функции f и g взаимно обратны:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$; $g(x) = \dfrac{2x+1}{x}$.

2) $f(x) = x^2 + 1,\ x \in (-\infty; 0]$; $g(x) = -\sqrt{x-1},\ x \in [1; +\infty)$.

3) $f(x) = -e^{(1-x^2)/2},\ x \in [0; +\infty)$;

$g(x) = \sqrt{1 - 2\ln(-x)},\ x \in [-\sqrt{e}; 0)$.

4) $f(x) = \ln \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1},\quad x \in (0; +\infty)$; $\quad g(x) = f(x)$.

5) $f(x) = \sin x,\ x \in [\pi/2; 3\pi/2]$;

$g(x) = \pi - \arcsin x,\ x \in [-1; 1]$.

6) $f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in [-\pi; 0],\ x \neq -\pi/2$;

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x - \pi, & x \geqslant 0, \\ \operatorname{arctg} x, & x < 0. \end{cases}$$

Функции, обратные к заданным, выразить через элементарные и построить их графики (**7.140—7.142**):

7.140. 1) $y = \sqrt[4]{x^3},\quad x \in [0; +\infty)$.

2) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1},\ x \in (-\infty; 0],\ x \neq -1$.

3) $y = x|x| + 2x,\ x \in \mathbb{R}$.

4) $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 5x},\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ x \neq 5$.

5) $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x},\ x \in [1; +\infty)$.

6) $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x},\ x \in (0; 1]$.

7) $y = x - \sqrt{x^2 - 1},\ x \in (-\infty; -1]$.

8) $y = \sqrt{x^2 - 1} + x,\ x \in (-\infty; -1]$.

7.141. 1) $y = 2^{x^2 - 2x},\ x \in (-\infty; 1]$.

2) $y = 1 - e^{(1-x)/(1+x)},\ x \in \mathbb{R},\ x \neq -1$.

3) $y=\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

4) $y=\frac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}+1$, $x\in\mathbb{R}$.

5) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$, $x\in\mathbb{R}$, $a>0$, $a\neq 1$.

7.142. 1) $y=\sin x$, $x\in[5\pi/2;\ 7\pi/2]$.

2) $y=2\cos(x/2)$, $x\in[2\pi;\ 4\pi]$.

3) $y=\operatorname{ctg} x$, $x\in(-\pi/2;\ \pi/2)$, $x\neq 0$.

4) $y=\sin^2(x/2)$, $x\in[2\pi;\ 3\pi]$.

5) $y=1/\cos x$, $x\in[-\pi;\ 0]$, $x\neq-\pi/2$.

6) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0;\ 1]$.

7) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1;\ 0]$.

8) $y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 1$.

7.143. 1) Доказать, что функция $y=x^3+\frac{5}{9}x$ обратима. Построить в одной системе координат графики данной и обратной функций. Найти точки пересечения этих графиков.

2) Доказать, что если n — нечетное натуральное число, $p>0$, $q\in\mathbb{R}$, то функция $y=x^n+px+q$ обратима.

7.144. Доказать, что функция

$$y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}$$

имеет обратную, и найти ее.

7.145. Пусть $y=\operatorname{arch} x$, $x\geqslant 1$, — обратная функция для функции $y=\operatorname{ch} x$, $x\geqslant 0$. Доказать, что функция

$$y=\begin{cases} 2\operatorname{ch}\left(\frac{1}{3}\operatorname{arch} x\right), & x\geqslant 1,\\ 2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos x\right), & -1\leqslant x<1,\end{cases}$$

является обратной для функции $y=(x^3-3x)/2$, $x\geqslant 1$.

7.146. Найти функцию, обратную для функции

$$y=(x^3+3x)/2,\quad x\in\mathbb{R}.$$

7.147. Найти наибольший промежуток вида $[a;\ +\infty)$, на котором функция

$$y=1+2\sin\frac{x-1}{x+1}$$

обратима, и найти на этом промежутке обратную функцию.

7.148. 1) Доказать, что функция $y=\frac{2x+3}{x-2}$ совпадает со своей обратной.

2) При каких условиях на a, b, c, d функция $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ обратна самой себе?

7.149. Доказать, что график функции $y=\log_a\frac{a^x+\alpha}{\beta a^x-1}$, $\alpha\beta\neq-1$, симметричен относительно прямой $y=x$.

7.150. Пусть a и b — такие числа, что область определения функции $y=\ln(a+be^x)$ — непустое множество. При каких a и b эта функция совпадает со своей обратной?

7.151. При каких a функция

$$y=(a-1)|x-1|+(a+1)|x+1|+x$$

обратима?

7.152. При каких a, b и c функция

$$y=\operatorname{arctg}(a+b\operatorname{tg} x)+c,\qquad x\in(\pi/2;\ 3\pi/2),$$

совпадает со своей обратной?

7.153. При каких λ обратима функция

$$y=(\arcsin x)^2+\lambda\arccos x,\qquad x\in[-1;\ 1]?$$

Задать обратную функцию формулой.

7.154. Доказать, что:

1) $\cos(2\arccos x)=2x^2-1$, $x\in[-1;\ 1]$.

2) $\sin(3\arcsin x)=3x-4x^3$, $x\in[-1;\ 1]$.

3) $\operatorname{tg}(3\operatorname{arctg} x)=\frac{x(3-x^2)}{1-3x^2}$, $x\in\mathbb{R}$, $x^2\neq 1/3$.

4) $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$, $x\in[-1/2;\ 1/2]$.

5) $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=2|\operatorname{arctg} x|$, $x\in\mathbb{R}$.

7.155. Найти все значения x, для которых верны равенства:

1) $\arccos\sqrt{1-x^2}=\arcsin x$. 2) $\arccos\sqrt{1-x^2}=-\arcsin x$.

3) $\operatorname{arctg} x=\operatorname{arcctg}(1/x)$. 4) $\operatorname{arctg} x=\operatorname{arcctg}(1/x)-\pi$.

5) $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}=\operatorname{arctg} x+\frac{\pi}{4}$.

6) $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}=\operatorname{arctg} x-\frac{3\pi}{4}$.

Какие из функций являются четными, какие нечетными, какие не являются ни четными, ни нечетными (**7.156—7.159**):

7.156. 1) $y=2x^2-1$. 2) $y=-5x^3$. 3) $y=1-x^3$.

4) $y=x^5-\frac{1}{x}$. 5) $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$.

6) $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}$. 7) $y=6x^2+8+(x-2)^3$.

8) $y=\left(1-\frac{1+x^2}{1+x}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{1-x}\right)$?

7.157. 1) $y=\frac{2^x+2^{-x}}{3^x-3^{-x}}$. 2) $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

3) $y=\operatorname{ch}(x+\operatorname{sh}x)$. 4) $y=\operatorname{th}(x+\operatorname{ch}x)$.

5) $y=\ln^2(\sqrt{x^2+1}+x)$.

6) $y=\cos x\operatorname{sh}x+\sin x\operatorname{ch}x$. 7) $y=\operatorname{arsh}(\operatorname{sh}x)$.

8) $y=\operatorname{th}(\operatorname{arth}x)$. 9) $y=\left|\frac{10^x+1}{10^x-1}\right|$?

7.158. 1) $y=\frac{\sin x}{x}$. 2) $y=\sin x+2x^3$.

3) $y=\operatorname{tg}x-\cos x$. 4) $y=\frac{|\sin x|}{1-\cos x}$. 5) $y=(x-1)^2\sin^2 x$.

6) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

7) $y=\sin\operatorname{tg}x$. 8) $y=\operatorname{ctg}\cos x$?

7.159. 1) $y=\arcsin x^2$. 2) $y=2\arccos(-x)$.

3) $y=\arccos|x|$. 4) $y=\arccos x-\frac{\pi}{2}$.

5) $y=\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}x)$. 6) $y=\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}x)$.

7) $y=\arcsin(\arccos x)$. 8) $y=\sin(2x-\operatorname{arcctg}x)$?

7.160. Представить функцию f в виде суммы четной и нечетной функций:

1) $f(x)=(x+1)^3$. 2) $f(x)=\frac{x-3}{x^4}$.

3) $f(x)=\sin(x+1)$. 4) $f(x)=\frac{1}{x-1}$, $|x|<1$.

7.161. Доказать, что всякая функция, определенная на симметричном относительно начала координат множестве, представима в виде суммы четной и нечетной функций.

7.162. Представить функцию в виде суммы четной и нечетной функций, если:

1) $y=|x-1|$. 2) $y=a^x$. 3) $y=\ln(1+e^x)$.

4) $y=\sin(x^3+x^2)$. 5) $y=\operatorname{tg}(x-5)$. 6) $y=\arccos x$.

7) $y=-\operatorname{arcctg}x$. 8) $y=\operatorname{arctg}(1-x)$.

7.163. Функция f — ни четная, ни нечетная, функция g — четная, функция h — нечетная. Может ли сумма:

1) $f+g$ быть: а) четной, б) нечетной.

2) $f+h$ быть: а) четной, б) нечетной?

7.164. Функция f — ни четная, ни нечетная, функция g — четная, функция h — нечетная, и имеет смысл композиция любых двух из этих функций. Указать все композиции, являющиеся: 1) четными, 2) нечетными функциями.

7.165. 1) Доказать, что функция, обратная к нечетной, — нечетная функция.

2) Может ли функция, обратная к данной, быть четной?

Доказать ограниченность функции (**7.166—7.168**):

7.166. 1) $y=x-\sqrt{x^2-1}$, $x\in[1;+\infty)$.

2) $y=\sqrt[3]{x^3+8}-x$. 3) $y=\sqrt[4]{x^4+2}-|x|$.

4) $y=\frac{|x^2-1|}{x^4-1}$. 5) $y=\frac{x-4}{2-\sqrt{x}}$, $x\in[0;4)$.

6) $y=\frac{x+1}{x+\sqrt[3]{x^4}}$, $x\in(-\infty;-1)$.

7) $y=\frac{x^{7/3}-x^2}{(x-1)\sqrt[3]{2+x^4}}$.

7.167. 1) $y=2^{\sin x}$. 2) $y=2^{1/x}$, $x\in(-\infty;0)$.

3) $y=\frac{\operatorname{ch}x}{1+3^{|x|}}$. 4) $y=\frac{1}{x^2+\ln^2 x}$.

5) $y=\log_x(1+x)$, $x\in[2;+\infty)$.

7.168. 1) $y=\operatorname{tg}x\cos 3x$. 2) $y=\frac{\cos 2x}{\operatorname{ctg}x-1}$. 3) $y=\frac{2\cos x}{\pi-2x}$.

4) $y=\operatorname{ctg}x-\frac{1}{\sin x}$, $|x|\leqslant\frac{\pi}{2}$, $x\neq 0$.

7.169. Доказать неограниченность функции:

1) $y=x^3-3x$. 2) $y=x^3/(x^2-1)$, $x\in(-\infty;-2]$.

3) $y=\frac{3^x}{x}$, $x\in(-\infty;0)$. 4) $y=\frac{2^x}{x}$, $x\in[1;+\infty)$.

5) $y=2^{1/x}$, $x\in(0;+\infty)$. 6) $y=\log_x(1+x)$, $x\in(1;2]$.

7) $y=x\sin x$. 8) $y=(\cos x)/x$.

9) $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$.

7.170. Пусть $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены степени m и n, $m\leqslant n$, и $Q_n(x)\neq 0$ для любого $x\in\mathbb{R}$. Доказать, что функция

$$y=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

ограничена.

7.171. Доказать, что любой многочлен степени не ниже первой — неограниченная функция.

7.172. Привести пример функции, определенной на отрезке и неограниченной на нем.

7.173. Привести пример функции, определенной на отрезке и неограниченной в окрестности каждой точки этого отрезка.

7.174. Исследовать на монотонность и построить график функции:

1) $y=\frac{x-1}{|x|+1}$. 2) $y=\frac{x+2}{|x|-3}$. 3) $y=\frac{1-|x-1|}{1+|x|}$.

4) $y=\frac{|x-1|-|x+1|}{|x-1|+|x+1|}$. 5) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$. 6) $y=\frac{x^2}{x^2-1}$.

Исследовать на монотонность функции (7.175—7.176):

7.175. 1) $y=\sqrt{x^2-1}$. 2) $y=\sqrt{2x-x^2}$. 3) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-5}-2}$.

4) $y=\sqrt[3]{1-x^2}$. 5) $y=1-\sqrt[5]{x^3-1}$.

6) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-8}}$. 7) $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}$.

8) $y=\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}$. 9) $y=x-\sqrt{x^2-1}$.

7.176. 1) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$, $x\in[0;\ \pi]$.

2) $y=\frac{2-\sin x}{2+\sin x}$, $x\in[0;\ 2\pi]$.

3) $y=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$, $x\in(0;\ \pi)$, $x\neq\pi/2$.

4) $y=0{,}3^{(x^2-1)/x}$. 5) $y=\log_2(8x-x^2)$.

6) $y=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$. 7) $y=2\cdot 3^{1-x}-9^{-x}$.

8) $y=2\log_2(1+x^2)-\log_2^2(1+x^2)$.

7.177. Доказать, что функция

$$y=x-\varepsilon\sin x,\quad \text{где}\quad 0<\varepsilon\leqslant 1,$$

строго возрастает.

7.178. Доказать, что функция $y=x^3+x^2$: 1) возрастает на $(0;+\infty)$; 2) немонотонна на $[-1;0]$.

7.179. Доказать, что функция

$$y=\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin(x+\beta)},\quad \alpha,\ \beta\in\mathbb{R},$$

монотонна на любом интервале, содержащемся в ее области определения.

7.180. Функция $y=f(x)$ монотонна. Доказать, что: 1) функция $y=-f(x)$ монотонна; 2) если $f(x)>0$ для любого $x\in D(f)$, то функция $y=1/f(x)$ монотонна.

7.181. Доказать, что сумма возрастающих (убывающих) на интервале $(a;\ b)$ функций — возрастает (убывает) на $(a;\ b)$.

7.182. Доказать, что композиция монотонных функций является монотонной функцией.

7.183. 1) Доказать, что функция, обратная к возрастающей функции, является возрастающей.

2) Доказать, что функция, обратная к убывающей функции, является убывающей функцией.

7.184. Сформулировать и записать, используя символы $\exists$, $\forall$, утверждение: 1) функция не является возрастающей; 2) функция не является убывающей; 3) функция не является монотонной.

7.185. Привести пример двух возрастающих на интервале $(a;\ b)$ функций, произведение которых 1) возрастающая на $(a;\ b)$ функция; 2) убывающая на $(a;\ b)$ функция; 3) немонотонная на $(a;\ b)$ функция.

7.186. Привести пример функции, определенной на $\mathbb{R}$, которая не является монотонной ни на одном интервале.

7.187. Функцию $f(x)$, $x\in(a;\ b)$, называют возрастающей в точке $x_0\in(a;\ b)$, если существует $\delta>0$ такое, что $f(x)\leqslant f(x_0)$ для всех $x\in(x_0-\delta, x_0)$ и $f(x)\geqslant f(x_0)$ для всех $x\in(x_0, x_0+\delta)$.

Является ли монотонно возрастающей на $(a;\ b)$ функция, возрастающая в каждой точке интервала $(a;\ b)$?

7.188. Пусть x_0 — решение уравнения

$$a^x+b^x=c,$$

и пусть либо $0<a<1$ и $0<b<1$, либо $a>1$ и $b>1$. Доказать, что других решений это уравнение не имеет.

7.189. Пусть f, g и $f-g$ — возрастающие функции и $f(x_0)=g(x_0)$. Доказать, что система

$$\begin{cases} f(x)=g(y),\\ f(y)=g(z),\\ f(z)=g(x)\end{cases}$$

имеет единственное решение.

7.190. Пусть функции f и g определены на множестве X.

1) Пусть $f(x)\geqslant g(x)$ для любого $x\in X$. Доказать, что

$$\sup_X f\geqslant\sup_X g,\quad \inf_X f\geqslant\inf_X g.$$

2) Пусть $\sup\limits_X f=+\infty$, $\inf\limits_X g\neq-\infty$. Доказать, что

$$\sup_X(f+g)=+\infty.$$

3) Пусть $\inf\limits_X f=-\infty$, $\sup\limits_X g\neq+\infty$. Доказать, что

$$\inf_X(f+g)=-\infty.$$

7.191. Пусть функция f — нечетная. Доказать, что

$$\inf_{x<0} f=-\sup_{x>0} f,\quad \sup_{x<0} f=-\inf_{x>0} f.$$

7.192. Сформулировать и записать, используя символы $\exists$, $\forall$, утверждение: 1) число a не является верхней гранью функции; 2) число a не является нижней гранью функции.

7.193. Найти $\min\limits_X f$, если:

1) $f(x) = x + \frac{3}{x}$, $X = (0;\ +\infty)$.

2) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, $X = (1;\ +\infty)$.

3) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{ctg}^2 x + 1$, $X = \left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right]$.

4) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x$, $X = (0;\ \pi/2)$.

7.194. Найти:

1) $\min\left(x - 2\sqrt{x}\right)$. 2) $\max\limits_{(0;\ \pi/2)} (3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x)$.

7.195. Найти $\max\limits_X f$, если:

1) $f(x) = 9x^5 + \frac{1}{x^5}$, $X = (-\infty;\ 0)$.

2) $f(x) = \frac{x-2}{x^2}$, $X = (0;\ +\infty)$.

3) $f(x) = x\sqrt[4]{1 - x^4}$, $X = [-1;\ 1]$.

4) $f(x) = \log_x (x+1) + \log_{x+1} x$, $X = (0;\ 1)$.

7.196. Найти $\max f$, $\min f$, если:

1) $f(x) = e^{-|x|} - e^{-2|x|}$. 2) $f(x) = \cos^2 x + \cos x + 3$.

3) $f(x) = \sin^2 x - 4 \sin x + 3$. 4) $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$.

5) $f(x) = \sin x \sin 3x$. 6) $f(x) = \cos(1 + \sin x)$.

7) $f(x) = \sin(2\cos x - 1)$. 8) $f(x) = x^2/(x^4 + 1)$.

9) $f(x) = (x+1)/(x^2+3)$.

7.197. Два тела двигаются по прямым по направлению к их точке пересечения A. Скорости тел постоянны и равны v_1 и v_2, в начальный момент тела находятся от точки A на расстояниях a и b соответственно. Угол между направлениями движения тел равен α. Найти наименьшее расстояние между телами.

7.198. В треугольник вписан прямоугольник так, что одна его сторона лежит на одной стороне треугольника и две вершины — на двух других сторонах треугольника. Найти наибольшую возможную площадь прямоугольника, если площадь треугольника равна S.

7.199. Угол в осевом сечении конуса равен 2α, радиус основания — R. Найти наибольшее значение площади сечения, проведенного через вершину конуса, если 1) $2\alpha < \pi/2$; 2) $2\alpha > \pi/2$.

7.200. Найти расстояние от параболы $y = x^2/4$ до прямой $y = -x - 2$.

7.201. Найти $\max\limits_X f$, $\min\limits_X f$, если:

1) $f(x) = \log_{1/3}(x^2 + x - 2)$, $X = [3;\ 6]$.

2) $f(x) = \log_9 (8x - x^2 - 7)$, $X = [2;\ 5]$.

3) $f(x) = \cos^2 x + \sin x$, $X = [\pi/3;\ \pi]$.

4) $f(x) = (x^2 + 4)/x$, $X = [1;\ 3]$.

5) $f(x) = \frac{x^2+9}{x+4}$, $X = [-14;\ -7]$.

6) $f(x) = \frac{2x+5}{x^2-4}$, $X = [-1{,}5;\ 1{,}5]$.

7.202. Сформулировать и записать, используя символы $\exists$, $\forall$, утверждение: 1) значение $f(x_0)$, $x_0 \in X$, не является наибольшим; 2) значение $f(x_0)$, $x_0 \in X$, не является наименьшим значением функции на множестве X.

7.203. Найти $\min\left(x - \sqrt{x+3}\right)$.

7.204. Найти $\max f$, $\min f$, если:

1) $f(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$. 2) $f(x) = \sqrt{6-x} + \sqrt{x-2}$.

7.205. Найти радиус основания и высоту цилиндра, вписанного в сферу радиуса R, если площадь боковой поверхности цилиндра имеет наибольшее из возможных значение.

7.206. Найти радиус основания и высоту конуса, описанного около сферы, если объем конуса имеет наименьшее значение из возможных, а радиус сферы равен R.

7.207. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Концы отрезка, параллельного плоскости ABB_1A_1, лежат на диагоналях BC_1 и CA_1 боковых граней. Найти наименьшую длину такого отрезка.

7.208. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точки E и F — середины ребер BB_1 и CC_1 соответственно. Вершинами треугольника служат точки пересечения плоскости, параллельной основаниям куба, с прямыми AC_1, CE, DF. Найти наименьшее значение площади такого треугольника.

7.209. Найти наименьшее значение суммы $x^2 + y^2$, если $x + 2y = 1$.

7.210. Найти наибольшее значение произведения xy, если:

1) $x + 2y = 1$. 2) $x^2 + 3y^2 = 1$.

7.211. Найти $\min f$, если:

1) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

2) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-5)(x-6)$.

3) $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, где $b - a = d - c$.

4) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$. 5) $f(x) = \left(\frac{2 + \cos x}{\sin x}\right)^2$.

7.212. Найти

$$\min_{[0;\ 1)} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{1+x}} + \frac{1}{\sqrt[n]{1-x}}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

7.213. Доказать:

1) Графики функций $y=f(x)$ и $y=f(-x)$ симметричны относительно оси ординат.

2) Графики функций $y=f(x)$ и $y=-f(x)$ симметричны относительно оси абсцисс.

3) Графики функций $y=f(x)$ и $y=-f(-x)$ симметричны относительно начала координат.

4) Графики функций $y=f(x)$ и $y=f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y=x$.

7.214. График функции g симметричен графику функции f относительно прямой $x=x_0$. Выразить значения функции g через значения функции f.

7.215. График функции g симметричен графику функции f относительно прямой $y=y_0$. Выразить значения функции g через значения функции f.

7.216. График функции g симметричен графику функции f относительно точки $(x_0; y_0)$. Выразить значения функции g через значения функции f.

7.217. По известному графику функции $y=x^2$ построить график функции и указать множества, на которых функция монотонна:

1) $y=2x^2-8x+4$. 2) $y=3x-4-2x^2$.
3) $y=x^2-3|x|-7$. 4) $y=|5-4|x|-x^2|$.

7.218. Построить график функции **(7.218—7.225)**:

1) $y=|x-1|+|x-2|-|x-3|$.
2) $y=|x-2|+|x|+|x+2|-3$.
3) $y=|x-2|x-1||$. 4) $y=|2x-|x|-1|$.
5) $y=\frac{1}{2a}(|x+a|-|x-a|)$, $a>0$.
6) $y=\operatorname{sign} x-\frac{1}{2a}(|x+a|-|x-a|)$, $a>0$.
7) $y=\left|\frac{3+2|x|}{3-2|x|}\right|$. 8) $y=\frac{|x+2|+|x-1|}{|x-2|+|x+1|}$.

7.219. 1) $y=2(x+2)^3-3$. 2) $y=1{,}2+\frac{1}{4}(1-x)^3$.
3) $y=x^3+x$. 4) $y=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}x-x^3$.
5) $y=0{,}1(1-x)^4-1$. 6) $y=2-\frac{1}{8}(x+2)^4$.

7.220. 1) $y=\sqrt{1-2x}-2$. 2) $y=3-0{,}5\sqrt{3x-2}$.
3) $y=2\sqrt[3]{3x-6}+1$. 4) $y=2+\sqrt[3]{1-\frac{1}{3}x}$.
5) $y=(2x+1)^{1/4}$. 6) $y=3-\frac{1}{2}(8x-1)^{2/3}$.
7) $y=3-\frac{1}{2}x^{5/3}$. 8) $y=(x-1)^{7/2}-1$.

7.221. 1) $y=\sqrt{|3-x|}$. 2) $y=\sqrt{9-4|x|}$.
3) $y=\sqrt[3]{8-|x-1|}$. 4) $y=\sqrt{|x+1|^3}-1$.

7.222. 1) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x}}$. 2) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{2x+8}}$. 3) $y=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$.
4) $y=\frac{2}{2\sqrt{x}+1}$. 5) $y=\frac{3}{4-2\sqrt[3]{x+1}}$.

7.223. 1) $y=\frac{x^2+4}{x}$. 2) $y=\frac{x^2-4}{2x}$.
3) $y=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$. 4) $y=\frac{2x}{4-x^2}$. 5) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$.
6) $y=\frac{1}{x^2+2x+3}$. 7) $y=\frac{1}{x^2-9}$. 8) $y=\frac{1}{x^2-2x-8}$.

7.224. 1) $y=\frac{x}{x^2+1}$. 2) $y=\frac{x}{x^2-1}$.
3) $y=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}$. 4) $y=\frac{2x^2-4x+6}{x^2-2x+2}$.

7.225. 1) $y=\sqrt{5+4x-x^2}$. 2) $y=\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)\operatorname{sign} x$.
3) $y=2-\sqrt{8-2x-x^2}$. 4) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
5) $y=\frac{\operatorname{sign}(x-1)}{\sqrt{3x-x^2}}$. 6) $y=x\sqrt{100-x^2}$. 7) $y=x+\sqrt{1-x^2}$.

7.226. При каком соотношении между a, b, c, d график функции $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ получается сдвигом графика функции:

1) $y=\frac{1}{x}$. 2) $y=\frac{x-x_1}{x-x_2}$, $x_1\neq x_2$?

7.227. Найти центр симметрии графика функции:

1) $y=\frac{x}{2x-1}$. 2) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, $c\neq 0$.
3) $y=x^3-6x^2$. 4) $y=ax^3+bx^2+cx+d$, $a\neq 0$.

7.228. Доказать, что графики функций $y=x^3-3a^2x$ и $y=x^3-3ax^2$ получаются один из другого сдвигом.

7.229. Доказать, что функция $y=x^3-3a^2x$ возрастает на промежутках $(-\infty;-a]$ и $[a;+\infty)$ и убывает на $[-a;a]$ $(a>0)$. Построить график этой функции при $a=2$.

7.230. Доказать, что функция $y=x^3-3bx^2$ $(b>0)$ возрастает на $(-\infty;0]$ и $[2b;+\infty)$ и убывает на $[0;2b]$. Построить график этой функции при $b=1$.

Построить график функции **(7.231—7.235)**:

7.231. 1) $y=x^3-3x^2+2x$. 2) $y=x^3+6x^2$.

7.232. 1) $y=E(|x|)$. 2) $y=E(x^2-1)$.
3) $y=E\left(\frac{1}{x}\right)$. 4) $y=(E(x))^2-2E(x)-1$.
5) $y=|x-E(x)-0{,}5|$. 6) $y=(x-E(x))^2$.

7. $y=\frac{1}{x}\cdot E(x)$. 8) $y=(-1)^{E(1/x)}$.

7.233. 1) $y=1-3^{0,5x-1}$. 2) $y=\frac{1}{3}2^{1-3x}+2$.

3) $y=\log_3(0,5x+2)$. 4) $y=-\frac{4}{3}\log_4(1-x)$.

5) $y=3^{2-|x+3|}$. 6) $y=|0,5^x-2|$.

7) $y=\lg(3-x)^2$. 8) $y=\log_{0,5}|1-2x|+2$.

9) $y=|\log_2|x||$.

7.234. 1) $y=2^{|\log_2 x|}$. 2) $y=2^{1/x}$.

3) $y=3^{(1-x)/(1+x)}$. 4) $y=0,5^{x^2-x}$.

5) $y=\log_{1/3}(x^2-8x)+2$. 6) $y=\lg\frac{1-2x}{x+3}$.

7) $y=e^{1/(x^2-1)}$. 8) $y=\frac{1+3^{-x}}{3+3^{x+1}}$.

9) $y=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$.

7.235. 1) $y=E(2^x)$. 2) $y=2^{E(x)}$.

3) $y=2^{x-E(x)}$. 4) $y=E(\log_2 x)$. 5) $y=\lg(x-E(x))$.

7.236. Доказать, что данная функция — периодическая, и найти ее наименьший положительный период:

1) $y=x-\alpha E(x/\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$.

2) $y=E(2x+5)-2x$.

3) $y=|\sin(\sqrt{2}x+1)|$. 4) $y=\sin 2x+\sin^2 3x$.

5) $y=\sin 4x+5\cos 6x$. 6) $y=3\sin 4x+2\operatorname{tg}5x$.

7) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$. 8) $y=\operatorname{tg}(x+\sin x)$.

9) $y=\sin(\cos x)$. 10) $y=\cos(\sin x)$.

11) $y=\sin^3 x+\cos^3 x$.

7.237. Доказать, что данная функция непериодична:

1) $y=\sin\sqrt{|x|}$.

2) $y=\cos x+\cos x\sqrt{2}+\ldots+\cos x\sqrt{n}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$.

3) $y=\sin x+\sin\sqrt{2}x$.

7.238. Доказать, что если отношение периодов периодических функций f и g является рациональным числом, то функции $f+g$ и fg периодичны.

7.239. Найти наименьший положительный период функции:

1) $y=8\sin(9x/8)+2\cos(3x/2)$.

2) $y=\sin(3x/4)+\sin(9x/8)$.

3) $y=a\sin(p_1x/q_1)+b\cos(p_2x/q_2)$, где p_1, p_2, q_1, $q_2\in\mathbb{N}$, $p_1q_2\neq p_2q_1$.

4) $y=a\sin(p_1x/q_1)+b\sin(p_2x/q_2)$, где p_1, p_2, q_1, $q_2\in\mathbb{N}$, $p_1q_2\neq p_2q_1$.

5) $y=a\sin(p_1x/q_1)+b\operatorname{tg}(p_2x/q_2)$, где p_1, p_2, q_1, $q_2\in\mathbb{N}$, $p_1q_2\neq p_2q_1$.

7.240. При каких a и b ($ab\neq 0$) функция $y=ax-E(bx+c)$ периодична и каков ее наименьший положительный период?

7.241. Привести примеры непериодических функций f и g таких, что функции: 1) $f+g$, 2) $f\cdot g$ периодичны и имеют наименьший положительный период.

7.242. Привести примеры периодической функции f и непериодической функции g таких, что функции: 1) $f+g$, 2) $f\cdot g$ периодичны и имеют наименьший положительный период.

7.243. Существует ли функция, для которой каждое иррациональное число является периодом, а каждое рациональное — не является?

7.244. График функции $y=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, симметричен относительно каждой из прямых $x=a$ и $x=b$, $a\neq b$. Доказать, что $y=f(x)$ — периодическая функция, и найти ее период.

7.245. График функции $y=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, симметричен относительно точки $A(a;b)$ и прямой $x=c$ $(c\neq a)$. Доказать, что $f(x)$ — периодическая функция, и найти ее период.

7.246. Доказать, что функция f является периодической, если существует $T\neq 0$ такое, что для любого $x\in D(f)$ $x+T\in D(f)$, $x-T\in D(f)$ и выполнено одно из условий:

1) $f(x+T)=-f(x)$. 2) $f(x+T)=\frac{1}{f(x)}$.

3) $f(x+T)=\frac{f(x)+a}{bf(x)-1}$. 4) $f(x+T)=\frac{1}{1-f(x)}$.

Найти период функции f.

7.247. Пусть функция g обратна самой себе, и пусть определена композиция $g\circ f$. Пусть существует $T\neq 0$ такое, что для любого $x\in D(f)$ выполнены условия $x+T\in D(f)$, $x-T\in D(f)$ и $f(x+T)=g(f(x))$. Доказать, что f — периодическая функция, и найти ее период.

Построить графики функций (**7.248—7.249**):

7.248. 1) $y=2\cos(2x+1)$. 2) $y=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-1$.

3) $y=\sin x\operatorname{ctg}x$. 4) $y=\cos x+|\cos x|$.

5) $y=|\sin 2x-\cos 2x|$. 6) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

7.249. 1) $y=\frac{2}{1+2\cos x}$. 2) $y=\operatorname{ctg}^2 x$. 3) $y=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

4) $y=|\sin x\operatorname{tg}x|$. 5) $y=\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

7.250. Построить в одной системе координат графики функций:

1) $y=\sin x$ и $y=-\sqrt{1-\cos^2 x}$.

2) $y=\cos x$ и $y=1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

3) $y=\sin x$ и $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$.

4) $y=\cos 2x$ и $y=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

Построить графики функций (7.251—7.253):

7.251. 1) $y=0{,}5^{|\sin x|}$. 2) $y=2^{\operatorname{tg} x}$.

3) $y=\log_{0,5}\cos x$. 4) $y=\log_2\dfrac{1}{\sin(\pi/6)+\sin x}$.

5) $y=\log_{\cos x}\sin x$. 6) $y=1+\sqrt{\lg\cos 2\pi x}$.

7.252. 1) $y=\cos x^2$. 2) $y=\sin x^2$. 3) $y=\cos(\cos x)$.

4) $y=\sin(2\sin x)$. 5) $y=\sin(1/x)$. 6) $y=\operatorname{tg}(\pi/x^2)$.

7) $y=\sin\dfrac{\pi x}{1+x^2}$. 8) $y=\cos\log_2\dfrac{x}{2}$.

7.253. 1) $y=x+\sin x$. 2) $y=x\sin x$. 3) $y=x^2\cos x$.

4) $y=e^{-x}\sin x$. 5) $y=x\cos(1/x)$. 6) $y=(2\sin 3x)/(1+x^2)$.

7) $y=\dfrac{\cos 2x}{x^2}$. 8) $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$. 9) $y=(1+\cos x)\cos 4x$.

7.254. Построить график функции

$$f(x+2t)+f(x-2t),$$

где

$$f(x)=\begin{cases}1+\cos x, & |x|\leqslant\pi,\\ 0, & |x|>\pi,\end{cases}$$

полагая: 1) $t=0$; 2) $t=\pi/6$; 3) $t=\pi/4$; 4) $t=\pi/3$; 5) $t=\pi/2$.

Построить графики функций (7.255—7.258):

7.255. 1) $y=3\arccos(x/2)+1$. 2) $y=\operatorname{arcctg}|x|$.

3) $y=\operatorname{arcctg}|x|-\operatorname{arctg}|x|$. 4) $y=x+\operatorname{arctg} x$.

5) $y=\arcsin(1/x)$.

7.256. 1) $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ и $y=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$.

2) $y=\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ и $y=\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$.

3) $y=\arccos(\sin x)$. 4) $y=\arccos(\cos x)-x$.

5) $y=x-\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$. 6) $y=x\arcsin(\sin x)$.

7) $y=x\arccos(\cos x)$. 8) $y=\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg}(1/x)$.

9) $y=\arccos(\cos x)-\arcsin(\sin x)$.

7.257. 1) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$.

2) $y=4\arcsin\sqrt{1-x^2}$. 3) $y=\cos(2\arccos x)$.

4) $y=\sin(3\arcsin x)$. 5) $y=\operatorname{tg}(3\operatorname{arctg} x)$.

6) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$. 7) $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

7.258. 1) $y=E(\sin x)$. 2) $y=\cos x-E(\cos x)$.

3) $y=\arcsin(x-E(x))$. 4) $y=\arccos x-E(\arccos x)$.

7.259. Пусть $\max\{f(x),g(x)\}$ — наибольшее, а $\min\{f(x),g(x)\}$ — наименьшее из двух чисел $f(x)$ и $g(x)$ при $x\in D(f)\cap D(g)$. Построить график функции:

1) $y=\max\{x^2, \sqrt{|x|}\}$. 2) $y=\max\{x^3, 1/x\}$.

3) $y=\max\{\sin x, \cos x\}$. 4) $y=\min\{2^x, 9/(1+2^{-x})\}$.

5) $y=\min\{\cos x, \cos 2x\}$. 6) $y=\min\{\log_2 x, \log_x 2\}$.

7.260. Построить график функции:

1) $y=\cos(3\arccos x)$. 2) $y=\cos(4\arccos x)$.

3) $y=\sin(2\arccos x)$. 4) $y=\sin(3\arccos x)$.

7.261. Доказать, что для любого $n\in\mathbb{N}$:

1) Функция $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ совпадает на $[-1;1]$ с полиномом степени n.

2) Функция $\sin(n\arccos x)$ совпадает на $[-1;1]$ с функцией вида $\sqrt{1-x^2}\cdot Q_{n-1}(x)$, где $Q_{n-1}(x)$ — полином степени $n-1$.

7.262. Построить график уравнения:

1) $y^2=x^2+4|x|+4$. 2) $y^2+4|y+x|-4x+3=0$.

3) $y^2-(5^x-1)(y-1)=0$. 4) $|y|=\dfrac{1}{||x+1|-3|}$.

5) $\lg(xy-1)=\lg((1-x)(1-y))$.

6) $|y|=\log_{1/3}||x+2|-1|$.

7) $x^2+y^2-x-3y=0$. 8) $x^2+y^2=2(|x|+|y|)$.

7.263. Доказать, что уравнение

$$\sqrt{y^3}+xy-x\sqrt{y}-x^2=0$$

задает функцию, и построить ее график.

7.264. Доказать, что график уравнения

$$x^3+x^2y+xy^2-x-y=0$$

является объединением графиков трех функций; построить эти графики.

7.265. Построить график уравнения:

1) $|y|=\cos x$. 2) $\cos|x|+\sin|y|=0$.

3) $|\sin x|^y+|\cos x|^y=1$.

4) $|y-\sin x+1|+|y-\sin x|=1$.

7.266. Найти значения t, соответствующие точке A кривой:

1) $A(0;0)$; $x=t^2-1$, $y=t^3-t$.

2) $A(3;\ 2)$; $x=t^2+2t$, $y=t^3+t$.
3) $A(2;\ 2)$; $x=2\operatorname{tg} t$, $y=2\sin^2 t+\sin 2t$.
4) $A(-9;\ 0)$; $x=3(2\cos t-\cos 2t)$, $y=3(2\sin t-\sin 2t)$.

7.267. Какие из точек A, B принадлежат кривой:

1) $A(5;\ 1)$, $B(1;\ -1)$; $x=2+5\cos t$, $y=5\sin t-3$.
2) $A(-31;\ 3)$, $B(10;\ 8)$; $x=t^3+t$, $y=t^2+2t$?

7.268. Задать кривую уравнением и построить ее:

1) $x=6t-t^2$, $y=3t$. 2) $x=t^3+1$, $y=t^2$.
3) $x=\cos t$, $y=\sin 2t$. 4) $x=\operatorname{tg} t$, $y=\sin 2t+2\cos 2t$.
5) $x=\sin 3t$, $y=\sin t$.

7.269. Построить кривую:

1) $x=\dfrac{2+t^2}{1+t^2}$, $y=\dfrac{t^2}{1+t^2}$. 2) $x=\dfrac{1}{1-t^2}$, $y=\dfrac{t^2}{1-t^2}$.
3) $x=\dfrac{t}{1+|t|}$, $y=\dfrac{|t|}{1+t}$. 4) $x=\left|\dfrac{t}{1-t}\right|$, $y=\dfrac{t}{1-|t|}$.
5) $x=3\cos t$, $y=4\sin t$. 6) $x=t^2-2t$, $y=t^2+2t$.
7) $x=\cos t$, $y=t+2\sin t$. 8) $x=2^{t-1}$, $y=(t^3+1)/4$.

7.270. Постриить график функции в полярных координатах:

1) $r=\dfrac{\varphi}{\varphi-\pi}$. 2) $r=2|\cos 3\varphi|$.
3) $\varphi=\dfrac{r}{r-1}$. 4) $\varphi=\arcsin(r-1)$.

7.271. Пусть α — иррациональное число,
$$f(x)=\alpha x-E(\alpha x),\qquad x\in\mathbb{Z}.$$
Доказать, что:

1) $f(x)<1$ для любого $x\in\mathbb{Z}$.
2) $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)$, если $f(x_1)-f(x_2)>0$;
$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)-1$, если $f(x_1)-f(x_2)<0$.
3) Для любого $\varepsilon>0$ найдется число $x\in\mathbb{Z}$ такое, что $0<f(x)<\varepsilon$.

7.272. Функцию f называют *выпуклой вверх (вниз) на промежутке* X, если для любых x_1, $x_2\in X$ и любого $\alpha\in[0;1]$ верно неравенство
$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\geqslant\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$$
(соответственно
$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leqslant\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)).$$
График выпуклой вверх на отрезке $[a;b]$ функции лежит не ниже прямой, проведенной через точки $(a;f(a))$, $(b;f(b))$.

Доказать, что функция:

1) $y=ax^2+bx+c$ выпукла вниз на $\mathbb{R}$ при $a>0$ и выпукла вверх на $\mathbb{R}$ при $a<0$.

2) $y=a^x$ выпукла вниз на $\mathbb{R}$.

3) $y=\log_a x$ выпукла вверх на $(0;+\infty)$ при $a>1$ и выпукла вниз на $(0;+\infty)$ при $0<a<1$.

4) $y=\sin x$ выпукла вверх на $[0;\pi]$ и выпукла вниз на $[-\pi;0]$.

7.273. Указать промежутки выпуклости вверх и выпуклости вниз функции:

1) $y=|x|$. 2) $y=x^3$. 3) $y=1/x$. 4) $y=\dfrac{2x-5}{x+1}$.
5) $y=\operatorname{ch} x$. 6) $y=\operatorname{sh} x$. 7) $y=\lg|x|$. 8) $y=|\ln x|$.

7.274. Доказать, что если f и g — выпуклые вверх функции, то и функция $\alpha f+\beta g$, где $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, также является выпуклой вверх.

7.275. Доказать:

1) Функция, обратная к выпуклой вверх строго возрастающей функции, выпукла вниз.

2) Функция, обратная к выпуклой вверх строго убывающей функции, выпукла вверх.

7.276. Указать промежутки выпуклости вверх и выпуклости вниз функции:

1) $y=\operatorname{tg} x$, $x\in(-\pi/2;\ \pi/2)$. 2) $y=\cos^2 x$, $x\in(0;\ 2\pi)$.
3) $y=\arcsin x$, $x\in[-1;\ 1]$. 4) $y=\operatorname{arcctg} x$, $x\in\mathbb{R}$.

7.277. Функция f такова, что для любых x_1, $x_2\in\mathbb{R}$ верно неравенство
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2)).$$
Доказать, что для любых $x_1, x_2, x_3\in\mathbb{R}$ верно неравенство
$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)<\frac{1}{3}(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)).$$

7.278. Функция f выпукла вниз на $\mathbb{R}$. Доказать, что для любых x_1, x_2, ..., $x_n\in\mathbb{R}$ и любых α_1, α_2, ..., α_n, $0\leqslant\alpha_j\leqslant 1$ ($j=1, 2, \ldots, n$), $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1$, верно неравенство (неравенство Йенсена)
$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\ldots+\alpha_nf(x_n).$$

7.279. Функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R}$, и для любых x_1, $x_2\in\mathbb{R}$
$$f(x_1)+f(x_2)=f(x_1+x_2).$$

1) Доказать, что для всех рациональных x
$$f(x)=f(1)\cdot x.$$

2) Доказать, что если f неограничена в окрестности некоторой точки, то она неограничена в любой окрестности любой точки.

7.280. Функция f с $D(f) \neq \{0\}$ такова, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и любых $x_1, x_2 \in D(f)$ выполнены условия

$$\alpha x_1 + \beta x_2 \in D(f),$$
$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

Доказать, что $D(f) = \mathbb{R}$ и для любого $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(1)x.$$

7.281. Для функции f существуют числа $T \neq 0$ и a такие, что для любого $x \in D(f)$ имеет место

$$x + T \in D(f), \quad x - T \in D(f)$$

и верно одно из равенств:

1) $f(x+T) = f(x) + a$, 2) $f(x+T) = f(x) + ax$.

Доказать, что соответственно:

1) $f(x) = \varphi(x) + \frac{a}{T}x$,

2) $f(x) = \varphi(x) + \frac{a}{2T}(x^2 - Tx)$,

где $\varphi(x)$ — периодическая с периодом T функция.

7.282. Для функции f существуют число $T \neq 0$ и многочлен $Q_n(x)$ степени n такие, что для любого $x \in D(f)$ имеет место

$$x + T \in D(f), \quad x - T \in D(f)$$

и

$$f(x+T) = f(x) + Q_n(x).$$

Доказать, что существует многочлен $P_{n+1}(x)$ степени $n+1$ такой, что

$$f(x) = \varphi(x) + P_{n+1}(x),$$

где $\varphi(x)$ — периодическая с периодом T функция.

7.283. Для функции f существуют числа $T \neq 0$ и $k > 0$ такие, что для любого $x \in D(f)$ имеет место

$$x + T \in D(f), \quad x - T \in D(f)$$

и

$$f(x+T) = kf(x).$$

Доказать, что существует число $a > 0$ такое, что

$$f(x) = a^x \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — периодическая функция.

14. Последовательности. Функцию, областью определения которой является множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, называют *последовательностью*. Значения такой функции обозначают x_n (или a_n, b_n и т. д.) и называют *членами последовательности*, число n называют *номером* члена x_n. Последовательность обозначают

$$\{x_n\}, \quad \text{или} \quad x_n,\ n \in \mathbb{N}, \quad \text{или} \quad x_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Другими словами, если каждому натуральному числу n сопоставлено число x_n, то говорят, что задана последовательность $\{x_n\}$.

В качестве множества номеров может быть взято не только множество натуральных чисел, но и какое-либо другое бесконечное подмножество целых чисел, например, множество четных натуральных чисел (тогда последовательность обозначают $\{x_{2k}\}$), множество неотрицательных целых чисел $0, 1, 2, \ldots$ и т. д.

Множество значений последовательности может быть как конечным, так и бесконечным, например, множество значений последовательности $\{(-1)^n\}$ состоит из двух чисел 1 и -1, множество значений последовательности $\{1/n\}$ бесконечно. Последовательность, множество значений которой состоит из одного числа, называют *стационарной*.

Последовательность может быть задана с помощью формулы вида

$$x_n = f(n), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{33}$$

выражающей x_n через номер n, например,

$$x_n = 2^n, \quad n \in \mathbb{N};$$
$$x_n = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Такую формулу называют *формулой общего члена последовательности*. Для задания последовательности используют и *рекуррентные* формулы, т. е. формулы, выражающие n-й член последовательности через члены с меньшими номерами (предшествующие члены). Так определяют арифметическую и геометрическую прогрессии (§ 4). Другими примерами являются последовательности

$$x_1 = a, \ x_{n+1} = bx_{n-1} + c, \ n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 2,$$
$$x_1 = a, \ x_2 = b, \ x_n = (x_{n-1} + x_{n-2})/2, \ n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 3,$$

здесь a, b, c — заданные числа. Последовательность может быть задана и другими способами, например, x_n — n-я цифра в десятичной записи числа π (т. е. $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$ и т. д.).

Пример 21. Найти формулу общего члена для последовательности:

1) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ (последовательность Фибоначчи);

2) $x_1=a,\ x_2=b,\ x_n=x_{n-1}-\frac{1}{4}x_{n-2},\ n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 3;$

3) $x_1=0,\ x_2=1,\ x_n=x_{n-1}-x_{n-2},\ n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 3.$

△ 1) Найдем последовательность вида $\{\lambda^n\}$, удовлетворяющую условию $x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$ (здесь $\lambda\neq 0$ и может быть, вообще говоря, и комплексным числом). После подстановки $x_n=\lambda^n$ получим уравнение $\lambda^2=\lambda+1$ (его называют характеристическим уравнением), откуда $\lambda_1=(1+\sqrt{5})/2$, $\lambda_2=(1-\sqrt{5})/2$. Каждая из последовательностей $\{\lambda_1^n\}$ и $\{\lambda_2^n\}$ удовлетворяет условию $x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$. Для любых чисел α и β последовательность с общим членом $x_n=\alpha\lambda_1^n+\beta\lambda_2^n$ также удовлетворяет этому условию. Найдем α и β так, чтобы

$$x_1=\alpha\lambda_1+\beta\lambda_2=1,\ x_2=\alpha\lambda_1^2+\beta\lambda_2^2=1;$$

получим

$$\alpha=\frac{1-\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \beta=\frac{\lambda_1-1}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Подставляя значения λ_1, λ_2, α и β в формулу $x_n=\alpha\lambda_1^n+\beta\lambda_2^n$, находим формулу общего члена

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),\qquad n\in\mathbb{N},$$

последовательности, определяемой условиями 1).

2) Поступая, как и в случае 1), придем к характеристическому уравнению $4\lambda^2-4\lambda+1=0$, имеющему один двукратный корень $\lambda=1/2$. Последовательность $\{2^{-n}\}$ удовлетворяет условию

$$x_n=x_{n-1}-\frac{1}{4}x_{n-2},\qquad n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 3.$$

Другой такой последовательностью является, как легко проверить, последовательность $\{n2^{-n}\}$. Последовательности вида $\{\alpha 2^{-n}+\beta n2^{-n}\}$ также удовлетворяют этому условию. Определив α и β из условий

$$x_1=\alpha\cdot\frac{1}{2}+\beta\cdot\frac{1}{2}=a,\ x_2=\alpha\cdot\frac{1}{4}+\beta\cdot 2\cdot\frac{1}{4}=b,$$

получим

$$\alpha=4a-4b,\ \beta=4b-2a.$$

Значит, формула общего члена последовательности, заданной условиями 2), имеет вид

$$x_n=(2a-2b+(2b-a)n)2^{1-n},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

3) В этом случае характеристическое уравнение $\lambda^2=\lambda-1$ имеет комплексные корни $\lambda_1=e^{i\pi/3}$ и $\lambda_2=e^{-i\pi/3}$. Последовательность, удовлетворяющую условиям 3), будем искать в виде $x_n=\alpha e^{i\pi n/3}+\beta e^{-i\pi n/3}$ и из условий $x_1=0$, $x_2=1$ найдем, что

$$\alpha=\frac{1}{i\sqrt{3}}e^{-i\pi/3},\ \beta=-\frac{1}{i\sqrt{3}}e^{i\pi/3}.$$

Отсюда

$$x_n=\frac{1}{i\sqrt{3}}\left(e^{i\pi(n-1)/3}-e^{-i\pi(n-1)/3}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi(n-1)}{3},\qquad n\in\mathbb{N}.\ ▲$$

Последовательность, заданную рекуррентной формулой вида

$$x_n=a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}+\ldots+a_kx_{n-k},\qquad n\in\mathbb{N},\ n\geqslant k,$$

где $a_1,\ \ldots,\ a_k$ и k — заданные числа, $k\in\mathbb{N}$, называют *возвратной последовательностью порядка k*.

Последовательность x_n, $n\in\mathbb{N}$, *ограничена снизу*, если существует число C такое, что для всех $n\in\mathbb{N}$ верно неравенство

$$x_n\geqslant C.$$

Последовательность x_n, $n\in\mathbb{N}$, *ограничена сверху*, если существует число C такое, что для всех $n\in\mathbb{N}$ верно неравенство

$$x_n\leqslant C.$$

Последовательность x_n, $n\in\mathbb{N}$, *ограничена*, если существуют числа C_1 и C_2 такие, что для всех $n\in\mathbb{N}$ верны неравенства

$$C_1\leqslant x_n\leqslant C_2.$$

Это определение равносильно следующему: последовательность x_n, $n\in\mathbb{N}$, ограничена, если существует число $C>0$ такое, что для всех $n\in\mathbb{N}$ верно неравенство $|x_n|\leqslant C$, или, короче,

$$\exists C>0\ \ \forall n\in\mathbb{N}:\ |x_n|\leqslant C.\qquad (34)$$

Пример 22. Доказать, что последовательности:

1) $x_n=\dfrac{(-1)^n n+10}{\sqrt{n^2+1}},\ n\in\mathbb{N};$

2) $x_n=\dfrac{n}{a^n},\ n\in\mathbb{N}$, где $a>1$,

ограничены.

△ 1) Поскольку

$$|(-1)^n n+10|\leqslant|(-1)^n n|+10=n+10,\quad \sqrt{n^2+1}>n,$$

имеем

$$|x_n|=\frac{|(-1)^n n+10|}{\sqrt{n^2+1}}\leqslant\frac{n+10}{n}=1+\frac{10}{n}\leqslant 11,$$

т. е. (34) выполнено при $C=11$.

2) Очевидно, для всех $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{n}{a^n}>0.$$

Поскольку $a-1>0$, по неравенству Бернулли имеем для всех $n\in\mathbb{N}$:

$$a^n=(1+a-1)^n\geqslant n(a-1),$$

откуда

$$\frac{n}{a^n} \leqslant \frac{1}{a-1}.$$

Таким образом, для всех n верны неравенства

$$0 < \frac{n}{a^n} \leqslant \frac{1}{a-1},$$

т. е. последовательность ограничена. ▲

Отрицание определения ограниченной последовательности выглядит так: последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, *неограничена*, если для любого $C > 0$ найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $|x_n| > C$; короче,

$$\forall C > 0 \quad \exists n \in N: \ |x_n| > C. \tag{35}$$

Аналогично формулируются отрицания определений ограниченной сверху (снизу) последовательности.

Пример 23. Доказать, что последовательности:

1) $x_n = n^{\cos \pi n}$, $n \in \mathbb{N}$;

2) $x_n = \dfrac{100 - n^3}{n^2 - 10}$, $n \in \mathbb{N}$,

неограничены.

△ 1) Если $n = 2k$, то $\cos 2\pi k = 1$ и $x_{2k} = 2k$. Пусть C — произвольное положительное число. Возьмем четное число $2k$, большее C (например, $2k = 2(E(C) + 1)$), тогда $x_{2k} > C$, т. е. (35) выполнено, и данная последовательность неограничена.

2) Из формулы общего члена имеем

$$|x_n| = \frac{n^3 \left| \frac{100}{n^3} - 1 \right|}{n^2 \left| 1 - \frac{10}{n^2} \right|} = n \left| \frac{\frac{100}{n^3} - 1}{1 - \frac{10}{n^2}} \right|.$$

Если $n \geqslant 6$, то

$$\frac{100}{n^3} < \frac{1}{2} \text{ и } 1 - \frac{100}{n^3} > \frac{1}{2},$$

а $0 < 1 - \frac{10}{n^2} < 1$, поэтому

$$|x_n| = n \frac{1 - \frac{100}{n^3}}{1 - \frac{10}{n^2}} > n \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{n}{2}.$$

Для произвольного положительного числа C возьмем $n > 2C$ (например, $n = [2C] + 1$), тогда $|x_n| > \frac{n}{2} > C$ и, значит, данная последовательность неограничена. ▲

Последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, называют *возрастающей* (*неубывающей*), *начиная с номера* n_0, если для любого $n \geqslant n_0$, $n \in \mathbb{N}$, верно неравенство $x_{n+1} \geqslant x_n$.

Последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, называют *убывающей* (*невозрастающей*), *начиная с номера* n_0, если для любого $n \geqslant n_0$, $n \in \mathbb{N}$, верно неравенство $x_{n+1} \leqslant x_n$.

Если в этих определениях верны соответственно неравенства $x_{n+1} > x_n$ или $x_{n+1} < x_n$, то последовательность называют соответственно *строго возрастающей* или *строго убывающей*, *начиная с номера* n_0.

Возрастающую или убывающую, начиная с номера n_0, последовательность называют *монотонной*, *начиная с номера* n_0 (строго возрастающую или строго убывающую — *строго монотонной*).

Последовательность, возрастающую с номера $n_0 = 1$, называют *возрастающей* (аналогично, *убывающей* и т. д.).

Данное определение последовательности, возрастающей с номера n_0, равносильно введенному ранее (п. 6) определению функции, возрастающей на множестве натуральных $n \geqslant n_0$, а именно: последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, возрастает, начиная с номера n_0, если для любых n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geqslant n_0$, $n_2 \geqslant n_0$, из неравенства $n_1 < n_2$ следует неравенство $x_{n_1} \leqslant x_{n_2}$. Аналогичная равносильность имеет место и для убывающей, начиная с номера n_0, последовательности и т. д.

Пример 24. Доказать, что последовательность

$$x_n = \frac{5^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

строго убывает, начиная с некоторого номера.

△ Рассмотрим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{5^{n+1} n!}{(n+1)!\, 5^n} = \frac{5}{n+1}.$$

Видно, что при $n \geqslant 5$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \frac{5}{6} < 1$$

и, значит, $x_{n+1} < x_n$ (так как $x_n > 0$). Итак, данная последовательность строго убывает, начиная с $n = 5$. ▲

Пример 25. Доказать, что последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

строго возрастает.

△ Рассмотрим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+2)^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} (n+1)^n} = \left(\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}.$$

Из неравенства Бернулли имеем для любого $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}.$$

Поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1,$$

т. е. $x_{n+1} > x_n$, и, значит, данная последовательность строго возрастает. ▲

Пример 26. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_1 = a, \ x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}, \ n \in \mathbb{N}:$$

1) строго возрастает, если $a = 0$;
2) строго убывает, если $a = 4$.

△ Для $n \in \mathbb{N}$ имеем $x_{n+2}^2 = 6 + x_{n+1}$, $x_{n+1}^2 = 6 + x_n$, откуда

$$x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2 = x_{n+1} - x_n. \qquad (36)$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

1) Если $x_1 = 0$, то $x_2 = \sqrt{6} > x_1$.

Допустим, что неравенство $x_{n+1} > x_n$ верно для $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (36) следует, что $x_{n+2}^2 > x_{n+1}^2$, и так как $x_{n+2} > 0$ и $x_{n+1} > 0$, то верно неравенство $x_{n+2} > x_{n+1}$. Значит, $x_{n+1} > x_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т. е. последовательность строго возрастает.

2) В этом случае $x_1 = 4$, $x_2 = \sqrt{10} < x_1$. Как и выше, легко доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ из неравенства $x_{n+1} < x_n$ следует неравенство $x_{n+2} < x_{n+1}$. Значит, $x_{n+1} < x_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т. е. в этом случае последовательность строго убывает. ▲

Верхнюю (нижнюю) грань множества членов последовательности $\{x_n\}$ называют *верхней (нижней) гранью последовательности* и обозначают

$$\sup\{x_n\} \quad (\inf\{x_n\}).$$

Член x_{n_0} последовательности $\{x_n\}$ называют *наибольшим (наименьшим)*, если $x_n \leqslant x_{n_0}$ $(x_n \geqslant x_{n_0})$ для любого n, и обозначают его

$$\max\{x_n\} \quad (\min\{x_n\}).$$

Наибольший (наименьший) член последовательности называют также *максимальным (минимальным)*.

Если существует $\max\{x_n\}$ $(\min\{x_n\})$, то

$$\sup\{x_n\} = \max\{x_n\} \quad (\inf\{x_n\} = \min\{x_n\}).$$

Из существования конечного $\sup\{x_n\}$ $(\inf\{x_n\})$ не следует существования $\max\{x_n\}$ $(\min\{x_n\})$.

7.284. Какие из чисел a, b являются членами последовательности $\{x_n\}$, если:

1) $a = 1215$, $b = 12\,555$; $x_n = 5 \cdot 3^{2n-3}$, $n \in \mathbb{N}$.
2) $a = 6$, $b = 8$; $x_n = \sqrt{n^2 + 32n} - n$, $n \in \mathbb{N}$.
3) $a = 6$, $b = 11$; $x_n = (n^2 + 11)/(n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$.
4) $a = 248$, $b = 2050$; $x_n = 2^n - n$, $n \in \mathbb{N}$?

7.285. Для каких членов x_n последовательности $\{(-3)^{3-2n}\}$ выполнено неравенство $|x_n| > 0{,}001$?

7.286. Указать какой-либо номер N такой, что для всех $n \geqslant N$ члены последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяют заданному неравенству:

1) $x_n = \dfrac{(-1)^n - 3}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$; $|x_n| < 0{,}1$.
2) $x_n = \dfrac{n+3}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$; $|x_n - 1| < 0{,}01$.
3) $x_n = \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1 + 2^n}$, $n \in \mathbb{N}$; $|x_n + 2| < 0{,}001$.
4) $x_n = \sqrt[n]{1{,}5}$, $n \in \mathbb{N}$; $|x_n - 1| < 0{,}1$.
5) $x_n = (\log_2 n)/n$, $n \in \mathbb{N}$; $|x_n| < 1/k$, $k \in \mathbb{N}$.

Указание. Доказать и использовать неравенство

$$2^{1/k} - 1 > \frac{1}{2k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

7.287. Найти наибольший член последовательности:

1) $\{21/(3n^2 - 14n - 17)\}$. 2) $\{n/(n^2 + 9)\}$.
3) $\{2^{-n} - 3 \cdot 4^{-n}\}$. 4) $\{n^2/2^n\}$.

7.288. Найти наименьший член последовательности:

1) $\{(2n - 5)(2n - 11)\}$. 2) $\left\{n + \frac{5}{n}\right\}$.
3) $\{\log_3^2 n - 3\log_3 n\}$. 4) $\{1{,}4^n/n\}$.

7.289. Пусть $s(p)$ — сумма цифр натурального числа p (если $p \leqslant 9$, то $s(p) = p$).

1) Доказать, что если $p \geqslant 100$, то $s(p) < p/10$.

2) Пусть $x_1 \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = s(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что есть номер n_0 такой, что все члены x_n с номерами $n \geqslant n_0$ одинаковы.

3) Пусть $x_1 \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = s(s(x_n) + x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Найти x_{1984}, если: а) $x_1 = 1983$; б) x_1 кратно 9 и $x_2 \leqslant 1985$; в) $x_1 = 1984$.

7.290. Является ли последовательность $\{y_k\}$ подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$, если:

1) $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$; а) $y_k = k^2 + 1$, $k \in \mathbb{N}$; б) $y_k = k^2 - 4k + 5$, $k \in \mathbb{N}$.
2) $x_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}$; а) $y_k = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$; б) $y_k = 2(k + (-1)^k)$, $k \in \mathbb{N}$.
3) $x_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$; а) $y_k = 1/(k - \cos \pi k)$, $k \in \mathbb{N}$; б) $y_k = 1/(3k - \cos \pi k)$, $k \in \mathbb{N}$?

7.291. Пусть $\{x_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Доказать, что $n_k \geqslant k$, $k \in \mathbb{N}$.

7.292. Привести пример последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_k\}$ таких, что $\forall k \exists n_k$: $y_k = x_{n_k}$, но $\{y_k\}$ не является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

7.293. Привести пример последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей условию:

1) $\forall m \exists n$: $x_m \neq x_n$.
2) $\exists N \forall n \geqslant N$: $x_n < x_N$.
3) $\exists N_1 \forall n \geqslant N_1$: $x_{N_1} > x_n$ и $\exists N_2 \forall n \geqslant N_2$: $x_{N_2} < x_n$.
4) $\exists N \forall n > N \forall m > n$: $x_n < x_m$.
5) $\forall n \exists m > n \exists k > n$: $x_m < x_n < x_k$.

7.294. Указать формулу общего члена последовательности, первыми членами которой являются числа:

1) $\{8; 14; 20; 26; 32; \ldots\}$.
2) $\{-0{,}5; 1{,}5; -4{,}5; 13{,}5; -40{,}5; \ldots\}$.
3) $\{2; 3/2; 4/3; 5/4; 6/5; \ldots\}$.
4) $\{1; 3; 1; 3; 1; \ldots\}$.
5) $\{5; 7; 11; 19; 35; \ldots\}$.
6) $\{1; 2; 6; 24; 120; \ldots\}$.
7) $\{-2; -1/2; -4/3; -3/4; -6/5; \ldots\}$.
8) $\{0{,}3; 0{,}33; 0{,}333; 0{,}3333; 0{,}33333; \ldots\}$.
9) $\{1/2; 1/2; 3/8; 1/4; 5/32; \ldots\}$.

7.295. По известным трем членам x_1, x_2, x_3 последовательности найти формулу общего члена в виде $x_n = f(n)$, где $f(x)$ — многочлен не выше второй степени.

7.296. Доказать, что если $x_1 = a^{1/k}$ $(a > 0)$,

$$x_{n+1} = (a/x_n)^{1/k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{то} \quad x_n = a^{(1-(-k)^{-n})/(k+1)}.$$

7.297. Пусть

$$x_0 = 1, \quad x_1 = a, \quad x_n = (\alpha + \beta)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} \beta^k x_{n-k} x_k,$$
$$n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2,$$

где a, α, β — положительные числа. Найти формулу общего члена этой последовательности и номер наибольшего члена.

7.298. 1) Найти общий член последовательности $\{x_n\}$, если $x_1 = a$ и $x_{m+n} = x_m + x_n + mn$ для любых $m, n \in \mathbb{N}$.

2) Существует ли последовательность $\{x_n\}$ такая, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$ верно равенство $x_{m+n} = x_m + x_n + m + n$?

7.299. Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентным способом (a, b, α, β — заданные числа):

1) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = (x_n + 1)/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.
2) $x_1 = a$, $x_{n+1} = (n+1)(x_n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$.
3) $x_1 = 1/2$, $x_{n+1} = 1/(2 - x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.
4) $x_1 = a$, $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta 2^n$, $\alpha \neq 2$, $n \in \mathbb{N}$.
5) $x_1 = 1/2$, $x_{n+1} = 2/(3 - x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

6) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_{n+2} = (3x_{n+1} - x_n)/2$, $n \in \mathbb{N}$.
7) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

7.300. Найти формулу общего члена для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, если $x_1 = a$, $y_1 = b$,

$$x_{n+1} = (2x_n + y_n)/3, \quad y_{n+1} = (x_n + 2y_n)/3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

7.301. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентным способом: $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$, $n \in \mathbb{N}$; a, b, p, q — заданные числа.

1) Доказать, что если уравнение $\lambda^2 = p\lambda + q$ имеет различные корни λ_1 и λ_2, то общий член последовательности $\{x_n\}$ имеет вид

$$x_n = \frac{(\lambda_2 a - b)\lambda_1^{n-1} - (\lambda_1 a - b)\lambda_2^{n-1}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2) Доказать, что если уравнение $\lambda^2 = p\lambda + q$ имеет кратный корень $\lambda \neq 0$, то общий член последовательности $\{x_n\}$ имеет вид

$$x_n = (2a\lambda - b + n(b - a\lambda))\lambda^{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

7.302. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентным способом:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n + r, \quad n \in \mathbb{N};$$

a, b, p, q, r — заданные числа. Найти формулу общего члена, если

1) уравнение $\lambda^2 = p\lambda + q$ имеет различные корни λ_1 и λ_2;
2) уравнение $\lambda^2 = p\lambda + q$ имеет кратный корень $\lambda_0 \neq 0$.

7.303. Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентным способом:

1) $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+2} = 0{,}5(x_{n+1} + x_n) + 1$, $n \in \mathbb{N}$.
2) $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n + 2$, $n \in \mathbb{N}$.

7.304. Найти формулу общего члена последовательности $\{x_n\}$, если $x_1 = a > 0$, $x_{n+1} = 1/(1 + x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

7.305. Найти все значения $a \in \mathbb{R}$, для которых формулы $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n/(2 + x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, задают последовательность. Найти формулу общего члена этой последовательности.

7.306. Пусть $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n/(4 - x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Показать, что если $a \notin [3; 4]$, то эти формулы задают последовательность, и найти формулу ее общего члена.

2) Найти все значения a, при которых эти формулы не определяют последовательность.

7.307. Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентным способом (a, b, c, d — заданные числа):

1) $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n/(b + x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.
2) $x_1 = a$, $x_{n+1} = bx_n/(c + dx_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

7.308. Пусть $x_1 = p$, $p \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что существует подпоследовательность этой последовательности, все члены которой делятся на 3.

7.309. Пусть

$$S_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \quad a_n = 3 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2!} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 3!} - \ldots - \frac{1}{(n-1)\,n\cdot n!}.$$

Доказать, что

$$a_n = S_n + \frac{1}{n\cdot n!}.$$

7.310. Доказать, что если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — ограниченные последовательности, то ограничены и последовательности

1) $\{x_n \cdot y_n\}$; 2) $\{\alpha x_n + \beta y_n\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

7.311. Привести пример ограниченных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, $y_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что последовательность $\{x_n/y_n\}$ неограничена.

7.312. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, последовательность $\{y_n\}$ удовлетворяет условию: существует $C > 0$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $|y_n| \geqslant C$. Доказать, что последовательность $\{x_n/y_n\}$ ограничена.

7.313. Последовательность $\{x_n\}$ неограничена. Доказать, что она содержит подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $x_{n_k} > k$, $k \in \mathbb{N}$, или $x_{n_k} < -k$, $k \in \mathbb{N}$.

7.314. Доказать ограниченность последовательностей:

1) $\left\{\dfrac{2n^2-1}{2+n^2}\right\}$. 2) $\left\{\dfrac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}\right\}$. 3) $\left\{\dfrac{n+(-1)^n}{3n-1}\right\}$.

4) $\left\{\dfrac{n^2+4n+8}{(n+1)^2}\right\}$. 5) $\left\{\dfrac{5n^6+6}{(n^4+1)(n^2-2)}\right\}$.

7.315. Доказать неограниченность последовательностей:

1) $\{(-1)^n n\}$. 2) $\{n^2-n\}$. 3) $\{(1-n)/\sqrt{n}\}$. 4) $\{n+(-1)^n n\}$.

5) $\{n^{(-1)^n}\}$. 6) $\{(1-n)^{\sin(\pi n/2)}\}$. 7) $\{n^3/(n^2+1)\}$.

8) $\{(n-n^4)/(n+2)^3\}$.

7.316. Пусть P_k и Q_l — многочлены степеней k и l соответственно, $Q_l(n) \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что последовательность $\{P_k(n)/Q_l(n)\}$: 1) ограничена, если $k \leqslant l$; 2) неограничена, если $k > l$.

7.317. Доказать ограниченность последовательностей:

1) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$, $n \in \mathbb{N}$. 2) $x_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$, $n \in \mathbb{N}$.

3) $x_n = \dfrac{1}{n^3} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{i} j$, $n \in \mathbb{N}$.

7.318. Доказать, что если $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)(a_n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, то последовательность $x_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{a_k}\right)$ ограничена *).

7.319. Доказать ограниченность последовательности $\{x_n\}$ и найти $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$, если:

1) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$, $n \in \mathbb{N}$. 2) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4k^2-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

3) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$, $n \in \mathbb{N}$. 4) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2^k}$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказать ограниченность последовательности (7.320—7.322):

7.320. 1) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k-1)\,2k}$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(a+(k-1)\,d)\,(a+kd)}$, $n \in \mathbb{N}$.

3) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$, $n \in \mathbb{N}$.

4) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

5) $x_n = \log_2\left(\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

7.321. 1) $\left\{\dfrac{3n+5}{\sqrt{4n^2-1}}\right\}$. 2) $\left\{\dfrac{\sqrt{n^3+2}}{(n+3)(\sqrt{n}+1)}\right\}$.

3) $\left\{\dfrac{\sqrt[3]{n^6+2n}+\sqrt{n^3+2}}{3n-2n^2}\right\}$.

7.322. 1) $\{\sqrt{n^2+1}-n\}$. 2) $\{\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}\}$.

3) $\{n(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4-n})\}$. 4) $\{\sqrt[3]{9n-n^3}+\sqrt[3]{9n+n^3}\}$.

5) $\{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2-1}\}$. 6) $\left\{\sqrt{\dfrac{n^4+n^3}{n^2+1}}-\sqrt{n^2-1}\right\}$.

7.323. Доказать неограниченность последовательности:

1) $\{\sqrt{n^4+n^3+1}-\sqrt{n^4-n^3+1}\}$.

2) $\{\sqrt{n^2+(-1)^n\sqrt{n^3}}-n\}$.

---

*) $\prod\limits_{k=1}^{n} c_k$ — произведение чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

7.324. При каких p, q, $0 \leqslant q < p$, ограничена последовательность:

1) $\{\sqrt{n^p + n^q + 1} - \sqrt{n^p - n^q + 1}\}$.

2) $\{\sqrt[3]{n^p - n^q + 1} - \sqrt[3]{n^p + 1}\}$.

3) $\{\sqrt[k]{n^p + an^q + 1} - \sqrt[k]{n^p + bn^q + 1}\}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, $a \neq b$?

7.325. Доказать ограниченность последовательности:

1) $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$. 2) $\{\sqrt[n]{n}\}$. 3) $\left\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right\}$, $x > 0$.

7.326. 1) Доказать, что последовательность $\{(\ln n)/n\}$ ограничена сверху числом $\ln 2$.

2) Найти $\sup\{(\ln n)/n\}$.

7.327. Доказать ограниченность последовательности:

1) $\left\{\frac{2^n + 1}{3^n - 2}\right\}$. 2) $\left\{\frac{5^{2n+1} + 2^n}{1 - 25^n}\right\}$.

3) $\left\{\frac{\ln^2 n + 10}{\ln^2 n^2 + 2}\right\}$. 4) $\{\lg(3n + 5) - \lg(n + 1)\}$.

5) $\{\ln(\sqrt{2n^2 + 1} - n) - \ln n\}$. 6) $\left\{\frac{\ln(n^2 + 1) - \ln(n + 1)}{\ln(n + 0{,}5)}\right\}$.

7) $\left\{\frac{n + \ln n}{n + 1}\right\}$. 8) $\left\{n \ln \frac{n + 1}{n}\right\}$. 9) $\{\ln^2(n + 1) - \ln^2 n\}$.

7.328. Доказать неограниченность последовательности:

1) $\{5^n - 4^n\}$. 2) $\left\{\frac{3^n - 2^n}{2^n + 1}\right\}$. 3) $\sqrt[n]{n!}$. 4) $\left\{\frac{(2n)!!}{(2n - 1)!!}\right\}$ *).

5) $\{2^n/n^2\}$. 6) $\{a^n/n^k\}$, $|a| > 1$, $k \in \mathbb{R}$. 7) $\left\{\frac{n + 1}{\log_2(n + 1)}\right\}$.

7.329. Доказать ограниченность последовательности:

1) $\{n/3^n\}$. 2) $\{n^2/2^n\}$. 3) $\{n^p/2^n\}$, $p \in \mathbb{R}$.

4) $\{nq^n\}$, $|q| < 1$. 5) $\{n^p q^n\}$, $p \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$.

7.330. Доказать:

1) Ограниченность последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} kq^k, \quad n \in \mathbb{N},\ |q| < 1.$$

2) Неограниченность последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} kq^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{R},\ q \neq 0.$$

*) $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n$; $(2n - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n - 1)$.

7.331. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ — такая, что

$$x_1 = 2,\ x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 1}{5x_n},\ n \in \mathbb{N},$$

1) ограничена снизу числом $1/5$; 2) ограничена сверху числом 2.

7.332. Доказать ограниченность последовательности:

1) $x_1 = a > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b^2}{x_n}\right)$.

2) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} = (x_{n+1} + x_n)/2$.

7.333. Доказать неограниченность последовательности:

1) $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+2} = x_{n+1} + 6x_n$.

2) $x_1 = -4$, $x_2 = 3$, $x_{n+2} = x_{n+1} + \frac{3}{4} x_n$.

7.334. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+2} = x_{n+1} + \frac{x_n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, ограничена.

7.335. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность натуральных чисел такая, что последовательность

$$S_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n},\ n \in \mathbb{N},$$

ограничена. Доказать, что последовательность

$$y_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{x_k}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

ограничена.

7.336. Доказать неограниченность последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2,\ n \in \mathbb{N}.$$

7.337. 1) Доказать, что если последовательность $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_n$ ограничена, то ограничена и последовательность $\{x_n\}$.

2) Верно ли, что если последовательность $\{x_n\}$ неограничена, то неограничена и последовательность $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_n$, $n \in \mathbb{N}$?

7.338. Доказать ограниченность последовательности:

1) $\{n(a^{1/n} - 1)\}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

2) $\left\{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^2} - \sqrt{n}\right\}$.

3) $\{n^\alpha(\sqrt[n]{n} - 1)\}$, $\alpha < 1$.

Доказать, что данная последовательность монотонна, начиная с некоторого номера (**7.339—7.341**):

7.339. 1) $\left\{\frac{n+1}{2n-1}\right\}$. 2) $\left\{\frac{3n+4}{n+2}\right\}$.

3) $\left\{\frac{100n}{n^2+16}\right\}$. 4) $\{n^3-6n^2\}$.

5) $\left\{\frac{n^2+24}{n+1}\right\}$. 6) $\left\{\frac{n^3}{n^2-3}\right\}$. 7) $\left\{\frac{n^2}{n^3+32}\right\}$. 8) $\left\{\frac{1-n}{\sqrt{n}}\right\}$.

7.340. 1) $\{\sqrt{3n-2}\}$. 2) $\{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\}$. 3) $\{\sqrt[3]{n^3-1}-n\}$.

4) $\{\sqrt{n^2+n}-n\}$. 5) $\left\{\frac{n+1}{\sqrt{n^2+7}}\right\}$. 6) $\left\{\frac{n-3}{\sqrt{n^2+1}}\right\}$.

7.341. 1) $\{2^n-100n\}$. 2) $\{3^n-2^n\}$. 3) $\{2^{n+1}-3^{n-2}\}$.

4) $\left\{\frac{6^{n+1}-5^{n+1}}{6^n+5^n}\right\}$. 5) $\left\{\frac{4^{n-1}+3^{n-1}}{4^n+3^n}\right\}$. 6) $\left\{\frac{100^n}{n!}\right\}$.

7) $\left\{\frac{2^n}{n}\right\}$. 8) $\{\lg(n+1)-\lg n\}$. 9) $\{\ln(n^2+9n)-2\ln n\}$.

7.342. Доказать, что последовательность $\{nq^n\}$, $0<q<1$, монотонна, начиная с некоторого номера; указать этот номер.

7.343. При каких соотношениях между a, b, c, d последовательность $\left\{\frac{an+b}{cn+d}\right\}$, начиная с некоторого номера, будет: 1) возрастающей, 2) убывающей?

7.344. Доказать, что последовательность

$$x_n=1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k(2k+1)}-\frac{1}{2(n+1)}$$

монотонна.

7.345. Доказать, что последовательность

$$x_n=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!,\qquad n\in\mathbb{N},$$

возрастает и ограничена. Найти $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$.

7.346. Сформулировать, используя символы $\exists$, $\forall$, утверждение:

1) Последовательность $\{x_n\}$ не является возрастающей.

2) Последовательность $\{x_n\}$ не является убывающей.

7.347. Доказать, что данная последовательность немонотонна:

1) $\{(-1)^n\}$. 2) $\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}\right\}$.

3) $\{n+(-1)^n\}$. 4) $\{\sin n\}$.

5) $x_1=1$, $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$, $n\in\mathbb{N}$.

7.349. Доказать, что если $\{x_n\}$ — монотонная последовательность, то и последовательность $\left\{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)\right\}$ монотонна.

7.350. Доказать, что данная последовательность убывает, начиная с некоторого номера:

1) $\{n/4^n\}$. 2) $\{(3n+1)^2/3^n\}$. 3) $\{n^3/2^n\}$. 4) $\{n^{1/n}\}$.

7.351. Доказать монотонность последовательности:

1) $\{n-6\lg n\}$. 2) $\{\lg n-n\}$. 3) $\{(\lg n)/n\}$.

7.352. Доказать, что последовательность:

1) $\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right\}$ возрастает; 2) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ убывает.

7.353. Доказать, что при любом $x>0$:

1) Последовательность $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ возрастает.

2) Последовательность $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+l}\right\}$, где $l\in\mathbb{N}$, $l>x$, убывает.

7.354. Доказать, что при $a\neq 1$, $a>0$, последовательность:

1) $\left\{\frac{a^n-1}{n}\right\}$, 2) $\{n(1-a^{1/n})\}$ возрастает.

7.355. Доказать, что последовательность $x_1=-10$, $x_{n+1}=\frac{x_n+1}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, убывает, начиная с некоторого номера; указать этот номер.

7.356. Пусть $x_1=3$, $x_{n+1}=0{,}5x_n^2-1$, $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что эта последовательность: 1) ограничена снизу, но неограничена сверху; 2) возрастает.

7.357. Пусть $x_1=2$, $x_{n+1}=0{,}5x_n^2-1$, $n\in\mathbb{N}$.

1) Доказать, что эта последовательность ограничена.

2) Доказать, что подпоследовательности $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$ данной последовательности монотонны, начиная с некоторого номера.

7.358. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_1=4$, $x_{n+1}=\frac{2+x_n^2}{2x_n}$, $n\in\mathbb{N}$, убывает.

7.359. Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ заданы рекуррентным способом: $x_1=a>0$, $y_1=b>0$,

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n),\quad y_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}(x_n^2+y_n^2)},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Доказать, что: 1) $y_n\geqslant x_n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$; 2) последовательность $\{x_n\}$ возрастает ($n\geqslant 2$); 3) последовательность $\{y_n\}$ убывает ($n\geqslant 2$); 4) $|y_{n+1}-x_{n+1}|\leqslant|b-a|/4^n$.

7.360. Доказать, что если $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0$,

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = 0{,}5(x_n + y_n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

то: 1) последовательность $\{x_n\}$ возрастает, а последовательность $\{y_n\}$ убывает; 2) обе последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены; 3) $|y_{n+1} - x_{n+1}| \leqslant |b - a|/2^n$.

7.361. Доказать, что любая последовательность содержит монотонную подпоследовательность.

7.362. Пусть $C_\alpha^0 = 1$, $C_\alpha^n = C_\alpha^{n-1} \cdot \dfrac{\alpha - n + 1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доказать, что:

1) $C_\alpha^n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$, $\quad n \in \mathbb{N}$;

2) последовательности $\{C_{3/2}^n\}$, $\{C_{1/2}^n\}$, $\{C_{-1/2}^n\}$, $\{C_{-1}^n\}$ ограничены;

3) последовательности $\{C_{-2}^n\}$, $\{C_{-3,5}^n\}$ неограничены;

4) последовательность $\{C_\alpha^n\}$ ограничена при $\alpha \geqslant -1$;

5) последовательность $\{C_\alpha^n\}$ неограничена при $\alpha < -1$;

6) последовательность $\{|C_\alpha^n|\}$ убывает (в широком смысле) при $\alpha \geqslant -1$, начиная с некоторого номера;

7) последовательность $\{|C_\alpha^n|\}$ возрастает (в широком смысле) при $\alpha < -1$, начиная с некоторого номера;

8) последовательность $\{C_\alpha^n \cdot q^n\}$ ограничена при $\alpha \leq -1$, $|q| < 1$.

ГЛАВА II
ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

§ 8. Предел последовательности

1. Понятие предела.

Определение 1. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N, что для любого $n \geqslant N$ верно неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

С помощью символов $\forall$ и $\exists$ определение 1 записывается так: число a — предел последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall n \geqslant N: \ |x_n - a| < \varepsilon.$$

Используя понятие окрестности точки, определение предела можно сформулировать следующим образом: число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для каждой окрестности числа a найдется номер, начиная с которого все члены последовательности принадлежат этой окрестности.

Иными словами, какую бы окрестность числа a ни взять, вне этой окрестности либо нет ни одного члена последовательности, либо находится лишь конечное число ее членов.

В символической записи: число a — предел последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall U(a) \, \exists N \, \forall n \geqslant N: \ x_n \in U(a).$$

Теорема. Последовательность может иметь только один предел.

Если a — предел последовательности $\{x_n\}$, то пишут

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Последовательность, имеющую предел, называют *сходящейся*.

Пример 1. Доказать, исходя из определения 1, что число 1 является пределом последовательности $x_n = n/(n+1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

$\triangle$ Рассмотрим модуль разности

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}.$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ будет выполнено, если $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$, т. е. при $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. В качестве N возьмем какое-нибудь натуральное число, удовлетворяющее условию $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, т. е. $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$ *). Тогда для всех $n \geqslant N$ выполнены неравенства

$$|x_n - 1| = \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

Это и означает, что 1 есть предел последовательности $\{n/(n+1)\}$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Доказать, исходя из определения 1, что

$$\lim_{n\to\infty} (1/3)^n = 0.$$

$\triangle$ Так как $3^n > n$ для любого $n \geqslant 1$, то

$$|(1/3)^n - 0| = 1/3^n < 1/n.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, выберем натуральное N такое, что $1/N < \varepsilon$. Тогда для любого $n \geqslant N$ имеем

$$|(1/3)^n - 0| < 1/n \leqslant 1/N < \varepsilon.$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty} (1/3)^n = 0. \ \blacktriangle$$

Сформулируем отрицание определения 1: *число a не является пределом последовательности* $\{x_n\}$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого натурального N найдется номер $n \geqslant N$ такой, что

$$|x_n - a| \geqslant \varepsilon.$$

В символической записи: число a не является пределом последовательности $\{x_n\}$, если

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geqslant N\colon\ |x_n - a| \geqslant \varepsilon.$$

На языке окрестностей: число a не является пределом последовательности $\{x_n\}$, если существует окрестность числа a, вне которой находится бесконечно много членов последовательности.

Последовательность называют *расходящейся*, если никакое число не является пределом этой последовательности, другими словами, последовательность $\{x_n\}$ является расходящейся, если для любого числа a существует такое ε, что для каждого натурального N найдется $n \geqslant N$ такое, что

$$|x_n - a| \geqslant \varepsilon,$$

или, короче,

$$\forall a \exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geqslant N\colon\ |x_n - a| \geqslant \varepsilon.$$

*) Например, $N = E(1/\varepsilon)$, где $E(a)$ — целая часть числа a.

Пример 3. Доказать, что последовательность $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}$ расходится.

$\triangle$ Нужно доказать, что никакое число не является пределом данной последовательности.

Отметим на числовой прямой несколько членов последовательности, например,

$$x_1 = 0,\ x_2 = 3/2,\ x_3 = -2/3,\ x_4 = 5/4,\ x_5 = -4/5,$$
$$x_6 = 7/6,\ x_{12} = 13/12,\ x_{13} = -12/13 \text{ (рис. 55)}.$$

Этот рисунок подсказывает, что расстояние между двумя соседними членами последовательности больше 1. Докажем, что это

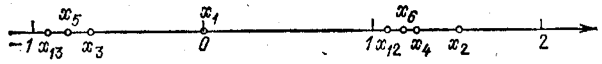


Рис. 55.

действительно так для любых двух соседних членов. Из этих членов один имеет четный номер $n = 2k$ и

$$x_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} > 1.$$

Соседний член имеет нечетный номер $2k+1$ (или $2k-1$) и

$$x_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} < 0 \quad \left(\text{или } x_{2k-1} = -1 + \frac{1}{2k-1} \leqslant 0\right).$$

Отсюда следует, что $|x_n - x_{n+1}| > 1$.

Для произвольного числа a возьмем окрестность единичной длины — интервал $\left(a - \frac{1}{2};\ a + \frac{1}{2}\right)$. Любые соседние члены x_n и x_{n+1} оба вместе не могут находиться в этой окрестности, так как расстояние между ними больше 1. По крайней мере один из этих членов будет лежать вне окрестности.

Таким образом, для любого числа a существует $\varepsilon = 1/2$ такое, что для любого натурального N найдется n, равное либо N, либо $N+1$, такое, что $|x_n - a| > 1/2 = \varepsilon$. Это и означает, что данная последовательность расходится. $\blacktriangle$

Теорема. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

Ограниченность последовательности — *необходимое* условие ее сходимости, т. е. если последовательность неограничена, то она расходится.

Пример 4. Доказать, что последовательность $\{(n^2 - 10)/n\}$ расходится.

$\triangle$ Докажем, что данная последовательность неограничена. Имеем

$$x_n = n - \frac{10}{n} \geqslant n - 10.$$

Пусть C — произвольное положительное число. Возьмем какое-нибудь натуральное число $n_0 > C + 10$, тогда $x_{n_0} \geqslant n_0 - 10 > C$. Это означает, что последовательность $\{(n^2 - 10)/n\}$ неограничена, а поэтому расходится. ▲

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Теорема. Если последовательность $\{x_n\}$ — бесконечно малая, а последовательность $\{y_n\}$ — ограниченная, то $\{x_n y_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

Теорема. Для того чтобы число a было пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы для всех n

$$x_n = a + \alpha_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

8.1. Для каждого данного ε указать такое натуральное N, что $1/n < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$, и заполнить таблицу

ε	10	0,5	0,03	$3\cdot 10^{-4}$	$7\cdot 10^{-10}$
N					

8.2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, указав для каждого $\varepsilon > 0$ такое N, что для любого $n \geqslant N$ верно неравенство $|x_n| < \varepsilon$, если:

1) $x_n = 1/n$. 2) $x_n = a/n$ (a — произвольное данное число).
3) $x_n = (-1)^{n+1}/n$. 4) $x_n = (2 + (-1)^n)/n$.
5) $x_n = (1 + (-1)^n)/n$. 6) $x_n = \frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}$.

Отметить на числовой прямой (в случае 2) взять $a = -1$) первые шесть членов этих последовательностей.

8.3. 1) Доказать, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n+10}{2n-1} > \frac{1}{2}.$$

Найти все $n \in \mathbb{N}$, для которых

$$\frac{n+10}{2n-1} < \frac{1}{2} + \varepsilon,$$

где ε равно: а) $1/6$; б) $1/10$; в) $1/2(2k+1)$, $k \in \mathbb{N}$.

2) Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+10}{2n-1} = \frac{1}{2}$.

8.4. 1) Для каждого данного ε указать такое натуральное N, что

$$\left|\frac{2n-1}{n+0{,}5} - 2\right| < \varepsilon$$

для всех $n \geqslant N$, и заполнить таблицу

ε	10	0,5	0,03	$3\cdot 10^{-4}$	$7\cdot 10^{-10}$
N					

2) Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+0{,}5} = 2$.

8.5. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+b}{n} = 1$, где $b \in \mathbb{R}$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$. 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{2n-1} = \frac{3}{2}$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-n}{2+n} = -1$. 5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1$.

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$, где $p \geqslant 1$.

8.6. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, а последовательность $\{y_n\}$ такова, что существуют натуральные p и n_0 такие, что $y_n = x_{n+p}$ (или $y_n = x_{n-p}$) для любого $n \geqslant n_0$. Доказать, что последовательность y_n сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$. Иными словами, изменение (в частности, отбрасывание или добавление) конечного числа членов сходящейся последовательности оставляет ее сходящейся к тому же пределу.

8.7. Для каждого данного ε указать такое натуральное N, что $1/\sqrt{n} < \varepsilon$ для любого $n \geqslant N$, и заполнить таблицу

ε	10	1	0,1	0, 01
N				

8.8. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{2n-1}} = 0$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3n-11}} = 0$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0$, где $k \in \mathbb{N}$.

8.9. 1) Для каждого данного ε указать такое N, что

$$\left|\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} - 1\right| < \varepsilon$$

для любого $n \geqslant N$, и заполнить таблицу

ε	1	0,2	10^{-2}	10^{-4}
N				

2) Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$.

8.10. 1) Для последовательности $\{x_n\}$ заполнить таблицу

ε	10	0,5	0,03	$3\cdot10^{-4}$	$7\cdot10^{-10}$
N					

указав для каждого данного ε такое натуральное N, что $|x_n|<\varepsilon$ для любого $n\geqslant N$, если а) $x_n=(-0{,}5)^n$; б) $x_n=(0{,}99)^n$.

2) Доказать, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(-0{,}5)^n=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(0{,}99)^n=0$.

8.11. Доказать, что если $|q|<1$, то

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0.$$

8.12. Доказать, что число a не является пределом последовательности $\{x_n\}$, если:

1) $x_n=(-1)^n$; $a=-1$. 2) $x_n=\frac{2-\cos\pi n}{2+\cos\pi n}$; $a=3$

3) $x_n=\cos(\pi n/3)$; $a=1/2$. 4) $x_n=2^{(-1)^n n}$; $a=0$.

8.13. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится, если:

1) $x_n=(-1)^n$. 2) $x_n=n$.
3) $x_n=\sin(\pi n/2)$. 4) $x_n=E((-1)^n/n)$.
5) $x_n=\sin n°$. 6) $x_n=\frac{n}{n+1}\cos\frac{2\pi n}{3}$.

8.14. Последовательность $\{x_n\}$ расходится, а последовательность $\{y_n\}$ такова, что существуют натуральные p и n_0 такие, что $y_n=x_{n+p}$ (или $y_n=x_{n-p}$) для любого $n\geqslant n_0$. Доказать, что последовательность $\{y_n\}$ расходится. Иными словами, изменение (в частности, добавление или отбрасывание) конечного числа членов расходящейся последовательности оставляет ее расходящейся.

8.15. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится, если:

1) $x_n=(-1)^n n$. 2) $x_n=n^{(-1)^n}$.

3) $x_n=\frac{n^2-2n}{n+1}$. 4) $x_n=n^2\sin\frac{\pi n}{4}$.

5) $x_n=(0{,}5)^{((-1)^n-1)n}$.

8.16. Доказать, что $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность, если:

1) $x_n=\frac{n^2-1}{n^3}$. 2) $x_n=\frac{2n+3}{n^2}$. 3) $x_n=\frac{q^n}{n}$, $|q|\leqslant1$.

4) $x_n=\frac{2n+1}{(n+1)2^n}$. 5) $x_n=\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

8.17. Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была бесконечно малой, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{|x_n|\}$ была бесконечно малой. Доказать.

2. Теоремы о пределах, связанные с арифметическими действиями.

1. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, то для любого α существует

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n)=\alpha\lim_{n\to\infty}x_n.$$

2. Если существуют $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, то

а) существует

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n;$$

б) существует

$$\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n;$$

в) если к тому же $y_n\neq0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq0$, то существует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}.$$

Пример 5. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3-3n^2}{n^3+1}.$$

△ Преобразуем формулу для общего члена к виду

$$x_n=\frac{5-\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n^3}}.$$

Учитывая, что $\{1/n\}$ и $\{1/n^3\}$ — бесконечно малые последовательности, и используя теоремы о пределах, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n^3}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}=\frac{5}{1}=5.\ \blacktriangle$$

8.18. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, если:

1) $x_n=\frac{9+\frac{n}{n+1}}{2+\frac{1}{n}}$. 2) $x_n=\frac{3+0{,}5^n}{0{,}3^{n+1}+5}$. 3) $x_n=\frac{n}{3n+2}$.

4) $x_n = \dfrac{2-n}{n+1} + \dfrac{n\cdot 2^{-n}}{n+2}$. 5) $x_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^5$. 6) $x_n = \dfrac{n^3+27}{n^4-15}$.

7) $x_n = \dfrac{(n+5)^3 - n(n+7)^2}{n^2}$. 8) $x_n = \dfrac{n^2+1}{2n+1} - \dfrac{3n^2+1}{6n+1}$.

9) $x_n = \dfrac{(-1)^n + \dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2} - (-1)^n}$. 10) $x_n = \dfrac{3n}{5+3^{n+1}}$.

11) $x_n = \dfrac{2^{n+2}+3^{n+3}}{2^n+3^n}$. 12) $x_n = \dfrac{5\cdot 2^n - 3\cdot 5^{n+1}}{100\cdot 2^n + 2\cdot 5^n}$.

13) $x_n = \dfrac{(-1)^n\cdot 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1}\cdot 6^{n+1}}$. 14) $x_n = \dfrac{1+2+\ldots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$.

8.19. Известно, что $x_n \neq 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, если:

1) $y_n = \dfrac{2x_n - 1}{x_n - 2}$. 2) $y_n = \dfrac{x_n - 1}{x_n^2 - 1}$.

3) $y_n = \dfrac{x_n^2 + x_n - 2}{x_n - 1}$. 4) $y_n = \dfrac{x_n^2 - 3x_n + 2}{x_n^2 - 1}$.

8.20. Пусть a_n — общий член, а S_n — сумма первых n членов арифметической прогрессии с разностью $d \neq 0$. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n^2}$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{a_n^2}$ $(a_n \neq 0)$.

8.21. Пусть $|q| < 1$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} aq^n$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$

8.22. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

1) $x_n = 0,\underbrace{11\ldots1}_{n}$.

2) $x_1 = 0{,}4$; $x_2 = 0{,}45$; $x_3 = 0{,}454$; $x_4 = 0{,}4545$; $x_5 = 0{,}45454$; …; $x_{2k} = 0{,}4545\ldots45$; …

3) $x_1 = 0{,}2$; $x_2 = 0{,}23$; $x_3 = 0{,}234$; $x_4 = 0{,}2342$; $x_5 = 0{,}23423$; $x_6 = 0{,}234234$; …

8.23. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

3. Теоремы о пределах, связанные с неравенствами

1) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и для всех n, начиная с некоторого, $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ (*теорема о трех последовательностях*).

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и для всех n, начиная с некоторого, $x_n \geqslant b$ (или $x_n \leqslant c$), то $a \geqslant b$ (или $a \leqslant c$).

3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > a$ (или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < b$), то для всех n, начиная с некоторого, $x_n > a$ (или $x_n < b$).

Пример 6. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} (5^n/n^n) = 0$.

△ Для всех $n \geqslant 15$ верно неравенство $5/n \leqslant 1/3$, поэтому

$$0 < (5/n)^n \leqslant (1/3)^n$$

при $n \geqslant 15$. Здесь слева и справа стоят члены последовательности, имеющих пределом нуль. Значит, по теореме о трех последовательностях и

$$\lim_{n\to\infty} (5/n)^n = 0. \ ▲$$

Пример 7. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $x_n \geqslant -1$ для любого n; пусть p — натуральное число. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{1+x_n} = 1.$$

△ Если $x_n \geqslant 0$, то

$$1 \leqslant \sqrt[p]{1+x_n} \leqslant \left(\sqrt[p]{1+x_n}\right)^p = 1 + x_n = 1 + |x_n|,$$

а если $-1 \leqslant x_n < 0$, то

$$1 \geqslant \sqrt[p]{1+x_n} \geqslant \left(\sqrt[p]{1+x_n}\right)^p = 1 + x_n = 1 - |x_n|.$$

Объединяя эти результаты, для любого $x_n \geqslant -1$ получаем

$$1 - |x_n| \leqslant \sqrt[p]{1+x_n} \leqslant 1 + |x_n|.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} (1 - |x_n|) = \lim_{n\to\infty} (1 + |x_n|) = 1.$$

Отсюда следует, что и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{1+x_n} = 1. \ ▲$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$.

△ Преобразуем формулу общего члена:

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n} + n} =$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)=0$, то

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}. \ \blacktriangle$$

Пример 9. Пусть $a>1$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

$\triangle$ Обозначим $\sqrt[n]{a}-1=\alpha_n$, тогда $\alpha_n>0$ и $a=(1+\alpha_n)^n\geqslant \geqslant n\alpha_n$ (по неравенству Бернулли, § 2), $0<\alpha_n\leqslant a/n$, для всех n. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, а

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)=1. \ \blacktriangle$$

Пример 10. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

$\triangle$ Обозначим $\sqrt[n]{n}-1=\alpha_n$, тогда $\alpha_n\geqslant 0$ и $n=(1+\alpha_n)^n\geqslant \geqslant\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$ при $n\geqslant 2$ (см. § 4). Так как $n-1\geqslant n/2$ при $n\geqslant 2$, то $n\geqslant n^2\alpha_n^2/4$, откуда получаем $0\leqslant\alpha_n\leqslant 2/\sqrt{n}$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, а

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)=1. \ \blacktriangle$$

В следующих двух примерах дано сравнение скорости роста трех возрастающих последовательностей $\{a^n\}$, $\{n\}$ и $\{\log_a n\}$, где $a>1$.

Пример 11. Пусть $a>1$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}(n/a^n)=0.$$

$\triangle$ Поскольку $a-1>0$,

$a_n=(1+a-1)^n\geqslant\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2\geqslant\frac{n^2}{4}(a-1)^2$ для всех $n\geqslant 2$. Отсюда следует, что

$$0\leqslant n/a^n\leqslant 4/n(a-1)^2.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}(4/n(a-1)^2)=0,$$

то и

$$\lim_{n\to\infty}(n/a^n)=0. \ \blacktriangle$$

Пример 12. Пусть $a>1$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0.$$

$\triangle$ Для доказательства воспользуемся определением предела и результатом предыдущего примера.

Пусть $\varepsilon>0$. На множестве натуральных чисел n неравенство

$$\frac{\log_a n}{n}<\varepsilon$$

равносильно неравенству $n<(a^\varepsilon)^n$. Поскольку $a^\varepsilon>1$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(a^\varepsilon)^n}=0$, поэтому существует натуральное N такое, что для всех $n\geqslant N$

$$\frac{n}{(a^\varepsilon)^n}<1,$$

т. е. $n<a^{\varepsilon n}$. Отсюда следует, что для всех $n\geqslant N$

$$0\leqslant\frac{\log_a n}{n}<\varepsilon,$$

это и означает, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0. \ \blacktriangle$$

Таким образом, из трех последовательностей $\{a^n\}$, $\{n\}$, $\{\log_a n\}$, $a>1$, первая возрастает существенно быстрее других, а третья — медленнее других.

Пример 13. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

$\triangle$ Если $k\geqslant 4$, то $2/k\leqslant 1/2$, поэтому при $n\geqslant 4$

$$0<\frac{2^n}{n!}=\frac{8}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{2\ldots 2}{4\ldots n}\leqslant\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}=\frac{32}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{32}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$. $\blacktriangle$

8.24. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1983}{n}\right)^n$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{n}\right)^n$ (a — произвольное число).

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n^2}\right)^n$. 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+10}{2n-1}\right)^n$ (см. задачу **8.3**).

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}}$.

8.25. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, если:

1) $x_n=\sqrt{9+\frac{1}{n}}$. 2) $x_n=\left(8-\frac{1}{n^2}\right)^{-1/3}$.

3) $x_n=\sqrt[3]{\frac{n+0{,}25}{8n+1}}$. 4) $x_n=\frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$.

5) $x_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$.

6) $x_n=\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$. 7) $x_n=\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}+n}$.

8) $x_n=\sqrt{n^2-1}-n-1$. 9) $x_n=\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}$.

10) $x_n=\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n$. 11) $x_n=\dfrac{n}{2}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n}}-1\right)$.

8.26. Пусть $0<a\leqslant 1$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

8.27. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\sqrt[3n]{8}$. 2) $\sqrt[2n]{0{,}5}$. 3) $\sqrt[n^2]{6}$. 4) $\dfrac{\sqrt[n]{10}-2}{1+\sqrt[n]{0{,}01}}$.

5) $\sqrt[n]{2+\dfrac{1}{n}}$. 6) $\sqrt[n]{\dfrac{5n+1}{n+5}}$. 7) $\sqrt[n]{\dfrac{2n+5}{n-0{,}5}}$.

8) $\sqrt[n]{3^n+2^n}$. 9) $\dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{9}-1}$. 10) $\dfrac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{2}-1}$.

11) $4^{(n+2)/(n+1)}$. 12) $(1+11^n)^{1/(n+2)}$.

13) $a^{1/(n+p)}$, где $a>0$, $p>0$.

8.28. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\sqrt[n]{n^2}$. 2) $\sqrt[n]{5n}$. 3) $\sqrt[2n]{2n}$. 4) $\sqrt[4n]{n}$. 5) $\sqrt[n^2]{n}$.

6) $\sqrt[n]{n+3}$. 7) $\dfrac{1+\sqrt[n]{2}}{1+\sqrt[n]{2n}}$. 8) $\dfrac{\sqrt[n]{n^3}+\sqrt[n]{7}}{3\sqrt[n]{n^2}+\sqrt[n]{3n}}$.

9) $\sqrt[n]{3n-2}$. 10) $\sqrt[n]{n^3+3n}$. 11) $\sqrt[n]{\dfrac{2n^2-5n+3}{n^5+1}}$.

8.29. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n=0$, где $|q|<1$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{5^n}=0$. 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{3^n}=0$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$, где $|a|>1$, k — натуральное число.

8.30. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\dfrac{n^3+3^n}{n+3^{n+1}}$. 2) $\dfrac{n^{10}-1}{1+n\cdot 1{,}1^n}$. 3) $\sqrt[n]{3^n+n\cdot 2^n}$.

4) $\sqrt[n]{\dfrac{n^2+4^n}{n+5^n}}$. 5) $\sqrt[n]{\dfrac{10}{n}-\dfrac{1}{1{,}2^n}}$.

8.31. Пусть $0<a<1$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0.$$

8.32. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\dfrac{n\lg n}{n^2-1}$. 2) $\dfrac{5n+\lg n}{n-3{,}5}$. 3) $\dfrac{\log_2(n+3)}{n-1{,}3}$.

4) $\dfrac{\log_5(n^2+1)}{n}$. 5) $\dfrac{n-\lg n}{\log_2(4^n+1)}$.

8.33. Доказать, что для любого a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

8.34. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\dfrac{(-2)^n}{(n+2)!}$. 2) $\dfrac{1}{(0{,}3)^n n!}$. 3) $\dfrac{n\cdot 3^n+1}{n!+1}$. 4) $\dfrac{4^n+n^2\cdot 2^n-1}{n^4+(n!)^2}$.

5) $\dfrac{10^n+n!}{2^n+(n+1)!}$. 6) $\dfrac{(-3)^{n^2-n}}{(n^3)!}$. 7) $\dfrac{2^{n/2}+(n+1)!}{n(3^n+n!)}$.

4. Бесконечно большие последовательности.

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ называют *бесконечно большой*, если для каждого $\varepsilon>0$ существует такое натуральное N, что для любого $n\geqslant N$ верно неравенство

$$|x_n|>\varepsilon.$$

В этом случае пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty.$$

Последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом $+\infty$ (соответственно $-\infty$), если для каждого $\varepsilon>0$ существует натуральное N такое, что для любого $n\geqslant N$ верно неравенство $x_n>\varepsilon$ (соответственно $x_n<-\varepsilon$). Это записывают так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty \text{ (соответственно } \lim_{n\to\infty} x_n=-\infty).$$

Во всех этих случаях говорят, что последовательность имеет *бесконечный предел*.

Ясно, что всякая бесконечно большая последовательность является расходящейся в смысле определения 1.

Пример 14. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$.

$\triangle$ Пусть ε — произвольное положительное число, а N — такое натуральное число что $N>\varepsilon^2$ *). Тогда для всех $n\geqslant N$

*) Например, $N=E(\varepsilon^2)+1$.

верно неравенство $\sqrt{n} \geqslant \sqrt{N} > \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$. ▲

8.35. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} (5-0{,}5n) = -\infty$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n n = \infty$. 4) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$, где $|a| > 1$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n-100} = +\infty$. 6) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/p} = +\infty$, где $p \in \mathbb{N}$.

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \lg n = +\infty$. 8) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a n = +\infty$, где $a > 1$.

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a n = -\infty$, где $0 < a < 1$.

8.36. Доказать, что для того, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

8.37. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$) и для всех n, начиная с некоторого, $x_n \geqslant cy_n$ (соответственно $x_n \leqslant cy_n$), где $c > 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$).

8.38. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ и для всех n, начиная с некоторого, $|x_n| \geqslant cy_n$, где $c > 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

8.39. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = +\infty$, где $p \geqslant 1$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (2n-5)^5 = +\infty$. 4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\lg n)^3 = +\infty$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} (\log_a n)^p = +\infty$, где $a > 1$, $p \geqslant 1$.

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(0{,}5 - (-1)^n \sqrt[3]{n}\right) = \infty$.

7) $\lim\limits_{n\to\infty} (-n)^n = \infty$. 8) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(4\sqrt{n} - n\right) = -\infty$.

8.40. 1) Пусть $x_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty.$$

2) Пусть $x_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

8.41. Доказать, что $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность, если x_n равно:

1) $\left(\frac{n}{10}\right)^n$. 2) $\frac{n^2}{n+8}$. 3) $\frac{n!}{4^n}$. 4) $\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}$. 5) $\frac{2}{1-\sqrt[n]{n}}$.

6) $\frac{5^n}{n^2}$. 7) $\frac{a^n}{n^k}$, где $|a| > 1$, $k \in \mathbb{N}$.

8.42. 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и $y_n \geqslant c$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = +\infty$.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ и $y_n \leqslant c$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = -\infty$.

8.43. 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где a — это $+\infty$ или $-\infty$. Доказать, что:

а) Если для всех n, начиная с некоторого, $y_n \geqslant c > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = a$.

б) Если для всех n, начиная с некоторого, $y_n \leqslant c < 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = -a$.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и для всех n, начиная с некоторого, $|y_n| \geqslant c > 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$.

8.44. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5}{n} - n\right) = -\infty$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\lg n + 2\cos \pi n) = +\infty$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n+1} = +\infty$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (an+b) = +\infty$ при $a > 0$,

$\lim\limits_{n\to\infty} (an+b) = -\infty$ при $a < 0$, $b \in \mathbb{R}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4-100n}{n^2+100} = +\infty$. 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n}\right) = +\infty$.

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)} = -\infty$.

8.45. Записать с помощью символов $\forall$, $\exists$ определение того, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. 3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

8.46. Верны ли утверждения:

1) Всякая бесконечно большая последовательность неограничена.

2) Всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой?

8.47. Сформулировать в позитивной форме утверждения: последовательность: 1) не стремится к ∞; 2) не стремится к $+\infty$; 3) не стремится к $-\infty$.

8.48. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ неограничена, но не стремится к ∞, если:

1) $x_n = n^2\cos(\pi n/2)$. 2) $x_n = n^{(-1)^n}$.

3) $x_n = \dfrac{n}{1 + n\sin(\pi n/2)}$, $n \in \mathbb{N}$.

---

5. Теорема Больцано — Вейерштрасса. Частичный предел.

Теорема. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где a — число или одна из бесконечностей $+\infty$, $-\infty$, то любая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ имеет предел (конечный или бесконечный) и

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

Теорема Больцано — Вейерштрасса. Любая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.

Определение 4. Если $\{x_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, где a — число или одна из бесконечностей $+\infty$, $-\infty$, то a называют *частичным пределом последовательности* $\{x_n\}$.

Пример 15. Доказать, что всякая неограниченная последовательность имеет частичный предел, равный либо $+\infty$, либо $-\infty$.

△ Неограниченная последовательность обязательно неограничена либо сверху, либо снизу.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ неограничена снизу. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется член последовательности x_n такой, что $x_n < -\varepsilon$. Для $\varepsilon = 1$ найдется член последовательности x_{n_1} такой, что $x_{n_1} < -1$, его и примем за первый член подпоследовательности. Среди конечного числа членов последовательности с номерами от 1 до n_1 имеется наименьший, его обозначим m_1. Возьмем теперь $\varepsilon = 2$. Из неограниченности последовательности снизу следует, что найдется член x_{n_2} такой, что $x_{n_2} < -2$ и $x_{n_2} < m_1$. Последнее в силу выбора m_1 означает, что $n_2 > n_1$. Примем x_{n_2} за второй член подпоследовательности. Аналогично будем находить члены подпоследовательности x_{n_3} и т. д.

Докажем, что этот процесс не оборвется. Допустим, что найден член подпоследовательности x_{n_k}, $k \geqslant 2$, удовлетворяющий неравенству $x_{n_k} < -k$. Обозначим через m_k наименьший среди

членов последовательности от x_1 до x_{n_k}. Возьмем $\varepsilon = k+1$. В силу неограниченности снизу найдется член последовательности $x_{n_{k+1}}$ такой, что $x_{n_{k+1}} < -(k+1)$ и $x_{n_{k+1}} < m_k$. Из последнего следует, что $n_{k+1} > n_k$, и, значит, $x_{n_{k+1}}$ можно принять за $(k+1)$-й член подпоследовательности.

Таким образом, существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $x_{n_k} < -k$ для любого k и, значит,

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty.$$

Аналогично доказывается, что последовательность, неограниченная сверху, имеет подпоследовательность, пределом которой служит $+\infty$. ▲

Пусть L — множество всех частичных пределов последовательности $\{x_n\}$ (наряду с числами L может содержать и $+\infty$ и $-\infty$). Для любой последовательности множество L непусто.

Верхним пределом последовательности $\{x_n\}$ называют $\sup L$ и обозначают его $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, т. е. по определению

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \sup L;$$

аналогично определяют *нижний предел последовательности*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf L.$$

Например, если $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, то $L = \{+\infty\}$ и, следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty.$$

Пример 16. Для последовательности

$$x_n = \frac{(3\cos(\pi n/2) - 1)\,n + 1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

найти множество частичных пределов, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, а также $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$.

△ При $n = 4k$ имеем

$$x_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n},$$

и, значит, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k} = 2$, $2 < x_{4k} \leqslant 2 + \frac{1}{4}$, причем $x_4 = 9/4$. При $n = 4k+1$ или $n = 4k+3$ имеем

$$x_n = \frac{-n+1}{n} = -1 + \frac{1}{n},$$

и, значит, $-1 < x_n < 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{4k+3} = -1$. При $n = 4k+2$ имеем

$$x_n = \frac{-4n+1}{n} = -4 + \frac{1}{n},$$

значит, $-4 < x_n < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4k+2} = -4$.

Таким образом, числа 2, -1, -4 являются частичными пределами данной последовательности. Рассмотренные четыре подпоследовательности $\{x_{4k}\}$, $\{x_{4k+1}\}$, $\{x_{4k+2}\}$, $\{x_{4k+3}\}$ составляют вместе всю данную последовательность. Отсюда следует, что других частичных пределов данная последовательность не имеет.

Очевидно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = 2, \quad \varliminf_{n\to\infty} x_n = -4.$$

Из предыдущих рассмотрений следует также, что

$$\sup\{x_n\} = 9/4, \quad \inf\{x_n\} = -4. \ \blacktriangle$$

8.49. Указать сходящуюся подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, если x_n равно:

1) $(-1)^n$. 2) $\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$. 3) $n^{(-1)^n}$. 4) $n - 5E\left(\frac{n-1}{5}\right)$.

8.50. Привести пример последовательности, не имеющей ни одной сходящейся (к числу) подпоследовательности.

8.51. Привести пример неограниченной последовательности, имеющей сходящуюся (к числу) подпоследовательность.

8.52. Доказать, что для того, чтобы a (число, $+\infty$ или $-\infty$) было частичным пределом последовательности, необходимо и достаточно, чтобы в любой окрестности a содержалось бесконечно много членов этой последовательности.

8.53. Найти все частичные пределы последовательности $\{x_n\}$, если x_n равно:

1) $\frac{(-1)^n}{n+1}$. 2) $\frac{n^2}{n+5}$. 3) $\frac{1-n^3}{1+n^2}$. 4) $(-1)^n$.

5) $3^{(-1)^n n}$. 6) $\sin(\pi n/4)$. 7) $n\cos(\pi n/2)$.

8.54. У последовательности $\{x_n\}$ подпоследовательность $\{x_{2k}\}$ имеет пределом a, а подпоследовательность $\{x_{2k-1}\}$ имеет пределом b (a, b — числа или $+\infty$, $-\infty$). Доказать, что только a и b являются частичными пределами последовательности $\{x_n\}$.

8.55. Доказать, что всякая монотонная последовательность имеет только один частичный предел.

8.56. Для последовательности $\{x_n\}$ найти множество частичных пределов, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

1) $x_n = \cos(\pi n/3)$. 2) $x_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n}$.

3) $x_n = (1{,}5\cos(2\pi n/3))^n$. 4) $\{x_n\} = \left\{1,\ \frac{1}{10},\ \frac{2}{10},\ \ldots,\ \frac{9}{10},\ \frac{1}{10^2},\ \frac{2}{10^2},\ \ldots,\ \frac{99}{10^2},\ \ldots,\ \frac{1}{10^n},\ \frac{2}{10^n},\ \ldots,\ \frac{10^n-1}{10^n},\ \ldots\right\}$.

8.57. Для последовательности $\{x_n\}$ найти $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, а также $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$, если x_n равно:

1) $\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$. 2) $(-1)^n \frac{3n-1}{n+2}$.

3) $\frac{n^2\sin(\pi n/2)+1}{n+1}$. 4) $\frac{((-1)^n-1)n^2+n+1}{n}$.

5) $\frac{(1+\cos\pi n)n + \lg n}{\lg 2n}$.

---

6. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

Определение 5. Последовательность $\{x_n\}$ называют *фундаментальной*, если она удовлетворяет *условию Коши*: для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что для любого $n \geqslant N$ и любого $m \geqslant N$ верно неравенство

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Кратко это условие записывают так:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall n \geqslant N \, \forall m \geqslant N: \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Условие Коши формулируют и таким образом: для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что для любого $n \geqslant N$ и для любого натурального p верно неравенство

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Теорема (*критерий Коши*). Для того чтобы последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Пример 17. Доказать, что последовательность

$$x_n = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \ldots + \frac{\cos n}{3^n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

сходится.

$\triangle$ Оценим модуль разности

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+p}} = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1-\frac{1}{3^p}}{1-\frac{1}{3}} < \frac{1}{2\cdot 3^n} < \frac{1}{3^n}.$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}(1/3^n) = 0$, для этого ε существует N такое, что для любого

$n \geqslant N$ верно неравенство $1/3^n < \varepsilon$. Значит, если $n \geqslant N$, а p — произвольное натуральное число, то

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{3^n} < \varepsilon.$$

Таким образом, условие Коши выполнено, и поэтому данная последовательность сходится. ▲

Из критерия Коши следует, что для того, чтобы последовательность не имела конечного предела, необходимо и достаточно, чтобы она не удовлетворяла условию Коши, иначе говоря, удовлетворяла *отрицанию условия Коши*: существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого натурального N найдутся $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$ такие, что

$$|x_n - x_m| \geqslant \varepsilon;$$

короче,

$$\exists \varepsilon \forall N \exists n \geqslant N \exists m \geqslant N: \quad |x_n - x_m| \geqslant \varepsilon.$$

Пример 18. Доказать, что последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

расходится.

△ Оценим разность

$$x_{n+p} - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \ldots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}.$$

Если здесь взять $p = n$, то получим

$$x_{2n} - x_n \geqslant n/(n+n) = 1/2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда видно, что данная последовательность удовлетворяет отрицанию условия Коши. А именно, при $\varepsilon = 1/2$ для любого натурального N возьмем $n = N$, $m = 2N$, тогда будем иметь

$$|x_{2N} - x_N| = x_{2N} - x_N \geqslant 1/2.$$

Значит, данная последовательность не имеет конечного предела, т. е. расходится. ▲

8.58. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, если:

1) $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. 2) $x_n = \frac{n+1}{3n-2}$, $n \in \mathbb{N}$.

3) $x_n = 0,\underbrace{77\ldots7}_{n \text{ цифр}}$, $n \in \mathbb{N}$.

4) $x_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1}$, где $|q| < 1$, $n \in \mathbb{N}$.

5) $\{x_n\} = \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \ldots\right\}$.

6) $x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} + (-1)^{n-1}/n!$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

8.59. Пусть a_0 — целое неотрицательное число, $\{a_n\}$ — последовательность, члены которой — цифры. Рассмотрим последовательность конечных десятичных дробей $x_n = a_0{,}a_1a_2\ldots a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что эта последовательность фундаментальна.

8.60. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, если x_n равно:

1) $\frac{\sin a}{2} + \frac{\sin 2a}{2^2} + \frac{\sin 3a}{2^3} + \ldots + \frac{\sin na}{2^n}$, $a \in \mathbb{R}$.

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k q^k$, где $|q| < 1$, $|a_k| \leqslant C$, $k \in \mathbb{N}$.

3) $1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$. 4) $\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$.

8.61. Доказать, что фундаментальная последовательность ограничена.

8.62. Доказать, что у фундаментальной последовательности любая подпоследовательность фундаментальна.

8.63. Доказать, что для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N: \quad |x_n - x_N| < \varepsilon.$$

8.64. Пользуясь отрицанием условия Коши, доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится, если x_n равно:

1) $0{,}2^{(-1)^n n}$. 2) $\frac{n\cos\pi n - 1}{2n}$. 3) $(-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

4) $\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$. 5) $\frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^2}$.

---

7. Монотонные последовательности. Число e.

Теорема Вейерштрасса. Если последовательность монотонна, начиная с некоторого номера, и ограничена, то эта последовательность имеет конечный предел.

В частности, всякая монотонная ограниченная последовательность имеет конечный предел.

Пример 19. Доказать, что последовательность

$$x_n = \frac{n!}{(2n+1)!!} \text{ *)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

имеет предел, и найти его.

△ Составим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!\cdot(2n+1)!!}{(2n+3)!!\cdot n!} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

*) $(2n+1)!!$ — произведение всех нечетных чисел от 1 до $2n+1$ включительно.

Поскольку $(n+1)/(2n+3) < 1/2$ для любого $n \geqslant 1$, $x_{n+1} < \frac{1}{2} x_n < x_n$. Значит, данная последовательность — убывающая. Очевидно, для любого $n \geqslant 1$ выполнены неравенства $0 < x_n \leqslant x_1 = 1/3$, т. е. последовательность ограничена. Отсюда следует, что она сходится.

Обозначим $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Последовательность $\{x_{n+1}\}$ является подпоследовательностью данной последовательности, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = c$. Переходя теперь к пределу в равенстве $x_{n+1} = x_n \cdot \frac{n+1}{2n+3}$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+3} \cdot \lim_{n\to\infty} x_n,$$

откуда $c = \frac{1}{2} c$, $c = 0$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. ▲

Пример 20. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, и найти его.

△ В примере 26, 1) § 7 было доказано, что данная последовательность строго возрастает. Докажем ее ограниченность. Очевидно, для любого $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \geqslant 0 \quad \text{и} \quad x_n^2 < x_{n+1}^2 = 6 + x_n,$$

т. е.

$$x_n^2 - x_n - 6 < 0,$$

откуда $x_n < 3$.

Таким образом, $\{x_n\}$ — ограниченная возрастающая последовательность и, значит, существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Заметим, что $c > 0$.

Переходя к пределу в равенстве $x_{n+1}^2 = 6 + x_n$ и учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = c$, получаем $c^2 = 6 + c$, откуда находим $c = 3$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$. ▲

Важным примером возрастающей последовательности является последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$x_{n+1} > x_n$, $2 \leqslant x_n < 3$. Предел этой последовательности — иррациональное число, его обозначают e, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Заметим, что $e = 2{,}718281828459045\ldots$

Пример 21. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k, \quad \text{где} \quad k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2.$$

△ Очевидно, $\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n > 0$, а из неравенства

$$1 + \frac{k}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k, \qquad n \in \mathbb{N},$$

следует, что

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{kn} < e^k.$$

Значит, данная последовательность ограничена.

Обозначим общий член последовательности через x_n и рассмотрим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1 + \frac{k}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n} = \left(\frac{1 + \frac{k}{n+1}}{1 + \frac{k}{n}}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{n(n+k+1)}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1} \frac{n+k}{n}.$$

Так как $(n+1)(n+k) = n(n+k+1) + k$, то

$$\frac{n(n+k+1)}{(n+1)(n+k)} = \frac{(n+1)(n+k) - k}{(n+1)(n+k)} = 1 - \frac{k}{(n+1)(n+k)}.$$

В силу неравенства Бернулли

$$\left(\frac{n(n+k+1)}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{k}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1} > 1 - \frac{k}{n+k} = \frac{n}{n+k}.$$

Учитывая это, получаем

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n(n+k+1)}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1} \frac{n+k}{n} > \frac{n}{n+k} \cdot \frac{n+k}{n} = 1,$$

т. е. $x_{n+1} > x_n$ и, значит, $\{x_n\}$ — возрастающая последовательность. Из доказанного следует, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Рассмотрим подпоследовательность $x_{pk} = \left(\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p\right)^k$ при $n = pk$, $p \in \mathbb{N}$. Так как $\lim\limits_{p\to\infty} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^p = e$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_{pk} = e^k$. Значит, и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{p\to\infty} x_{pk} = e^k. \ ▲$$

8.65. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, и найти ее предел, если x_n равно:

1) $\frac{n^3}{10^n}$. 2) $\frac{2^n}{n!}$.

3) $x_1 = 8$, $x_2 = \frac{8}{1} \cdot \frac{11}{7}$, …, $x_n = \frac{8}{1} \cdot \frac{11}{7} \cdots \frac{3n+5}{6n-5}$, …

8.66. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, если x_n равно:

1) $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ *). 2) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}$.

3) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$.

8.67. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, и найти его, если:

1) $x_1=13,\ x_{n+1}=\sqrt{12+x_n}$.

2) $x_1=\sqrt[k]{5},\ x_{n+1}=\sqrt[k]{5x_n}$, где $k\in\mathbb{N}$.

3) $x_1=\sqrt[k]{a},\ x_{n+1}=\sqrt[k]{ax_n}$, где $k\in\mathbb{N},\ a>0$.

4) $x_{n+1}=\frac{4}{3}x_n-x_n^2$; а) $x_1=1/6$; б) $x_1=1/2$; в) $x_1=7/6$.

5) $x_1=1,\ x_{n+1}=1+1/x_n,\ n\in\mathbb{N}$. (Указание: рассмотреть подпоследовательности $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$.)

8.68. Доказать, что последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ монотонно убывает и

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e.$$

8.69. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, где x_n равно:

1) $\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^n,\ k\in\mathbb{N}$. 2) $\left(\frac{2^n+1}{2^n}\right)^{2^n}$. 3) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

4) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$. 5) $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$. 6) $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

8.70. Пусть $\{k_n\}$ — последовательность натуральных чисел, $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=+\infty$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}=e.$$

8.71. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0.$$

(Указание: доказать, что $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}$.)

8.72. Последовательность $\{x_n\}$ сходится, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Доказать, что сходится и последовательность $\{|x_n|\}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

*) $(2n)!!$ — произведение всех четных чисел от 2 до $2n$ включительно.

8.73. Привести пример расходящейся последовательности $\{x_n\}$, для которой последовательность $\{|x_n|\}$ сходится.

8.74. Привести пример такой последовательности $\{x_n\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ и из двух последовательностей $\{\operatorname{sign}x_n\}$, $\{(\operatorname{sign}x_n)^2\}$: 1) обе сходятся; 2) обе расходятся; 3) первая расходится, а вторая сходится.

8.75. Привести пример такой последовательности $\{x_n\}$, что:

1) $x_n>-1$ для любого $n\in\mathbb{N}$, а $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$.

2) $x_n<2$ для любого $n\in\mathbb{N}$, а $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

3) $x_n>100$ для $n=1,2,\ldots,100$, а $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=5$, и для любого N найдутся $n\geqslant N$ и $m\geqslant N$ такие, что $x_n<5$, а $x_m>5$.

8.76. Привести пример таких последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, что:

1) $x_n<y_n$ для любого $n\in\mathbb{N}$, но $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

2) $x_n>y_n$ для $n=1,2,\ldots,1000$, но $\lim\limits_{n\to\infty}x_n<\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

3) $x_n/y_n\geqslant1000$ для любого $n\in\mathbb{N}$, но $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

8.77. Привести пример последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, имеющих одно и то же множество значений и таких, что:

1) $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, но $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

2) $\{x_n\}$ сходится, а $\{y_n\}$ расходится.

8.78. Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq\lim\limits_{n\to\infty}y_n$. Множества значений этих последовательностей совпадают. Доказать, что эти множества конечны.

8.79. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x,\ m_n=\inf\limits_{k\geqslant n}\{x_k\},\ M_n=\sup\limits_{k\geqslant n}\{x_k\},\ n\in\mathbb{N}$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}m_n=\lim_{n\to\infty}M_n=x.$$

8.80. У последовательности $\{x_n\}$ подпоследовательности $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$ имеют один и тот же предел. Доказать, что и сама последовательность сходится к этому пределу.

8.81. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$, $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=b,\ a\neq b$. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится.

8.82. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится, если x_n равно:

1) $\log_a(2+(-1)^{n^2}),\quad a>0,\ a\neq1$.

2) $\arcsin\frac{(-1)^n n}{n+1}$. 3) $\frac{2^{n+1}-(-3)^n}{(-2)^n+3^{n+1}}$.

8.83. Доказать, что последовательность:

1) $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k, \quad n \in \mathbb{N}$, сходится.

2) $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k, \quad n \in \mathbb{N}$, расходится.

8.84. Доказать, что если $x_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$.

8.85. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 0$.

8.86. Доказать, что сходящаяся последовательность достигает хотя бы одной из своих граней — верхней или нижней.

8.87. Привести пример последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей условию

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geqslant N\colon \quad x_n < \varepsilon$$

и такой, что 1) она не имеет предела; 2) она имеет предел. Может ли этот предел быть равным 1?

8.88. Сформулировать на языке «ε — N» отрицание того, что $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность, и записать его, используя символы $\exists$, $\forall$.

8.89. Является ли обязательно число a пределом последовательности $\{x_n\}$, если 1) существует такое натуральное число N, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $n \geqslant N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$; 2) для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие натуральные числа N и $n \geqslant N$, что $|x_n - a| < \varepsilon$?

8.90. Пусть $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Доказать, что:

1) $\forall N \exists n_0 \geqslant N \forall n > n_0\colon x_n < x_{n_0}$.

2) $\forall N \exists n_0 \geqslant N \forall n \quad (1 \leqslant n < n_0)\colon \; x_n > x_{n_0}$.

8.91. Пусть K — множество всех сходящихся последовательностей, а $K_1, K_2, \ldots, K_8$ — множества всех последовательностей, удовлетворяющих соответственно условиям:

1. $\exists \varepsilon > 0 \exists N \exists n \geqslant N\colon |x_n| < \varepsilon$.
2. $\exists \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geqslant N\colon |x_n| < \varepsilon$.
3. $\exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geqslant N\colon |x_n| < \varepsilon$.
4. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \exists n \geqslant N\colon |x_n| < \varepsilon$.
5. $\exists \varepsilon > 0 \forall N \forall n \geqslant N\colon |x_n| < \varepsilon$.
6. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geqslant N\colon |x_n| < \varepsilon$.

7. $\forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geqslant N\colon |x_n| < \varepsilon$.
8. $\forall \varepsilon > 0 \forall N \forall n \geqslant N\colon |x_n| < \varepsilon$.

1) Какие из следующих включений верны: а) $K_6 \subset K_2$; б) $K_2 \subset K_6$; в) $K_7 \subset K_2$; г) $K_8 \subset K$; д) $K \subset K_8$?
2) Для каких $j = 1, 2, \ldots, 8$ верно включение $K_j \subset K$?
3) Какие из множеств K_j $(j = 1, 2, \ldots, 8)$ содержат как сходящиеся, так и расходящиеся последовательности?
4) Какие из множеств K_j $(j = 1, 2, \ldots, 8)$ содержат неограниченные последовательности?
5) Какому из условий 1—8 удовлетворяет любая последовательность?
6) Какие из множеств K_j $(j = 1, 2, \ldots, 8)$ совпадают?

8.92. Доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a \exists N \forall n \geqslant N\colon \quad |x_n - a| < \varepsilon,$$

то $\{x_n\}$ — сходящаяся последовательность. Доказать, что верно и обратное.

8.93. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится тогда и только тогда, когда

$$\exists \varepsilon > 0 \forall a \forall N \exists n \geqslant N\colon \quad |x_n - a| \geqslant \varepsilon$$

(сравните эту запись с определением расходящейся последовательности, стр. 182).

8.94. Последовательность $\{y_k\}$ получена перестановкой членов последовательности $\{x_n\}$, т. е. для любого n существует k_n такое, что $x_n = y_{k_n}$, причем, если $n_1 \neq n_2$, то $k_{n_1} \neq k_{n_2}$, и обратно, для любого k существует такое n_k, что $y_k = x_{n_k}$, причем, если $k_1 \neq k_2$, то $n_{k_1} \neq n_{k_2}$. Доказать, что:

1) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то и $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = a$.

2) Если $\{x_n\}$ расходится, то и $\{y_k\}$ расходится.

8.95. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\frac{n!}{n^n}$. 2) $\frac{n^2-4}{n^4+n^2-1}$. 3) $\frac{n \sin n!}{n\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$.

4) $\frac{n \operatorname{arctg} n}{n^2-2}$. 5) $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k$. 6) $\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{(n-1)/(n+1)}$.

7) $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{(1-\sqrt{n})/(1-n)}$. 8) $\left(\frac{2n-1}{5n+1}\right)^{n^2}$.

9) $\left(\frac{3n^2-n+1}{2n^2+n+1}\right)^{n^3/(1-n)}$. 10) $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

8.96. Пусть $a_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = q$, где $q > 1$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

8.97. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$, $a > 0$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

8.98. Последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел a. На координатной плоскости проведены прямые AA_n через точки $A(a; a^2)$ и $A_n(x_n; x_n^2)$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть a_n — абсцисса точки пересечения прямой AA_n с осью Ox. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

8.99. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n^2+1)^2 - (n^2-1)^2}$. 2) $\frac{(n^2+3n+4)^3 - (n^2+3n-4)^3}{(n^2+5n+6)^3 - (n^2+5n-6)^3}$.

3) $\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1}$. 4) $n - \frac{3}{\frac{3}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}$.

5) $\frac{(2+n)^{100} - n^{100} - 200n^{99}}{n^{98} - 10n^2 + 1}$. 6) $\frac{\lg^2 10n}{\lg^2 n}$.

7) $\frac{\ln(n^2 - n + 1)}{\ln(n^{10} + n + 1)}$. 8) $\frac{\lg(n^2 + 2n\cos n + 1)}{1 + \lg(n+1)}$.

9) $n^2\left(\left(1 + \frac{p}{n}\right)^q - \left(1 + \frac{q}{n}\right)^p\right)$, где $p, q \in \mathbb{N}$.

8.100. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\frac{2^n + 3^{-n}}{2^{-n} - 3^n}$. 2) $\frac{a^n}{1+a^n}$, $a \neq -1$.

3) $\frac{a^n}{1+a^{2n}}$. 4) $\frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$, $a \neq 0$.

8.101. В круг радиуса R вписан квадрат, в этот квадрат вписан новый круг, в него новый квадрат и т. д. Пусть S_1 — площадь первого (исходного) круга, S_2 — площадь второго круга и т. д., σ_1 — площадь первого квадрата, σ_2 — площадь второго квадрата и т. д. Найти

$$\lim_{n\to\infty}(S_1 + S_2 + \dots + S_n), \quad \lim_{n\to\infty}(\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n).$$

8.102. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

8.103. Пусть $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия с разностью $d \neq 0$. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \dots + \frac{1}{a_na_{n+1}}\right)$, если $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\right)$, если $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

8.104. Пусть a — цифра, $a \neq 0$. Найти

$$\lim_{n\to\infty} 10^{-n}(a + aa + \dots + \underbrace{aa\dots a}_{n\ \text{знаков}}).$$

8.105. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_k, a_1, a_2, \dots, a_k$ — положительные числа. Существует ли

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1a_1^{n+1} + p_2a_2^{n+1} + \dots + p_ka_k^{n+1}}{p_1a_1^n + p_2a_2^n + \dots + p_ka_k^n}?$$

Если существует, то найти этот предел.

8.106. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$. 2) $\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}$.

3) $\sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{n(n-1)}$.

4) $\sqrt[3]{n^3 + n^2 + 1984} - n$.

5) $n^{3/2}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n})$. 6) $\frac{n^3}{3}\left(\sqrt[3]{1 + \frac{3}{n^3}} - 1\right)$.

8.107. При каких a последовательность

$$x_n = \sqrt{an^2 + bn + 2} - n, \quad n \in \mathbb{N},$$

имеет предел? Чему равен этот предел?

8.108. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+a_1)(n+a_2)} - n\right)$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+a_1)(n+a_2)(n+a_3)} - n\right)$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[p]{(n+a_1)(n+a_2)\dots(n+a_p)} - n\right)$, $p \in \mathbb{N}$.

8.109. Пусть $x_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ при $0 < \alpha < 1$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ при $a > 1$.

8.110. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\dfrac{1}{n(\sqrt{n^2-1}-n)}$. 2) $\dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

3) $\dfrac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n}$. 4) $\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n}-n-1}$.

5) $\dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}}$. 6) $\dfrac{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}$. 7) $\dfrac{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}{n+2+\sqrt{n+1}}$.

8.111. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\dfrac{n^2+3n-2}{1+2+\ldots+n}$. 2) $\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^3}$.

3) $\dfrac{1-2+3-\ldots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}$. 4) $\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

5) $\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)}{n^3}$.

6) $\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2}-\dfrac{n}{3}$. 7) $\dfrac{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{n^3}$.

8) $\dfrac{1}{n}\left(\left(a+\dfrac{1}{n}\right)^2+\left(a+\dfrac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(a+\dfrac{n-1}{n}\right)^2\right)$.

8.112. Доказать, что последовательность

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{n^3}, \qquad n\in\mathbb{N},$$

имеет предел, и найти его.

8.113. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

1) $x_n=\left(1-\dfrac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1-\dfrac{2}{3\cdot 4}\right)\ldots\left(1-\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}\right)$, $n\in\mathbb{N}$.

2) $x_1=1$, $x_n=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$.

8.114. Пусть $x_n\ne 1$, $n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+x_n^2+\ldots+x_n^k-k}{x_n-1}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

8.115. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

8.116. Какие из утверждений верны:

1) Если $a_n^2\to a^2$, то $a_n\to a$.

2) Если $a_n^3\to a^3$, то $a_n\to a$?

8.117. Привести примеры последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$ и

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=1$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=+\infty$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$ не существует.

8.118. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=0$. Следует ли отсюда, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$;

2) хотя бы одна из последовательностей $\{x_n\}$ или $\{y_n\}$ стремится к нулю?

8.119. Привести примеры расходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, для которых сходится последовательность: 1) $\{x_n+y_n\}$; 2) $\{x_ny_n\}$; 3) $\{x_n/y_n\}$.

8.120. Последовательность $\{x_n\}$ сходится, а последовательность $\{y_n\}$ расходится. Доказать, что при $b\ne 0$ последовательность $\{ax_n+by_n\}$ расходится.

8.121. Последовательность $\{x_n\}$ сходится, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$, $x\ne 0$, последовательность $\{y_n\}$ расходится. Доказать, что последовательность $\{x_ny_n\}$ не сходится.

8.122. Привести пример последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таких, что $\{x_n\}$ сходится, $\{y_n\}$ расходится, а $\{x_ny_n\}$ сходится.

8.123. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$, $x_n\ne 0$, $n\in\mathbb{N}$.

1) Существует ли $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$?

2) Доказать, что если этот предел существует и равен q, то $|q|\leqslant 1$.

3) Может ли последовательность $\{x_{n+1}/x_n\}$ быть неограниченной?

8.124. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\sqrt[n]{3^n-2^n}$. 2) $\sqrt[n]{\dfrac{2n^3+1}{3n^3-2}}$.

3) $\sqrt[n]{a^n+b^n}$, $a>0$, $b>0$. 4) $\dfrac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{16}-1}$.

5) $\dfrac{3\sqrt[n]{16}-4\sqrt[n]{8}+1}{(\sqrt[n]{2}-1)^2}$. 6) $\dfrac{3}{1-\sqrt[n]{8}}-\dfrac{5}{1-\sqrt[n]{32}}$.

7) $\dfrac{\sqrt[n]{a^m}-1}{\sqrt[n]{a^k}-1}$, $a>1$, $k,m\in\mathbb{N}$.

8.125. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$.

8.126. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/\sqrt{n}}=1$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/\sqrt{n}}=1$, $a>0$.

8.127. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, $a>0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}=1$.

8.128. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k, a_1, a_2, \ldots, a_k$ — положительные числа. Существует ли

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p_1a_1^n+p_2a_2^n+\ldots+p_ka_k^n}\,?$$

Если существует, то найти этот предел.

8.129. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\sqrt[3n]{n}$. 2) n^{p/n^k}, $p, k\in\mathbb{N}$.

3) $\sqrt[n]{n+a}$. 4) $\sqrt[n]{an+b}$.

5) $\sqrt[n]{n^3-3n+1}$. 6) $\sqrt[2n]{n^2-1}$.

7) $\sqrt[n]{2^nn^2+2n-1}$. 8) $\sqrt[n]{\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}}$.

9) $\dfrac{\sqrt[n]{n^4}+2\sqrt[n]{n^2}-3}{\sqrt[n]{n^2}-3\sqrt[n]{n}+2}$. 10) $\sqrt[3n]{\dfrac{n^4-2n+3}{n^2+1}}$.

11) $\sqrt[n^2]{\dfrac{n-1}{n+1}}+\sqrt[n]{3^nn^3+2}$.

8.130. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+\ldots+a_{p-1}n+a_p}{b_0n^q+b_1n^{q-1}+\ldots+b_{q-1}n+b_q}}=1,$$

где $p, q\in\mathbb{N}$, $a_0/b_0>0$.

8.131. Доказать, что если для любого $n\in\mathbb{N}$

$$0<\frac{a}{n^k}\leqslant x_n\leqslant bn^p,\quad k,p\in\mathbb{N},$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=1.$$

8.132. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/\sqrt{n}}=1$.

8.133. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, $x_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{1/x_n}=1$.

8.134. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[n]{\lg n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$.

8.135. Пусть $|q|<1$,

$$S_n=q+2q^2+3q^3+\ldots+nq^n,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Доказать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, и найти его.

8.136. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg(5n^2+3n+1)}{\sqrt{n}+1}.$$

8.137. Доказать, что для любых $a>0$, $a\neq1$, $\alpha>0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n^\alpha}=0.$$

8.138. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ и $x_n>0$, $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что для любого $a>0$, $a\neq1$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a x_n}{x_n}=0.$$

8.139. Привести пример неограниченной последовательности, не являющейся бесконечно большой.

8.140. Доказать, что любая подпоследовательность бесконечно большой последовательности является бесконечно большой последовательностью.

8.141. Сформулировать на языке «$\varepsilon - N$» отрицание того, что $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность, и записать его с помощью символов $\exists$, $\forall$.

8.142. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-n+3}{n^2+1}=+\infty$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-100}{n^2+100}=+\infty$.

8.143. При каких a последовательность

$$x_n=\frac{n^4+1}{n^3-2}-\frac{an^2}{5n+2},\qquad n\in\mathbb{N},$$

сходится к 1) $+\infty$; 2) $-\infty$; 3) конечному пределу?

8.144. При каких p и q из $\mathbb{N}$ последовательность

$$x_n=\frac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+\ldots+a_{p-1}n+a_p}{b_0n^q+b_1n^{q-1}+\ldots+b_{q-1}n+b_q},\quad n\in\mathbb{N},$$

где $a_0\neq0$, $b_0\neq0$, имеет: 1) конечный предел; 2) бесконечный предел?

8.145. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n!}=+\infty$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\sqrt{n-1}}=+\infty$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{\log_a(n+1)}=+\infty, a>1$. 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n!}{n}=+\infty$.

8.146. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}=-\infty$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=-\infty$.

8.147. При каких α последовательность

$$x_n=\sqrt{n^2+n^\alpha}-n,\ n\in\mathbb{N},$$

сходится к 1) $+\infty$; 2) конечному пределу? Во втором случае найти этот предел.

8.148. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, если x_n равно:

1) $\dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)2n}{n^n}$. 2) $\sqrt[n]{n!}$.

3) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$. 4) $\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)^{n!}$.

5) $\dfrac{1}{n}(1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n})$.

8.149. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, $y_n\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$, и для всех n, начиная с некоторого, $|y_n|\leqslant C$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\infty.$$

8.150. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, где x — не равное нулю число, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$ (или $+\infty$, $-\infty$). Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\infty$ (соответственно $+\infty$, $-\infty$) при $x>0$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\infty$ (соответственно $-\infty$, $+\infty$) при $x<0$.

8.151. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$. Верно ли:

1) Если $|y_n|\leqslant C$, $n\in\mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\infty$.

2) Если $y_n\geqslant x_n$, $n\in\mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$.

3) Если $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\infty$?

8.152. 1) Пусть

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty,\ \lim_{n\to\infty}y_n=+\infty$$

или

$$\lim_{n\to\infty}x_n=-\infty,\ \lim_{n\to\infty}y_n=-\infty.$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}x_ny_n=+\infty.$$

2) Пусть

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty,\ \lim_{n\to\infty}y_n=-\infty.$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}x_ny_n=-\infty.$$

8.153. Указать такие последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, что

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty,\ \lim_{n\to\infty}y_n=+\infty$$

и

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=+\infty$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=1$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=-\infty$.

4) Последовательность $\{x_n-y_n\}$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

8.154. Указать такие последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, что

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=+\infty$$

и

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=0$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=1$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=+\infty$.

4) Последовательность $\{x_n/y_n\}$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

8.155. Указать такие последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, что

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=\infty$$

и

1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=1$. 3) $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\infty$.

4) Последовательность $\{x_ny_n\}$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

8.156. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, то последовательность $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right\}$ неограничена.

8.157. 1) Доказать, что если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таковы, что

$$\lim_{n\to\infty}(|x_n+y_n|-|x_n-y_n|)=+\infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=\lim_{n\to\infty}|y_n|=\lim_{n\to\infty}x_ny_n=+\infty.$$

2) Доказать, что верно и обратное утверждение.

8.158. 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, $m_n=\inf\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}$, $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}m_n=+\infty$.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$, $M_n=\sup\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}$, $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}M_n=-\infty$.

8.159. Привести пример расходящейся последовательности, имеющей только один частичный предел.

8.160. Доказать, что последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена и имеет один частичный предел.

8.161. У последовательности $\{x_n\}$ подпоследовательности $\{x_{2k}\}$, $\{x_{2k-1}\}$ и $\{x_{3k}\}$ сходятся. Доказать, что сходится и сама последовательность.

8.162. Доказать, что всякая неограниченная последовательность либо является бесконечно большой, либо имеет конечный частичный предел.

8.163. Последовательности $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ таковы, что для любого k существует n_k такое, что $y_k=x_{n_k}$. Известно, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел. Следует ли отсюда, что и последовательность $\{y_k\}$ имеет предел?

8.164. Для последовательности $\{x_n\}$ найти множество частичных пределов, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$, $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$, если x_n равно:

1) $(\cos(\pi n/2))^{n+1}$. 2) $(1+(-1)^n n)/n$.

3) $(-n)^{\sin(\pi n/2)}$. 4) $\dfrac{1}{n}+\sin\dfrac{\pi n}{3}$.

5) $\dfrac{(1-(-1)^n)\,2^n+1}{2^n+3}$. 6) $\sqrt[n]{4^{(-1)^n}+2}$. 7) $2^{(-1)^n n}\cdot n$.

8) $\dfrac{1}{2}\left(n-2-3E\left(\dfrac{n-1}{3}\right)\right)\left(n-3-3E\left(\dfrac{n-1}{3}\right)\right)$.

8.165. Найти множество частичных пределов последовательностей:

1) $\left\{1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{2},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{2}{4},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{4},\ \dfrac{5}{4},\ \ldots,\ \dfrac{1}{2^n},\ \ldots,\ \dfrac{2^n+1}{2^n},\ \ldots\right\}$.

2) $\left\{1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{2},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{2}{4},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{4},\ \ldots,\ \dfrac{9}{4},\ \ldots,\ \dfrac{1}{2^n},\ \dfrac{2}{2^n},\ \ldots,\ \dfrac{3^n}{2^n},\ \ldots\right\}$.

8.166. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что

$$x_1=0,\qquad x_{2k}=\frac{x_{2k-1}}{2},\qquad x_{2k+1}=1+x_{2k},\qquad k\in\mathbb{N}.$$

Найти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$.

8.167. Доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ не достигает своей: а) верхней грани M, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n=M$; б) нижней грани m, то $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n=m$.

8.168. Последовательность $\{x_n\}$ и число a таковы, что

$$\forall\varepsilon>0\,\exists n:\quad |x_n-a|<\varepsilon.$$

Является ли число a частичным пределом последовательности $\{x_n\}$?

8.169. Доказать, что у любой последовательности есть монотонная подпоследовательность.

8.170. Доказать, что для всякой последовательности $\{x_n\}$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$ являются ее частичными пределами.

8.171. 1) Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу, $m_n=\inf\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}$. Доказать, что последовательность $\{m_n\}$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty}m_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n.$$

2) Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, $M_n=\sup\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}$. Доказать, что последовательность $\{M_n\}$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty}M_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n.$$

8.172. Доказать, что множество частичных пределов последовательности замкнуто (см. задачу **10.94**).

8.173. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — ограниченные последовательности. Доказать, что

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n).$$

8.174. Доказать, что если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$:

1) ограничены сверху, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n;$$

2) ограничены снизу, то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n)\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n+\underline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n\text{*)}.$$

---

*) Считают, что $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$, $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$.

8.175. Пусть $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что:

1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

8.176. Привести пример последовательности, у которой множество частичных пределов совпадает с множеством значений последовательности и 1) конечно; 2) счетно.

8.177. Указать последовательность, множеством частичных пределов которой является множество натуральных чисел.

8.178. Указать последовательность, частичными пределами которой были бы: 1) все числа вида $1/n$, $n \in \mathbb{N}$; 2) все рациональные числа. Может ли множество частичных пределов последовательности состоять только из этих чисел?

8.179. На плоскости даны несовпадающие точки A, B, C. Точка A_1 — середина отрезка CB, точка A_2 — середина отрезка AA_1, A_3 — середина CA_2, ..., A_{2k} — середина AA_{2k-1}, A_{2k+1} — середина CA_{2k}, ... Найти частичные пределы последовательности точек $\{A_n\}$.

8.180. Построить последовательность, множеством частичных пределов которой является отрезок $[a; b]$.

8.181. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n+1}) = 0, \quad a = \varliminf_{n\to\infty} x_n, \quad b = \varlimsup_{n\to\infty} x_n, \quad a \neq b.$$

Доказать, что любое число из отрезка $[a; b]$ является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$.

8.182. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что $x_{n+1} > x_n - \alpha_n$, где $\alpha_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Пусть $a = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $b = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. Доказать, что любое c, $a \leqslant c \leqslant b$, является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$.

8.183. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — фундаментальные последовательности. Доказать, что 1) $\{x_n + y_n\}$ — фундаментальная последовательность; 2) $\{x_n y_n\}$ — фундаментальная последовательность; 3) если $|y_n| \geqslant c > 0$, $n \in \mathbb{N}$, то $\{x_n/y_n\}$ — фундаментальная последовательность.

8.184. Две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называют эквивалентными и пишут $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, если

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0.$$

Доказать, что 1) $\{x_n\} \sim \{x_n\}$ (рефлексивность); 2) если $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, то $\{y_n\} \sim \{x_n\}$ (симметричность); 3) если $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, а $\{y_n\} \sim \{z_n\}$, то $\{x_n\} \sim \{z_n\}$ (транзитивность).

8.185. Множество всех попарно эквивалентных последовательностей называют классом эквивалентных последовательностей.

Доказать, что любые два класса эквивалентных последовательностей либо не пересекаются, либо совпадают.

8.186. Пусть A — класс эквивалентных последовательностей и существует последовательность $\{x_n\} \in A$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Доказать, что для любой последовательности $\{y_n\} \in A$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$.

Если существует $\{x_n\} \in A$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то класс A называют нулевым.

8.187. Пусть A' и A'' — классы эквивалентных последовательностей, $\{x'_n\} \in A'$, $\{x''_n\} \in A''$. Рассмотрим два класса эквивалентных последовательностей: $A' + A''$ — класс, содержащий $\{x'_n + x''_n\}$; $A' \cdot A''$ — класс, содержащий $\{x'_n x''_n\}$.

Доказать, что 1) класс $A' + A''$ не зависит от выбора последовательностей $\{x'_n\} \in A'$ и $\{x''_n\} \in A''$; 2) если последовательности, входящие в A' и в A'', ограничены, то класс $A' \cdot A''$ не зависит от выбора последовательностей $\{x'_n\} \in A'$ и $\{x''_n\} \in A''$.

8.188. Доказать, что множество всех классов эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел с введенными в задаче 8.187 сложением $A' + A''$ и умножением $A' \cdot A''$ классов является полем.

8.189. Доказать, что если A — ненулевой класс эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел, то для любой последовательности $\{r_n\} \in A$ существует такой номер N, что все члены последовательности r_n с номерами $n \geqslant N$ имеют один и тот же знак, причем этот знак не зависит от выбора последовательности $\{r_n\} \in A$. Если этот знак — «плюс», то по определению полагают $A > 0$, а если — «минус», то $A < 0$.

8.190. Доказать, что множество всех классов эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел с определенными сложением и умножением (задача 8.187) и сравнением с нулем (задача 8.189) образует непрерывное упорядоченное поле, т. е. поле действительных чисел.

8.191. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, если x_n равно:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin k\alpha}{k(k+1)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}$, где $|a_k| \leqslant C$, $k \in \mathbb{N}$.

8.192. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится, если x_n равно:

1) $\sqrt[n]{((-1)^{n+1}-1)^n+1}$. 2) $\cos n$. 3) $E\left(\frac{n^2+1}{3}\right) - \frac{n^2}{3}$.

4) $\frac{n^2}{p} - E\left(\frac{n^2+1}{p}\right)$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 3$. 5) $\sin n$.

6) $\cos(an + b)$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. 7) $\operatorname{tg} n$.

8.193. Пусть l_n, $n \in \mathbb{N}$, — число натуральных чисел p, удовлетворяющих неравенству

$$100n + 1 \leqslant p^2 \leqslant 100(n+1).$$

Доказать, что последовательность $\{l_n\}$ расходится.

8.194. Пусть l_n, $n \in \mathbb{N}$, — число натуральных чисел p, удовлетворяющих неравенству

$$n^k + 1 \leqslant p^{k+1} \leqslant (n+1)^k,$$

где k — данное натуральное число. Доказать, что последовательность $\{l_n\}$ расходится.

8.195. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что последовательность $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} x_n\right\}$ сходится. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

8.196. Последовательность $\{x_n\}$ монотонна, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Доказать, что последовательность

$$S_n = x_1 - x_2 + \ldots + (-1)^{n-1}x_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

сходится.

8.197. Доказать, что монотонная ограниченная последовательность фундаментальна.

8.198. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что $|x_{n+1} - x_n| \leqslant C\alpha^n$, где $0 < \alpha < 1$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится.

8.199. Доказать, что для любого $x \in \mathbb{R}$ последовательность

$$S_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

сходится.

8.200. Привести пример расходящейся последовательности $\{x_n\}$ такой, что для любого $p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+p} - x_n| = 0.$$

8.201. Последовательность $\{x_n\}$ не сходится. Доказать, что существует последовательность натуральных чисел $\{p_n\}$ такая, что последовательность $\{x_{n+p_n} - x_n\}$ не стремится к 0.

8.202. Для последовательности $\{x_n\}$ обозначим

$$M_n = \sup_{k\geqslant n,\, l\geqslant n} \{|x_k - x_l|\}.$$

Доказать: для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяла условию Коши, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0.$$

8.203. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что для всех n, начиная с некоторого, $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$, и последовательность $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} x_n\right\}$ сходится. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} n x_n = 0.$$

8.204. Пусть $\{p_n\}$ — последовательность натуральных чисел,

$$x_1 = \frac{1}{p_1}, \quad x_2 = \cfrac{1}{p_1 + \cfrac{1}{p_2}}, \quad x_3 = \cfrac{1}{p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \cfrac{1}{p_3}}}, \ \ldots,$$

$$x_n = \cfrac{1}{p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{p_{n-1} + \cfrac{1}{p_n}}}}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Доказать, что $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность.

8.205. Доказать, что монотонная последовательность имеет предел, если какая-либо ее подпоследовательность имеет предел.

8.206. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\dfrac{n^\alpha}{n!}$, $\alpha > 0$. 2) $\dfrac{(n+k)!}{n^n}$, $k \in \mathbb{N}$. 3) $\dfrac{n^n}{(2n)!}$.

4) $\dfrac{n^n}{(n!)^2}$. 5) $\dfrac{n^n}{(n!)^\alpha}$, $\alpha > 0$.

6) $\log_a \dfrac{4^n n!}{n^n}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

8.207. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, если x_n равно:

1) $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$. 2) $1 + \dfrac{1^2}{4} + \dfrac{2^2}{4^2} + \ldots + \dfrac{n^2}{4^n}$.

3) $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

8.208. Пусть $\{p_n\}$ — последовательность натуральных чисел, и пусть последовательность

$$S_n = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

сходится. Доказать, что сходится и последовательность

$$\sigma_n = \left(1 + \frac{1}{p_1}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{p_n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

8.209. Пусть $x_n > 0$ для всех $n \geqslant n_0$. Доказать, что последовательность $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, конечный или бесконечный.

8.210. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена,

$$y_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \{x_k\}, \quad z_n = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \{x_k\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Доказать, что последовательности $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся. Обязательно ли их пределы являются частичными пределами последовательности $\{x_n\}$?

8.211. Пусть $x_{n+1} \geqslant x_n$, $y_{n+1} \leqslant y_n$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$. Доказать, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

8.212. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\left(1 + \dfrac{1}{n(n+2)}\right)^n$. 2) $\left(\dfrac{2^n+3}{2^n+1}\right)^n$. 3) $\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$.

4) $\left(\dfrac{n^2+n}{n^2+2n+2}\right)^n$. 5) $\left(\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n$.

8.213. Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$:

1) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > e^{1-\frac{1}{n}}$. 2) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

8.214. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\log_a(n+1) - \log_a n}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

8.215. Доказать, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n = \sqrt[k]{e}.$$

8.216. Доказать, что для любого рационального числа $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r.$$

8.217. Доказать, что для любого действительного числа $x > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

8.218. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$, если 1) $x = -k$, $k \in \mathbb{N}$; 2) $x = -1/k$, $k \in \mathbb{N}$; 3) $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$.

8.219. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $x_n > 0$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

8.220. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^n$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n/2}$.

8.221. Пусть

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = e$. 2) $e - S_n \leqslant \dfrac{n+2}{n!\,(n+1)^2}$.

8.222. Доказать, что разность $e - S_n$, $n \in \mathbb{N}$ (S_n из задачи 8.221), убывает с ростом n быстрее, чем разность $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

8.223. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) = \frac{1}{e}.$$

8.224. Доказать, что число e иррационально.

8.225. Пусть

$$\sigma_n = 3 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+1)!}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = e$.

2) Разность $\sigma_n - e$ убывает быстрее, чем разность $e - S_n$, где S_n из задачи 8.221.

8.226. Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

8.227. Доказать, что для всех n, начиная с некоторого n_0, верны неравенства

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{n^{n+1}}{n!}.$$

Найти n_0 для левого и правого неравенств.

8.228. Последовательность $\{x_n\}$ такую, что $x_1 = a$, $x_{n+1} = qx_n + d$, $n \in \mathbb{N}$, называют арифметико-геометрической прогрессией со знаменателем q и разностью d. Доказать, что: 1) при $|q| < 1$ эта последовательность сходится, и найти ее предел; 2) при $|q| > 1$ и $a \neq d/(1-q)$ эта последовательность расходится.

8.229. Пусть $\{x_n\}$ — арифметико-геометрическая прогрессия со знаменателем $q \neq 1$ и разностью d (см. задачу 8.228), $S_n = x_1 + \ldots + x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - nx_n)$.

8.230. В треугольнике ABC_1 проведена биссектриса C_1C_2, в треугольнике AC_1C_2 проведена биссектриса C_2C_3, в треугольнике AC_2C_3 — биссектриса C_3C_4 и т. д. Доказать, что последовательность величин углов $C_{n+1}C_nA$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, и найти его, если угол BAC равен α.

8.231. Вписанная в треугольник $A_1B_1C_1$ окружность касается его сторон B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 в точках A_2, B_2, C_2 соответственно, вписанная в треугольник $A_2B_2C_2$ окружность касается его сторон B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 в точках A_3, B_3, C_3 соответственно и т. д. Найти предел последовательности величин углов $B_nA_nC_n$ при $n \to \infty$.

8.232. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) точки B_1 и C_1 — середины диагоналей AC и BD, в трапеции AB_1C_1D точки B_2 и C_2 — середины диагоналей AC_1 и B_1D и т. д. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}|B_nC_n|$, если $|AD| = a$ в случаях: а) $|AD| > |BC|$; б) $|AD| < |BC|$.

8.233. Пусть $a > 0$, $x_1 = \sqrt{a}$, $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и найти его.

8.234. Исследовать на сходимость последовательность:

1) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_n + 2}$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $x_1 = 1/2$, $x_{n+1} = (1 - x_n)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

8.235. Пусть $x_1 = a$, $0 < a < 1$, $x_{n+1} = 1 + qx_n^2$, $n \in \mathbb{N}$. При каких $q \in [0; 1]$ последовательность $\{x_n\}$ сходится?

√ **8.236.** Пусть $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, где $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и найти его.

8.237. Пусть $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{125}{x_n^2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и найти его.

8.238. Пусть $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{x_n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится.

8.239. Доказать сходимость и найти предел последовательности:

1) $x_1 = a$, $0 < a < 1$, $x_{n+1} = 1 - x_n^2$.

2) $x_1 = a$, $a > -1$, $x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}$.

√ **8.240.** Исследовать на сходимость последовательность ($n \in \mathbb{N}$):

• 1) $x_1 = -3$, $x_{n+1} = 1 + \frac{6}{x_n}$. 2) $x_1 = -\frac{7}{13}$, $x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{2x_n}$.

3) $x_1 = \frac{8}{17}$, $x_{n+1} = \frac{1}{x_n} - \frac{3}{2}$. 4) $x_1 = \frac{6}{7}$, $x_{n+1} = 4 - \frac{3}{x_n}$.

8.241. Пусть $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{a}{x_n} + b$, $n \in \mathbb{N}$, где $a > 0$, $b > 0$. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, и найти ее предел.

8.242. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $x_1 = \frac{a}{2}$, $x_{n+1} = \frac{a}{2} + \frac{x_n^2}{2}$. Найти все значения a, при которых последовательность $\{x_n\}$ сходится, и найти ее предел.

8.243. 1) Пусть $0 < x_1 < 1$, $x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

а) Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

б) Исследовать последовательность $\{x_n\}$ на сходимость, если $x_1 \notin (0; 1)$.

2) Пусть $0 < x_1 < 1/a$, $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$, $n \in \mathbb{N}$, где $a > 0$. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1/a$.

3) Пусть $0 < x_1 < a$, $x_{n+1} = x_n(a - x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a - 1$ при $a > 1$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ при $0 < a \leqslant 1$.

8.244. Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ удовлетворяют условиям:

1) $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$, $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\{x_n + y_n\}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказать, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. В случае 2) найти этот предел.

8.245. При каких a и b из $\mathbb{R}$ сходится или расходится последовательность $\{x_n\}$, если $x_1 = a$, $x_2 = b$ и

1) $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$. 2) $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n$.

3) $x_{n+2} = -2x_{n+1} - x_n$. 4) $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$, $n \in \mathbb{N}$?

8.246. Пусть $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n/(4 - x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, и найти его, если:

1) $0 < a < 3$. 2) $3{,}5 < a < 4$.

8.247. Доказать сходимость последовательности и найти ее предел, если:

1) $x_1=4,\ x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$.

2) $x_1=1,\ x_{n+1}=\sqrt[3]{6+x_n}$.

3) $x_1=3,\ x_{n+1}=\sqrt{12+x_n},\ n\in\mathbb{N}$.

8.248. Доказать, что последовательность

$$x_1=a,\ x_{n+1}=\frac{x_n}{2+x_n},\ n\in\mathbb{N},$$

имеет предел, и найти его, если:
1) $a<0$. 2) $a<-2$. 3) $-1<a<0$.

8.249. Доказать, что последовательность

$$x_1=a,\ x_{n+1}=1+\frac{b}{x_n},\qquad n\in\mathbb{N},$$

где $b<-1/4$, расходится.

8.250. Пусть

$$x_1=a,\quad x_{n+1}=x_n^2+3x_n+1,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Установить, имеет ли эта последовательность предел (конечный или бесконечный), и найти его, если:
1) $a=-5/4$. 2) $a=-3/4$. 3) $a=-7/4$. 4) $a=-9/4$.

8.251. Доказать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, и найти его, если

$$x_1=2,\qquad x_{n+1}=2-\frac{1}{x_n}.$$

8.252. Доказать, что последовательность

$$x_1=a,\ x_{n+1}=1-\frac{1}{4x_n},\qquad n\in\mathbb{N},$$

сходится, и найти ее предел, если:
1) $a>1/2$. 2) $a<0$. 3) $0<a<1/4$.

8.253. Доказать, что если

$$x_1>0,\ x_{n+1}=a\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right),\qquad n\in\mathbb{N},$$

то:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ при $a\geqslant1$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a/(1-a)}$ при $0<a<1$.

8.254. Исследовать на сходимость последовательность ($n\in\mathbb{N}$):
1) $x_1=9/10,\quad x_{n+1}=1/(2x_n-1)$.
2) $x_1=2,\quad x_{n+1}=6/(x_n-1)$.

8.255. Пусть

$$x_1=a,\ x_{n+1}=x_n^2+(1-2p)x_n+p^2,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Найти все значения a и p, при которых последовательность $\{x_n\}$ сходится.

8.256. Доказать, что последовательность

$$x_1=a,\ x_{n+1}=\frac{bx_n}{c+dx_n},\qquad n\in\mathbb{N},$$

имеет предел, и найти его ($a,b,c,d\in\mathbb{R}$ и таковы, что $c+dx_n\neq0$ для любого $n\in\mathbb{N}$, $bd\neq0$, $|b|\neq|c|$, $ad\neq b-c$).

8.257. Доказать, что последовательность

$$x_1=a,\ x_{n+1}=1+\frac{b}{x_n},\qquad n\in\mathbb{N},$$

где $0>b>-1/4$, сходится; найти ее предел.

8.258. Пусть

$$x_1>0,\ x_{n+1}=ax_n+\frac{b}{x_n},\qquad n\in\mathbb{N},$$

где $a>0$, $b>0$. Доказать, что существует конечный или бесконечный предел этой последовательности, и найти его.

8.259. Доказать, что существует единственная последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_1=1$, $x_n=x_{n+1}+x_{n+2}$, $x_n>0$, $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что эта последовательность имеет предел, и найти его.

8.260. Последовательность x_n такова, что

$$x_{n+2}=\frac{5}{2}x_{n+1}+x_n,\qquad n\in\mathbb{N},\qquad x_1=a.$$

Как следует выбрать x_2, чтобы эта последовательность сходилась? Чему будет равен ее предел?

8.261. Доказать, что последовательность

$$S_n=1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha},\qquad n\in\mathbb{N},$$

где $\alpha>0$, сходится.

8.262. 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)=0.$$

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)=a.$$

3) Привести пример расходящейся последовательности $\{x_n\}$, для которой существует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n).$$

8.263. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt2}+\ldots+\frac{1}{\sqrt n}\right).$$

8.264. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=a$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=a$.

8.265. Пусть $x_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}=a.$$

8.266. Пусть

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=y,$$

где $y\neq0$ и $y_1+y_2+\ldots+y_n\neq0$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{y_1+y_2+\ldots+y_n}=\frac{x}{y}$$

(здесь y — число, x — число, $+\infty$ или $-\infty$).

8.267. 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$, $x_n>0$, $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}=1.$$

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, $x_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, $x\neq0$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}=x.$$

3) Привести пример расходящейся последовательности $\{x_n\}$, для которой существует

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

8.268. Пусть $x_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=x.$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=x.$$

8.269. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[p]{n}}{\sqrt[n]{n!}}$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^nn!}{(3n)^n}$. 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^nn!}{n^n}$.

8.270. (*Теорема Штольца.*) Пусть последовательность $\{x_n\}$ строго монотонна, начиная с некоторого номера, и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$. Последовательность $\{y_n\}$ такова, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=a$$

Доказать, что и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=a$$

(здесь a — число, $+\infty$, $-\infty$ или ∞).

8.271. Пусть $\{x_n\}$ — строго монотонная, начиная с некоторого номера, последовательность, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=a.$$

Доказать, что и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=a$, где a — число, $+\infty$, $-\infty$ или ∞.

8.272. Пусть $p\in\mathbb{N}$. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}(1^p+2^p+\ldots+n^p)$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^p}(1^p+2^p+\ldots+n^p)-\frac{n}{p+1}\right)$.

8.273. Пусть

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=b.$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\ldots+x_{n-1}y_2+x_ny_1}{n}=ab.$$

8.274. Функция f неограничена сверху (снизу) на множестве X. Доказать, что существует последовательность $\{x_n\}$, $x_n\in X$, $n\in\mathbb{N}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$ (соответственно $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=-\infty$).

8.275. Доказать, что если функция неограничена на отрезке, то существует точка этого отрезка, в каждой окрестности которой функция неограничена. Верно ли это утверждение для интервала?

8.276. Пусть

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0,\qquad S_n=x_1+x_2+\ldots+x_n,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Может ли последовательность $\{S_n\}$ иметь только два частичных предела, если 1) x_n — действительные числа; 2) x_n — комплексные числа?

8.277. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что для любого $k>1$, $k\in\mathbb{N}$, ее подпоследовательность $\{x_{pk}\}$ имеет предел.

равный 1. Следует ли отсюда, что и последовательность $\{x_n\}$ сходится к 1?

8.278. Доказать, что всякую ограниченную последовательность можно разбить на счетное множество последовательностей, имеющих один и тот же предел.

8.279. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — ограниченные последовательности с общим множеством частичных пределов. Доказать, что найдется такая перестановка $\{z_n\}$ последовательности $\{y_n\}$ (см. задачу 8.94), что

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - z_n) = 0.$$

8.280. Дано счетное множество последовательностей $\{x_n^{(k)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ таких, что $x_n^{(k)} > 0$ для любых $n, k \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(k)} = +\infty$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Доказать, что существует последовательность $\{b_n\}$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{x_n^{(k)}} = 0 \text{ для любого } k \in \mathbb{N}.$$

8.281. Привести пример возрастающей ограниченной последовательности $\{x_n\}$ такой, что последовательность $\{(n+1)(x_{n+1} - x_n)\}$ неограничена.

8.282. 1) Последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Доказать, что последовательность $\{n(x_{n+1} - x_n)\}$ не может иметь пределом $+\infty$.

2) Привести пример сходящейся последовательности $\{x_n\}$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} n(x_{n+1} - x_n) = \infty.$$

8.283. Доказать сходимость ограниченной сверху последовательности, удовлетворяющей условию:

1) $x_{n+1} - x_n \geqslant -\dfrac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $x_{n+1} - x_n \geqslant -\dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

3) $x_{n+1} - x_n \geqslant \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$, где α_n таковы, что последовательность $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\right\}$ сходится.

8.284. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant x_{m+n} \leqslant x_m + x_n.$$

Доказать, что последовательность $\{x_n/n\}$ сходится.

8.285. Пусть $\{x_n\}$ — возрастающая неограниченная последовательность, $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть K_n — число членов этой последовательности, не превосходящих n, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что если существует один из пределов

$$\lim_{n\to\infty}\frac{K_n}{n} \text{ или } \lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n},$$

то существует и другой и эти пределы равны.

8.286. (*Признак Лейбница.*) Последовательность $\{a_n\}$ такова, что

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0,$$

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqslant |a_{n+1} - a_n|,$$

$$(a_{n+2} - a_{n+1})(a_{n+1} - a_n) \leqslant 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Доказать, что последовательность $\{a_n\}$ сходится.

8.287. Последовательность $\{x_n\}$ имеет *ограниченную вариацию*, если ограничена последовательность

$$\sigma_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_{n+1} - x_n|, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Доказать, что:

1) Монотонная ограниченная последовательность имеет ограниченную вариацию.

2) Последовательность с ограниченной вариацией сходится.

3) Для всякой последовательности с ограниченной вариацией существуют возрастающие ограниченные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ такие, что $x_n = a_n - b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

8.288. Пусть $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1.$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

8.289. Пусть все члены последовательности $\{x_n\}$ различны. Доказать, что множество подпоследовательностей последовательности $\{x_n\}$ несчетно.

8.290. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ a > 0,\ a_n > 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $b \in \mathbb{R}$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b.$$

8.291. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{1/n} - 1\right)$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^\alpha$, где $C_n^\alpha = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

8.292. 1) Доказать, что последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

имеет предел (его называют *постоянной Эйлера*).

2) Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2.$$

8.293. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. На стороне AC взята точка M_0, $M_0 \neq A$, $M_0 \neq C$, и по ней найдена на AC точка M_1 следующим образом: проведены отрезки $[M_0N_0] \parallel [CF]$ $(N_0 \in AB)$, затем $[N_0P_0] \parallel (AD)$ $(P_0 \in BC)$ и, наконец, $[P_0M_1] \parallel (BE)$. Отправляясь от точки M_1, аналогично находится точка M_2 и т. д. Доказать, что последовательность точек $\{M_n\}$ сходится, и найти ее предел.

8.294. Точка движется в круге равномерно и прямолинейно, отскакивая от его границы по закону отражения. Центральный угол, под которым видны две первые точки встречи с границей круга, равен 1 рад. Доказать, что в любом секторе будут находиться точки встречи с границей.

8.295. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} n\left((n+1)^{\alpha} - n^{\alpha}\right) = +\infty, \qquad 0 < \alpha.$$

8.296. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n!}{n^{\alpha}}$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left|\ln\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)\right|^p$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})^n}{2^n}$, где $a > 0$, $b > 0$.

8.297. Доказать, что из всякого бесконечного множества интервалов, объединение которых покрывает отрезок $[a; b]$, можно выделить конечное подмножество интервалов, объединение которых также покрывает $[a; b]$.

§ 9. Предел функции

1. Основные определения. Первое определение предела функции (определение Гейне). Пусть область определения функции $f(x)$ содержит интервал $(\alpha; \beta)$, кроме, быть может, точки $x_0 \in (\alpha; \beta)$.

Число a называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 (или при $x \to x_0$), если для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in (\alpha; \beta)$, $x_n \neq x_0$, сходящейся к x_0, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к a.

Из определения следует, что функция не может иметь двух разных пределов в одной точке. Из определения следует также, что значения функции $f(x)$ в точках x, лежащих вне некоторой окрестности точки x_0, и значение функции $f(x)$ в точке x_0 не влияют ни на существование, ни на величину предела функции $f(x)$ в точке x_0.

Для того чтобы доказать, что функция $f(x)$ не имеет предела в точке x_0, достаточно указать какую-нибудь последовательность $\{f(x_n)\}$, не имеющую предела, или указать две последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$, имеющие разные пределы.

Второе определение предела функции (определение Коши). Число a называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 (или при $x \to x_0$), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Определение Коши и определение Гейне равносильны.

Если число a является пределом функции $f(x)$ в точке x_0, то пишут

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \text{или} \quad f(x) \to a \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Используя логические символы, определение Коши можно записать следующим образом:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x\, (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon). \qquad (1)$$

Утверждение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq a$ записывается так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0 \forall\delta > 0 \exists x\, (0 < |x - x_0| < \delta \land |f(x) - a| \geqslant \varepsilon). \qquad (2)$$

Пример 1. Найти предел функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$ в точке $x = 4$.

△ Воспользуемся первым определением предела функции в точке. Будем рассматривать данную функцию в некоторой окрестности точки $x = 4$, например, на интервале $(3; 5)$. Возьмем какую-либо последовательность $x_n \in (3; 5)$ такую, что $x_n \neq 4$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$. Тогда на основании теорем о пределах последовательностей имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - 16}{x_n^2 - 4x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + 4}{x_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n + 4}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = 2.$$

В силу произвольности выбранной последовательности x_n, согласно первому определению предела функции в точке

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2. \ \blacktriangle$$

П р и м е р 2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-4x}=2$, используя второе определение предела функции в точке.

△ Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{x^2-16}{x^2-4x}$ в некоторой окрестности точки $x=4$, например, на интервале $(2; 5)$.

Возьмем произвольное положительное число ε и преобразуем $|f(x)-a|$ при $x\neq 4$ следующим образом:

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x}-2\right|=\left|\frac{x+4}{x}-2\right|=\frac{|x-4|}{x}.$$

Учитывая, что $x\in(2; 5)$, получаем неравенство

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x}-2\right|<\frac{|x-4|}{2},$$

из которого видно, что если взять $\delta=2\varepsilon$, то для всех $x\in(2; 5)$ и удовлетворяющих неравенствам $0<|x-4|<\delta$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x}-2\right|<\frac{\delta}{2}=\varepsilon.$$

Согласно второму определению предела число $a=2$ является пределом функции $f(x)=\frac{x^2-16}{x^2-4x}$ в точке $x=4$. ▲

П р и м е р 3. Доказать, что функция $f(x)=\sin(\pi/x)$ не имеет предела в точке $x=0$.

△ Возьмем две последовательности $x_n=1/n$ и $x'_n=2/(4n+1)$, сходящиеся к точке $x=0$.

Рассмотрим соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$ значений функции. Так как последовательность $f(x_n)=$ $=\sin n\pi$ сходится к нулю, а последовательность $f(x'_n)=$ $=\sin(\pi(4n+1)/2)$ — к единице, то предел функции $f(x)=$ $=\sin(\pi/x)$ в точке $x=0$ не существует. ▲

2. Теоремы о пределах.

Т е о р е м а о п р е д е л е с у м м ы (р а з н о с т и) и п р о и з в е д е н и я д в у х ф у н к ц и й. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы в точке x_0, то функции $f(x)\pm g(x)$ и $f(x)g(x)$ также имеют пределы в точке x_0, причем

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x), \tag{3}$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))=(\lim_{x\to x_0} f(x))(\lim_{x\to x_0} g(x)). \tag{4}$$

В частности, для любого числа C

$$\lim_{x\to x_0}(Cf(x))=C\lim_{x\to x_0} f(x). \tag{5}$$

Т е о р е м а о п р е д е л е ч а с т н о г о. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$, то функция $f(x)/g(x)$ также имеет предел в точке x_0, причем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}. \tag{6}$$

Т е о р е м а о п р е д е л е к о м п о з и ц и и ф у н к ц и й. Пусть существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ $(f(x)\neq a$ при $x\neq x_0)$ и $\lim\limits_{y\to a} g(y)$; тогда в точке x_0 существует предел композиции $g\circ f=g(f(x))$, причем

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=\lim_{y\to a} g(y). \tag{7}$$

Эта теорема позволяет вычислять пределы, переходя от переменной x к новой переменной $y=f(x)$.

В случае непрерывности функции $g(y)$ в точке a равенство (7) можно записать в виде формулы

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=g(\lim_{x\to x_0} f(x)), \tag{8}$$

из которой видно, что знак предела (lim) и знак функции (g), если она непрерывна, можно переставлять.

3. Предел функции при $x\to\infty$. Число a называется *пределом* функции $f(x)$ при $x\to\infty$, если для каждого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x|>\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$.

Если число a является пределом функции $f(x)$ при $x\to\infty$, то пишут

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=a.$$

Теоремы о пределах справедливы и для пределов функций при $x\to\infty$.

4. Бесконечный предел. Говорят, что предел функции $f(x)$ в точке x_0 равен бесконечности, и пишут

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty,$$

если для каждого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>\varepsilon$.

Аналогично,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,$$

если для каждого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x|>\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>\varepsilon$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x\to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Аналогично определяются *бесконечно большая* и *бесконечно малая* функции при $x \to \infty$.

5. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.

1. Сумма (разность) бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

2. Если функция $f(x)$ при $x \to x_0$ — бесконечно малая, а функция $g(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 удовлетворяет условию $|g(x)| < c$, $x \neq x_0$, c — некоторое положительное число, то произведение $f(x)g(x)$ при $x \to x_0$ является бесконечно малой функцией. Таким образом, произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию является бесконечно малой функцией. В частности, произведение бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

3. Если функция $f(x)$ при $x \to x_0$ — бесконечно большая, а функция $g(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 удовлетворяет условию $|g(x)| > c$, $x \neq x_0$, c — некоторое положительное число, то произведение $f(x)g(x)$ при $x \to x_0$ является бесконечно большой функцией. В частности, произведение бесконечно больших функций есть функция бесконечно большая.

4. Функция $f(x)$, определенная и не равная нулю в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, точки x_0, является бесконечно малой при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда функция $1/f(x)$ при $x \to x_0$ является бесконечно большой.

Сумма (разность) и частное бесконечно больших функций не обязательно являются бесконечно большими функциями. Например, $f(x) = 1/x$ и $g(x) = -1/x$ при $x \to 0$ — бесконечно большие функции, но $f(x) + g(x)$ при $x \to 0$ не является бесконечно большой функцией.

При вычислении $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x))$ в случае, когда $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно большие при $x \to x_0$ функции, теорема о пределе суммы (разности) функций непосредственно неприменима. В таких случаях принято говорить, что сумма $f(x) + g(x)$ или разность $f(x) - g(x)$ при $x \to x_0$ представляет собой неопределенность вида $\infty + \infty$ и $\infty - \infty$. Аналогично, говорят, что частное $f(x)/g(x)$ представляет собой при $x \to x_0$ неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, если $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно большие при $x \to x_0$ функции, и неопределенность вида $\frac{0}{0}$, если $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые при $x \to x_0$ функции. Вычисление пределов в этих случаях часто называют «раскрытием неопределенности».

Пример 4. Найти:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$. 2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$.

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$. 4) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$.

△ 1) Применяя теоремы о пределе разности (3) и произведения (4), находим предел знаменателя

$$\lim_{x \to 1} (x^2 - x - 2) = (\lim_{x \to 1} x)(\lim_{x \to 1} x) - \lim_{x \to 1} x - \lim_{x \to 1} 2 = -2.$$

Предел знаменателя не равен нулю, поэтому по теореме о пределе частного (6) получаем

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 4)}{\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - x - 2)} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

2) Здесь числитель и знаменатель стремятся к нулю:

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 4) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to 2} (x^2 - x - 2) = 0,$$

т. е. имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Теорема о пределе частного (6) непосредственно неприменима. Для «раскрытия неопределенности» преобразуем данную функцию. Разделив числитель и знаменатель на $x - 2$, получим при $x \neq 2$ равенство

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \frac{x + 2}{x + 1}.$$

Так как $\lim\limits_{x \to 2} (x + 1) \neq 0$, то по теореме о пределе частного (6) найдем

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x + 2}{x + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} (x + 2)}{\lim\limits_{x \to 2} (x + 1)} = \frac{4}{3}.$$

3) Числитель и знаменатель при $x \to \infty$ являются бесконечно большими функциями. Поэтому теорема о пределе частного (6) непосредственно неприменима. Разделим числитель и знаменатель на x^2 и к полученной функции применим теорему о пределе частного (6):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = 1.$$

4) Данная функция представима в виде произведения двух функций $f(x) = 1/(x + 1)$ и $g(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$. Функция $f(x) = 1/(x + 1)$ при $x \to -1$ является бесконечно большой, функция $g(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ в окрестности $(-3/2; -1/2)$ точки $x = -1$ удовлетворяет условию

$$\left|\frac{x^2 - 4}{x - 2}\right| = |x + 2| > \frac{1}{2}.$$

Следовательно, согласно свойству 3 произведение $f(x)g(x)$ является бесконечно большой функцией, т. е.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\infty. \blacktriangle$$

Пример 5. Найти:

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$, $a>0$. 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}$. 4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2})$.

△ 1) Здесь имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем данную функцию, разложив ее числитель на множители:

$$\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\sqrt{x}+\sqrt{a}.$$

Теперь находим

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})=\lim_{x\to a}\sqrt{x}+\sqrt{a}.$$

Используя непрерывность функции $\sqrt{x}$ в точке a (см. (8)), получаем

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{\lim_{x\to a}x}=\sqrt{a}$$

и, следовательно,

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=2\sqrt{a}.$$

2) Для «раскрытия неопределенности» вида $\frac{0}{0}$ умножим и разделим данную функцию на $\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1}$. Тогда при $x\neq 5$ будем иметь

$$\frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}=\frac{x+11-4(x-1)}{(x^2-25)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})}=$$
$$=-\frac{3}{(x+5)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})}.$$

К полученной функции применима теорема о пределе частного (6), поэтому

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}=-\frac{3}{\lim\limits_{x\to 5}(x+5)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})}=-\frac{3}{80}.$$

При вычислении последнего предела мы воспользовались непрерывностью функции $\sqrt{x}$ в точках $x=16$ и $x=4$ (см. (8)).

3) Здесь удобно ввести новую переменную. Положим $y=\sqrt[5]{32+x}$, тогда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}=\lim_{y\to 2}\frac{y-2}{y^5-32}=\lim_{y\to 2}\frac{1}{y^4+2y^3+4y^2+8y+16}=\frac{1}{80}.$$

4) В этом случае имеет место неопределенность вида $\infty-\infty$. Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2}=$$
$$=\frac{x^4+8x^2+3-(x^4+x^2)}{\sqrt{x^4+8x^2+3}+\sqrt{x^4+x^2}}=\frac{7+\frac{3}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{8}{x^2}+\frac{3}{x^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\left(7+\frac{3}{x^2}\right)=7,$$
$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{8}{x^2}+\frac{3}{x^4}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x^2}+\frac{3}{x^4}\right)}=1,$$
$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=1,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2})=7/2. \blacktriangle$$

6. Некоторые замечательные пределы. Вычисление пределов во многих случаях производится с помощью двух важных формул:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \tag{9}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e. \tag{10}$$

Часто используются также следующие формулы, являющиеся следствием формулы (10):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e, \tag{11}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},\quad a>0,\ a\neq 1, \tag{12}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad a>0. \tag{13}$$

В частности, при $a=e$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1, \tag{14}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \tag{15}$$

Пример 6. Найти:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}$, $\alpha\neq 0$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$. 4) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\operatorname{ctg} 2x\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

△ 1) Положив $\alpha x=y$, согласно формуле (9) получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}=\alpha\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}=\alpha\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\alpha.$$

2) Так как

$$\frac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}=2\,\frac{\sin 5x}{x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}$$

и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=5,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2$$

(см. пункт 1)), то по теореме о пределе произведения (4) находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}=20.$$

3) Перейдем к новой переменной $y=\operatorname{arctg} x$, тогда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg} y}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos y}{\frac{\sin y}{y}}.$$

Из непрерывности функции $\cos y$ в точке $y=0$ следует, что $\lim\limits_{y\to 0}\cos y=1$. Согласно формуле (9) $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$. Поэтому по теореме о пределе частного (6) получаем

$$\lim_{y\to 0}\frac{\cos y}{\frac{\sin y}{y}}=\frac{\lim\limits_{y\to 0}\cos y}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}=1.$$

4) Данная функция является произведением бесконечно малой при $x\to\pi/4$ функции $\operatorname{ctg} 2x$ на бесконечно большую функцию $\operatorname{ctg}(\pi/4-x)$.

В таких случаях говорят, что имеет место неопределенность вида $0\cdot\infty$. Для вычисления предела перейдем к новой переменной $y=\pi/4-x$:

$$\lim_{x\to\pi/4}\operatorname{ctg} 2x\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\lim_{y\to 0}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)\operatorname{ctg} y=$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{\sin y}\cdot\frac{\cos y}{\cos 2y}.$$

Так как $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{\sin y}=2$, а $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\cos y}{\cos 2y}=1$, то

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{\sin y}\cdot\frac{\cos y}{\cos 2y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{\sin y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\cos y}{\cos 2y}=2. \ ▲$$

Пример 7. Доказать формулы ($a>0$, $a\neq 1$):

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

△ 1) Запишем данную функцию в виде $\log_a(1+x)^{1/x}$. В силу непрерывности логарифмической функции (см. (8))

$$\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x}=\log_a\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x},$$

и так как, согласно формуле (10), $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}.$$

2) Для доказательства перейдем к новой переменной $y=a^x-1$.

Тогда $x=\log_a(1+y)$, и если $x\to 0$, то и $y\to 0$; поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\log_a(1+y)}{y}}=\ln a. \ ▲$$

Пример 8. Найти:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x^3)^{1/x^3}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x-2}$. 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{1/x}+\frac{1}{x}\right)^x$.

△ 1) По определению показательно-степенной функции имеем

$$(1-2x^3)^{1/x^3}=e^{(\ln(1-2x^3))/x^3}.$$

Используя непрерывность экспоненты (см. (8)), запишем равенство

$$\lim_{x\to 0}(1-2x^3)^{1/x^3}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\ln(1-2x^3))/x^3}.$$

Для вычисления последнего предела положим $y=-2x^3$, тогда (см. формулу (14)) получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x^3)}{x^3}=-2\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=-2,$$

и, следовательно,

$$\lim_{x\to 0}(1-2x^3)^{1/x^3}=e^{-2}.$$

2) Используя определение показательно-степенной функции и непрерывность экспоненты (см. (8)), имеем

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\ln\cos x)/x^2}.$$

Для вычисления $\lim\limits_{x\to 0}(\ln\cos x)/x^2$ запишем равенство

$$\frac{\ln\cos x}{x^2}=\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}.$$

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\cos x-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2(x/2)}{x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2=-\frac{1}{2},$$

то по теореме о пределе произведения (4) получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}=e^{-1/2}.$$

3) Представим данную функцию в виде разности двух функций:

$$\frac{2^x-x^2}{x-2}=\frac{2^x-2^2-(x^2-2^2)}{x-2}=4\,\frac{2^{x-2}-1}{x-2}-\frac{x^2-4}{x-2}.$$

Так как

$$\lim_{x\to 2}4\,\frac{2^{x-2}-1}{x-2}=4\lim_{y\to 0}\frac{2^y-1}{y}=4\ln 2$$

(формула (13), $a=2$),

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4,$$

то по теореме о пределе разности (3) получаем

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x-2}=4\ln 2-4.$$

4) Перейдем к новой переменной $y=1/x$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{1/x}+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to 0}(e^y+y)^{1/y}.$$

По определению показательно-степенной функции и в силу непрерывности экспоненты (см. (8)) имеем

$$\lim_{y\to 0}(e^y+y)^{1/y}=e^{\lim\limits_{y\to 0}(\ln(e^y+y))/y}.$$

Для вычисления $\lim\limits_{y\to 0}(\ln(e^y+y))/y$ воспользуемся равенством

$$\frac{\ln(e^y+y)}{y}=\frac{\ln(1+e^y+y-1)}{e^y+y-1}\cdot\frac{e^y+y-1}{y}.$$

Положив $t=e^y+y-1$, получим

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+e^y+y-1)}{e^y+y-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1.$$

Находим

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^y+y-1}{y}=\lim_{y\to 0}\left(1+\frac{e^y-1}{y}\right)=2.$$

По теореме о пределе произведения (4)

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(e^y+y)}{y}=2,$$

и, следовательно, искомый предел равен e^2. ▲

7. **Односторонние пределы.** Пусть область определения функции $f(x)$ содержит интервал $(\alpha;\ x_0)$. Число a называется *пределом слева* функции $f(x)$ в точке x_0 (или при $x\to x_0-0$), если для каждого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $x_0-\delta<x<x_0$, выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$. Предел слева функции $f(x)$ в точке $x_0\neq 0$ обозначают $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ или $f(x_0-0)$. Если $x_0=0$, то пишут $\lim\limits_{x\to -0}f(x)$ или $f(-0)$.

Аналогично, в случае, когда область определения функции $f(x)$ содержит интервал $(x_0;\beta)$, вводится понятие *предела справа*. Предел справа обозначают так: $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ или $f(x_0+0)$, если $x_0\neq 0$, и $\lim\limits_{x\to +0}f(x)$ или $f(+0)$, если $x_0=0$.

Функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда существуют предел слева и предел справа и они равны; при этом

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0-0)=f(x_0+0).$$

Для функций, область определения которых содержит интервал $(\alpha;+\infty)$ или интервал $(-\infty;\beta)$, вводятся понятия *предела при* $x\to+\infty$ и соответственно *при* $x\to-\infty$. Эти пределы обозначают $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

Например, число a называют пределом функции $f(x)$ при $x\to+\infty$, если для каждого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $x>\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$.

Для односторонних пределов справедливы теоремы о пределе суммы (разности), произведения, частного и о пределе композиции функций.

По аналогии с конечными односторонними пределами определяются и односторонние бесконечные пределы:

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to x_0+0}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

и т. д.

Например, запись $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = -\infty$ означает, что для каждого числа ε существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $x_0 < x < x_0 + \delta$, выполняется неравенство $f(x) < \varepsilon$.

Пример 9. Доказать формулы:

$$1)\ \lim_{x \to -0} a^{1/x} = 0,\ a > 1. \quad 2)\ \lim_{x \to +0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

$\triangle$ 1) Возьмем $\varepsilon > 0$ и для $x < 0$ решим неравенство $a^{1/x} < \varepsilon$. Если $\varepsilon \geqslant 1$, то неравенство справедливо при всех $x < 0$. Поэтому для каждого $\varepsilon \geqslant 1$ в качестве δ можно взять любое положительное число, например $\delta = 1$. Если $\varepsilon < 1$, то, логарифмируя обе части неравенства, получаем $\frac{1}{x} \ln a < \ln \varepsilon$, откуда $x > \frac{\ln a}{\ln \varepsilon}$. Таким образом, и для $\varepsilon < 1$ существует δ, а именно $\delta = -\frac{\ln a}{\ln \varepsilon} > 0$, такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $-\delta < x < 0$, выполняется неравенство $a^{1/x} < \varepsilon$. Следовательно, предел слева функции $a^{1/x}$, $a > 1$, в точке $x = 0$ равен нулю.

2) Возьмем положительное число ε и для $x > 0$ решим неравенство

$$\left| \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2} \right| < \varepsilon. \tag{16}$$

Если $\varepsilon \geqslant \pi/2$, то неравенство верно при всех $x > 0$. Поэтому в качестве δ для всех $\varepsilon \geqslant \pi/2$ можно взять любое положительное число, например $\delta = 1$.

Если $\varepsilon < \pi/2$, то, решая неравенство (16), получаем

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x} < \varepsilon,\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

$$\frac{1}{x} > \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right),\ x < \operatorname{tg} \varepsilon,$$

т. е. для каждого $\varepsilon < \pi/2$ в качестве δ можно взять $\delta = \operatorname{tg} \varepsilon$. Таким образом, для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число δ, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $0 < x < \delta$, выполняется неравенство $\left| \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2} \right| < \varepsilon$. Это означает, что предел справа функции $\operatorname{arctg}(1/x)$ в точке $x = 0$ равен $\pi/2$. $\blacktriangle$

Пример 10. Найти:

$$1)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x}. \quad 2)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x}.$$

$$3)\ \lim_{x \to +0} \operatorname{th}(1/x). \quad 4)\ \lim_{x \to -0} \operatorname{th}(1/x).$$

$\triangle$ 1) Данная функция при $x \to +\infty$ является отношением двух бесконечно больших функций (неопределенность вида $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$. Разделив числитель и знаменатель на x, получим

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{14}{x^2}}+1}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+1} = 1.$$

2) При $x \to -\infty$ функции $\sqrt{x^2+14}+x$ и $\sqrt{x^2-2}+x$ представляют собой неопределенность вида $\infty - \infty$. Для вычисления предела переходим к новой переменной $t = -x$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\sqrt{t^2+14}-t}{\sqrt{t^2-2}-t} =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{(\sqrt{t^2+14}-t)(\sqrt{t^2+14}+t)(\sqrt{t^2-2}+t)}{(\sqrt{t^2-2}-t)(\sqrt{t^2-2}+t)(\sqrt{t^2+14}+t)} =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{14\left(\sqrt{1-\frac{2}{t^2}}+1\right)}{-2\left(\sqrt{1+\frac{14}{t^2}}+1\right)} = -7.$$

3) $\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{th} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +0} \frac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{e^{1/x}+e^{-1/x}} = \lim\limits_{x \to +0} \frac{1-e^{-2/x}}{1+e^{-2/x}} = 1$, так как $\lim\limits_{x \to +0} e^{-2/x} = \lim\limits_{t \to -0} e^{1/t} = 0$ (пример 9, 1)).

4) $\lim\limits_{x \to -0} \operatorname{th} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -0} \frac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{e^{1/x}+e^{-1/x}} = \lim\limits_{x \to -0} \frac{e^{2/x}-1}{e^{2/x}+1} = -1$,

так как $\lim\limits_{x \to -0} e^{2/x} = 0$ (пример 9,1)). $\blacktriangle$

8. Сравнение функций. Символы $O(f)$ и $o(f)$. *Функция* $g(x)$ называется *ограниченной по сравнению с функцией* $f(x)$ *при* $x \to x_0$, если существуют такой интервал $(\alpha; \beta)$, содержащий точку x_0, и такая постоянная C, что

$$|g(x)| \leqslant C|f(x)|, \qquad x \in (\alpha; \beta), \qquad x \neq x_0.$$

Ограниченность $g(x)$ по сравнению с $f(x)$ при $x \to x_0$ кратко записывают следующим образом:

$$g(x) = O(f(x)), \qquad x \to x_0. \tag{17}$$

Эта запись читается так: «$g(x)$ есть O большое от $f(x)$ при x, стремящемся к x_0».

Аналогично определяется смысл записи $g(x) = O(f(x))$ при

$$x \to x_0 - 0, \quad x \to x_0 + 0, \quad x \to \infty, \quad x \to -\infty, \quad x \to +\infty.$$

В частном случае, когда $f(x) = 1$, запись $g(x) = O(1)$, $x \to x_0$, означает, что в некоторой окрестности точки x_0, не содержащей точки x_0, функция $g(x)$ *ограничена.*

Если $g(x)$ ограничена по сравнению с $f(x)$, а $f(x)$ ограничена по сравнению с $g(x)$ при $x \to x_0$, то $g(x)$ и $f(x)$ называются *функциями одного порядка при* $x \to x_0$.

В этом случае пишут

$$g(x) \asymp f(x), \quad x \to x_0. \tag{18}$$

Теорема. Для того чтобы функции $g(x)$ и $f(x)$ были функциями одного порядка при $x \to x_0$, достаточно, чтобы при $x \to x_0$ существовал конечный и не равный нулю предел отношения этих функций.

Пример 11. Какие из следующих пар функций являются функциями одного порядка при $x \to 0$:

1) $f(x) = e^x, \quad g(x) = 100 + x$.
2) $f(x) = 13/x, \quad g(x) = 1/\ln(1+x)$.
3) $f(x) = x(2+\sin(1/x)), \quad g(x) = x$.
4) $f(x) = x^2, \quad g(x) = x$?

△ 1) Так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{100+x}{e^x} = 100,$$

то $e^x \asymp 100 + x$, $x \to 0$.

2) Так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{13\ln(1+x)}{x} = 13,$$

то $13/x \asymp 1/\ln(1+x)$, $x \to 0$.

3) В этом случае

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$$

не существует.

Тем не менее данные функции являются функциями одного порядка. Действительно, так как

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 2 + \sin\frac{1}{x} \leqslant 3, \qquad x \neq 0,$$

то неравенство

$$|f(x)| \leqslant C|g(x)|$$

выполняется при $C = 3$ и, следовательно, функция $f(x) = x(2+\sin(1/x))$ является ограниченной по сравнению с функцией $g(x) = x$ при $x \to 0$.

С другой стороны,

$$\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = \frac{1}{2+\sin\frac{1}{x}} \leqslant 1, \qquad x \neq 0,$$

т. е. неравенство

$$|g(x)| \leqslant C|f(x)|$$

верно при $C = 1$ и, следовательно, функция $g(x) = x$ является ограниченной по сравнению с функцией $f(x) = x(2+\sin(1/x))$ при $x \to 0$. Таким образом, $x(2+\sin(1/x)) \asymp x$, $x \to 0$.

4) Данные функции не являются функциями одного порядка при $x \to 0$, так как, какова бы ни была постоянная C, неравенство

$$|x| \leqslant C|x^2|, \quad x \neq 0,$$

очевидно, не выполняется ни в какой окрестности точки $x = 0$ и, следовательно, функция $g(x) = x$ не является ограниченной по сравнению с функцией $f(x) = x^2$ при $x \to 0$. ▲

Если

$$g(x) \asymp (x - x_0)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \to x_0, \tag{19}$$

то функцию $g(x)$ называют *бесконечно малой порядка n* при $x \to x_0$.

Если

$$g(x) \asymp \frac{1}{(x-x_0)^n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \ x \to x_0, \tag{20}$$

то функцию $g(x)$ называют *бесконечно большой порядка n* при $x \to x_0$.

Например, функции

$$f(x) = \frac{13}{x} \text{ и } g(x) = \frac{1}{\ln(1+x)}$$

при $x \to 0$ (пример 11.2)) являются бесконечно большими 1-го порядка, а функции $f(x) = x(2+\sin(1/x))$ и $g(x) = x$ при $x \to 0$ — бесконечно малыми 1-го порядка (пример 11.3)).

Функция $g(x)$ называется *эквивалентной* (*асимптотически равной*) функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если на некотором интервале $(\alpha; \beta)$, содержащем точку x_0, существует такая функция $\varphi(x)$, что

$$g(x) = \varphi(x) f(x), \ x \in (\alpha; \beta), \ x \neq x_0 \text{ и } \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 1. \tag{21}$$

Если $g(x)$ эквивалентна $f(x)$ при $x \to x_0$, то пишут

$$g(x) \sim f(x), \quad x \to x_0. \tag{22}$$

Отношение эквивалентности функций:

1) рефлексивно, т. е. $f(x) \sim f(x)$, $x \to x_0$;
2) симметрично, т. е. если $g(x) \sim f(x)$, $x \to x_0$, то $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$;
3) транзитивно, т. е. если $g(x) \sim f(x)$ и $f(x) \sim h(x)$ при $x \to x_0$, то $g(x) \sim h(x)$ при $x \to x_0$.

Аналогично определяется эквивалентность функций в случаях $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$.

Теорема. Для того чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентны при $x \to x_0$, достаточно, чтобы предел их отношения при $x \to x_0$ был равен единице.

При $x \to 0$ справедливы следующие часто применяемые эквивалентности:

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1. \quad (23)$$

Пример 12. Какие из следующих пар функций являются эквивалентными при $x \to 0$:

1) $f(x) = e^x$; $g(x) = 2x + 1$.

2) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$; $g(x) = \sqrt[4]{x}$.

3) $f(x) = a^x - 1$, $a > 0$, $a \neq 1$; $g(x) = x$.

4) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}; \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально?} \end{cases}$

△ 1) Так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x+1}{e^x} = 1$, то $e^x \sim 2x + 1$ при $x \to 0$.

2) Так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}} = \lim_{x \to 0} \sqrt{1 + \sqrt{x}} = 1,$$

то $\sqrt{x + \sqrt{x}} \sim \sqrt[4]{x}$ при $x \to 0$.

3) Так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

то функции $f(x) = a^x - 1$ и $g(x) = x$ при $x \to 0$ являются эквивалентными только тогда, когда $a = e$.

4) В этом случае $\lim\limits_{x \to 0} (f(x)/g(x))$ не существует. Тем не менее данные функции при $x \to 0$ эквивалентны, так как при $x \neq 0$ существует функция $\varphi(x)$, а именно $\varphi(x) = (\sin x)/x$, такая, что

$$g(x) = \varphi(x) f(x) \text{ и } \lim_{x \to 0} \varphi(x) = 1,$$

а это и означает, что $g(x) \sim f(x)$, $x \to 0$. ▲

Функция $g(x)$ называется *бесконечно малой по сравнению с функцией* $f(x)$ *при* $x \to x_0$, если на некотором интервале $(\alpha; \beta)$, содержащем точку x_0, существует такая функция $\varphi(x)$, что

$$g(x) = \varphi(x) f(x), \quad x \in (\alpha; \beta), \quad x \neq x_0, \quad \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0. \quad (24)$$

Из этого определения следует, что в случае, когда

$$f(x) \neq 0, \quad x \in (\alpha; \beta), \quad x \neq x_0,$$

функция $g(x)$ будет бесконечно малой по сравнению с $f(x)$ при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Если $g(x)$ — бесконечно малая по сравнению с $f(x)$ при $x \to x_0$, то пишут

$$g(x) = o(f(x)), \quad x \to x_0. \quad (25)$$

Эту запись читают так: «$g(x)$ есть *о* малое от $f(x)$ при x, стремящемся к x_0».

Аналогично определяется смысл записи $g(x) = o(f(x))$ при $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$.

В частном случае, когда $f(x) = 1$, запись $g(x) = o(1)$, $x \to x_0$, означает, что функция $g(x)$ является *бесконечно малой* при $x \to x_0$.

Если $g(x) = o(f(x))$, $x \to x_0$, где $f(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$, то $g(x)$ называют *бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с* $f(x)$ *при* $x \to x_0$.

Пример 13. Доказать или опровергнуть утверждения:

1) $\sin x^3 = o(x^2)$, $x \to 0$. 2) $x^2 = o(\sin x^3)$, $x \to 0$.

3) $1 + x = o(1/x)$, $x \to 0$.

4) $x^2 D(x) = o(xD(x))$, $x \to 0$,

где

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}. \end{cases}$$

△ 1) Утверждение верно, так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^3}{x^2} = \lim_{x \to 0} x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^3}{x^3} = 0.$$

2) Утверждение неверно, так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\sin x^3} \neq 0$.

3) Утверждение верно, так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{x+1}{1/x} = \lim_{x \to 0} x(x+1) = 0.$$

4) Здесь функция $f(x) = xD(x)$ обращается в нуль в точках, сколь угодно близких к точке $x = 0$. Поэтому воспользуемся определением символа $o(f)$. Так как существует функция $\varphi(x)$, а именно $\varphi(x) = x$, такая, что

$$g(x) = x^2 D(x) = \varphi(x) f(x) \text{ и } \lim_{x \to 0} \varphi(x) = 0,$$

то $x^2 D(x) = o(xD(x))$, $x \to 0$, т. е. утверждение верно. ▲

При обращении с символом $o(f)$, $x \to x_0$, полезно иметь в виду следующие правила:

1) $o(Cf) = o(f)$, C — постоянная.

2) $o(f)+o(f)=o(f)$.

3) $o(f)\cdot o(g)=o(f\cdot g)$.

4) $o(o(f))=o(f)$.

В силу этих соотношений левую часть каждого из этих равенств можно заменить правой; заменять правую часть левой, вообще говоря, нельзя.

Вычисление пределов функций во многих случаях сильно упрощается, если использовать эквивалентность функций, правила обращения с символом $o(f)$ и следующую теорему: $g(x)\sim f(x)$, $x\to x_0$, тогда и только тогда, когда

$$g(x)=f(x)+o(f(x)),\quad x\to x_0.$$

При вычислении предела частного двух функций часто оказывается полезной следующая теорема:

Если $f(x)\sim f_1(x)$ и $g(x)\sim g_1(x)$ при $x\to x_0$ и если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Пример 14. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+2\operatorname{arctg}3x+3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2 x)+xe^x}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\operatorname{tg}x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)-\ln\dfrac{x}{2}\right)$. 4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}x}$.

△ 1) При $x\to 0$ имеем

$$\sin 2x\sim 2x,\quad \operatorname{arctg}3x\sim 3x,\quad xe^x\sim x.$$

Так как $\ln(1+u)\sim u$ при $u\to 0$, то

$$\ln(1+3x+\sin^2 x)\sim 3x+\sin^2 x\sim 3x \text{ при } x\to 0.$$

Следовательно,

$$\sin 2x=2x+o(2x),\ \operatorname{arctg}3x=3x+o(3x),$$
$$\ln(1+3x+\sin^2 x)=3x+o(3x),\ xe^x=x+o(x),$$

и поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+2\operatorname{arctg}3x+3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2 x)+xe^x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+o(2x)+6x+2\cdot o(3x)+3x^2}{3x+o(3x)+x+o(x)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{8x+o(x)}{4x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{8+\frac{o(x)}{x}}{4+\frac{o(x)}{x}}=\frac{8+\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}}{4+\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}}=2.$$

Здесь мы использовали соотношения $o(2x)+2\cdot o(3x)+3x^2=o(x)$ и $o(3x)+o(x)=o(x)$ при $x\to 0$.

Решение можно записать короче. Так как при $x\to 0$

$$\sin 2x+2\operatorname{arctg}3x+3x^2\sim 8x,$$
$$\ln(1+3x+\sin^2 x)+xe^x\sim 4x,$$

то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+2\operatorname{arctg}3x+3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2 x)+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x}{4x}=2.$$

2) Используя эквивалентности

$$2\ln\cos x=\ln(1-\sin^2 x)\sim-\sin^2 x\sim -x^2,$$
$$\operatorname{tg}x^2\sim x^2\quad\text{при}\quad x\to 0,$$

получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin^2 x)}{\operatorname{tg}^2 x}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+o(-x^2)}{x^2+o(x^2)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-1+\frac{o(x^2)}{x^2}}{1+\frac{o(x^2)}{x^2}}=-\frac{1}{2}.$$

3) $$\lim_{x\to+\infty}x\left(\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)-\ln\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{2}{x}+o\left(\frac{2}{x}\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{o(1/x)}{1/x}\right)=2.$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}x}=e^a$,

где

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{o(x^2)}{x}}{1+\frac{o(x)}{x}}=0.$$

Следовательно, искомый предел равен 1. ▲

9. Частичный предел функции. Число a называется *частичным пределом функции* $f(x)$ *при* $x\to x_0$, если существует последовательность $\{x_n\}$, $x_n\ne x_0$, такая, что $x_n\to x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=a$.

Аналогично определяются бесконечные и односторонние частичные пределы.

Наименьший и наибольший частичные пределы функции $f(x)$ при $x\to x_0$ называют *нижним* и *верхним пределом* функции и обозначают $\varliminf\limits_{x\to x_0}f(x)$ и $\varlimsup\limits_{x\to x_0}f(x)$.

Пример 15. Найти все частичные пределы функции $f(x)=\sin(1/x)$ при $x\to 0$.

△ Если $|a|\leqslant 1$, то $x_n=\dfrac{1}{\arcsin a+2\pi n}\to 0$ и $f(x_n)=\sin\dfrac{1}{x_n}\to a$, т. е. каждое число a такое, что $|a|\leqslant 1$, является частичным пределом.

Из неравенства $|\sin(1/x)| \leqslant 1$, $x \neq 0$, следует, что других частичных пределов у функции нет. Поэтому $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x) = -1$ и $\overline{\lim}_{x\to 0} f(x) = 1$. ▲

9.1. Определить, при каких положительных значениях δ из неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$, если:

1) $f(x) = x^2$; $x_0 = 2$; $a = 4$; $\varepsilon = 0{,}001$.

2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$; $x_0 = 3$; $a = \dfrac{1}{2}$; $\varepsilon = 0{,}01$.

3) $f(x) = \sin x$; $x_0 = \pi/2$; $a = 1$; $\varepsilon = 0{,}01$.

4) $f(x) = \operatorname{sign} x$; $x_0 = 0$; $a = 1$; $\varepsilon = 1{,}5$.

9.2. Определить, при каких положительных значениях δ из неравенства $|x - 1| < \delta$ следует неравенство:

1) $|\lg x| < 2$. 2) $|\lg x| < 1$.

3) $|\lg x| < 0{,}1$. 4) $|\lg x| < 0{,}01$.

9.3. Для каждого числа $\varepsilon > 0$ найти такое число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x - 1| < \delta$ следует неравенство

$$\left| \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon.$$

9.4. Для каждого числа $\varepsilon > 0$ найти такое число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x - 3| < \delta$ следует неравенство

$$\left| \frac{x^3 - 3x^2}{x - 3} - 9 \right| < \varepsilon.$$

9.5. При каких δ из неравенства $|x| > \delta$ следует неравенство $1/(1 + x^2) < \varepsilon$, где ε — некоторое положительное число?

9.6. При каких δ из неравенства $x < \delta$ следует неравенство $\operatorname{arctg} x + \pi/2 < \varepsilon$, где ε — некоторое положительное число? Чему равен $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x$?

9.7. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует, если:

1) $f(x) = \operatorname{arcctg}(1/x)$. 2) $f(x) = \operatorname{sign}\sin(1/x)$.

9.8. Доказать, что $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ не существует, если:

1) $f(x) = \cos x$. 2) $f(x) = x - E(x)$.

9.9. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют предела в точке x_0. Следует ли отсюда, что $f(x) + g(x)$ и $f(x)g(x)$ также не имеют предела в этой точке?

9.10. Доказать, что если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к точке x_0, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует.

9.11. Доказать, что если из любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к точке x_0, можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = a$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

9.12. Доказать, что если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечный предел, то $f(x) = O(1)$ при $x \to x_0$.

9.13. Доказать, что если функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству $f(x) \geqslant C$, $x \in (\alpha; \beta)$, $x \neq x_0 \in (\alpha; \beta)$, C — постоянная, и существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то справедливо неравенство

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \geqslant C.$$

9.14. Доказать, что если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечный положительный предел, равный числу a, то существует такой интервал $(\alpha; \beta)$, содержащий точку x_0, что

$$f(x) > a/2, \quad x \in (\alpha; \beta), \quad x \neq x_0.$$

9.15. Доказать, что если на интервале $(\alpha; \beta)$, содержащем точку x_0, справедливы неравенства

$$g_1(x) \leqslant f(x) \leqslant g_2(x), \qquad x \neq x_0,$$

и функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ в точке x_0 имеют один и тот же конечный предел, равный a, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$

9.16. Сформулировать утверждения:

1) $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = a$. 2) $\lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x) = \infty$.

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$. 4) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

9.17. Используя логические символы, записать утверждения:

1) $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = 0$. 2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 4$.

3) $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = -\infty$. 4) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$.

9.18. Используя логические символы, записать утверждения:

1) $\lim\limits_{x\to -0} f(x) \neq 0$. 2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq 4$.

3) $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) \neq -\infty$. 4) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \neq \infty$.

9.19. Используя логические символы, записать утверждения:
1) Функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечный предел.
2) Функция $f(x)$ не имеет конечного предела в точке x_0.

Найти пределы функций (9.20—9.38):

9.20. 1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$. 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$. 4) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$.

9.21. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^7+5x^6+4x^3}{x^7+2x^3}$. 2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}$.

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^3+x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$. 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-2x+1}{x^8-2x+1}$.

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{101}-101x+100}{x^2-2x+1}$. 6) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)-15}{x^4-29x^2+100}$.

7) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}+\dfrac{1}{x-1}\right)$. 8) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{2x-x^2}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$.

9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-4x+6}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3x^2-9x+6}\right)$.

9.22. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+5)^5+(x+6)^5+(x+7)^5}{x^5+5^5}$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^3+7x-1)^6}{(2x^6-13x^2+x)^3}$.

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x^{11}+7x^{13})^3}{(1+x^4)^{10}}$. 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)$.

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{2x+1}+\dfrac{x^3+4x^2-2}{1-2x^2}\right)$.

9.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_k(x)}$, $P_n(x)=a_0x^n+\ldots+a_n$, $Q_k(x)=b_0x^k+\ldots$ $\ldots+b_k$ — многочлены.

9.24. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^k-1}$, $n, k\in\mathbb{N}$.

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-x^{k+1}+x^k-nx+n-1}{(x-1)^2}$, $n, k\in\mathbb{N}$.

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^n-1)(x^{n-1}-1)\ldots(x^{n-k+1}-1)}{(x-1)(x^2-1)\ldots(x^k-1)}$, $n, k\in\mathbb{N}$, $k\leqslant n$.

4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{n}{1-x^n}-\dfrac{k}{1-x^k}\right)$, $n, k\in\mathbb{N}$.

9.25. 1) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x^2+x+1}-2-x}{x^2}$.

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$. 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{7+2x-x^2}-\sqrt{1+x+x^2}}{2x-x^2}$.

7) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt[3]{9+x}+x+7}{\sqrt[3]{15+2x}+1}$.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{2x^2+10x+1}-\sqrt[7]{x^2+10x+1}}{x}$.

9.26. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+14x}{2x+\sqrt[3]{x^2}}$. 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^6-1}{\sqrt{x^{12}+5x^5-1}}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+\sqrt{x^3+x^4}}}{\sqrt{x^2+4}}$.

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4-1}}$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+6}+|x|}{\sqrt[6]{x^4+2}-|x|}$.

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{4}{x}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{3}{x}}}{1-\sqrt[5]{1-\dfrac{5}{x}}}$.

9.27. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2-1}-\sqrt{x^4-2x^2-1}\right)$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^4+13x^2-7}-2x^2\right)$.

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+4x}-\sqrt[3]{x^3-3x^2+4}\right)$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}-\sqrt{x^2}\right)$.

6) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt{x^4+x^2\sqrt{x^4+1}}-\sqrt{2x^4}\right)$.

9.28. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[k]{x}-1}$, $n, k\in\mathbb{N}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{a+x}-\sqrt[n]{a-x}}{x}$, $n\in\mathbb{N}$, $a>0$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-\sqrt[k]{1+bx}}{x}$, $n, k\in\mathbb{N}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[n]{1+ax}\sqrt[k]{1+bx}-1}$, $n, k\in\mathbb{N}$.

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$, $n\in\mathbb{N}$.

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[n]{(1+x^2)(2+x^2)\dots(n+x^2)}-x^2\right)$, $n\in\mathbb{N}$.

9.29. 1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}$. 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}4x}{\sin x}$.

3) $\lim\limits_{x\to0}x\operatorname{ctg}5x$. 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$, $\beta\neq0$.

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}$. 6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{\sin 2x\sin x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}$.

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)-1}{\sin x}$.

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}(1+x)\operatorname{tg}(1-x)-\operatorname{tg}^2 1}{\operatorname{tg}^2 x}$.

9.30. 1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$. 2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin(\pi/x)$. 4) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(\cos(1/x)-\cos(3/x))$.

5) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}\cos x-1}$. 6) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}$.

7) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{\pi}{\cos x}-2x\operatorname{tg}x\right)$.

8) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1+\cos x}$.

9.31. 1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}$.

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin 3x}-\sqrt{1-4\sin 5x}}{\sin 6x}$.

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos 4x}-\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x}$. 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}x^2}$.

5) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\sqrt[4]{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}$. 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1}\right)$.

9.32. 1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{x}$.

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-3\arcsin 4x}{\sin 5x-6\operatorname{arctg}7x}$. 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\pi-4\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}}{x}$.

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\arcsin x}-\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg}2x}}{\sqrt{1+\operatorname{arctg}3x}-\sqrt{1-\arcsin 4x}}$.

9.33. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^{x^2}$. 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{x/(2x+1)}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^{x}$. 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$.

9.34. 1) $\lim\limits_{x\to10}\dfrac{\lg x-1}{x-10}$. 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x+x^2)+\ln(1-3x+x^2)}{x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\log_2\dfrac{10+x}{5+x}$. 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1-\sin x}{\ln(1+x)}$.

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)}{x}$. 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos 5x}{\ln\cos 4x}$.

7) $\lim\limits_{x\to1/4}\dfrac{1-\operatorname{ctg}\pi x}{\ln\operatorname{tg}\pi x}$. 8) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\cos\dfrac{\pi}{x}$.

9.35. 1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{10^x-1}{2^x-1}$. 2) $\lim\limits_{x\to\infty}x(3^{1/x}-1)$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(4^{1/x}-4^{1/(x+1)})$. 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{7x}-e^{2x}}{\operatorname{tg}x}$.

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$. 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+\sin x^2}-1}$.

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{\sin^2 x}$.

9.36. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{x^2}$. 2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{1+x}-x\right)^{1/x}$.

3) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x^4)^{1/\sin^2 x}$. 4) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(1+\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}x}$.

5) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{-1/x^2}$. 6) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

7) $\lim\limits_{x\to0}(\cos 6x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. 8) $\lim\limits_{x\to0}(\ln(e+x))^{\operatorname{ctg}x}$.

9) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{xe^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{1/x^2}$. 10) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x+\operatorname{arctg}^2 x)^{1/\operatorname{arctg}x^2}$.

9.37. 1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sh}x}{x}$. 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{ch}2x-1}{\cos x-1}$. 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\operatorname{ch}5x}{x^2}$.

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\operatorname{sh}3x}-e^{\operatorname{sh}x}}{\operatorname{th}x}$. 5) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-\ln\operatorname{ch}x^2)$. 6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\operatorname{ch}2x}{\operatorname{ch}x}\right)^{1/x^2}$.

9.38. 1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$, $\quad a>0$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a^x-b^x)^2}{a^{x^2}-b^{x^2}}$, $\quad a>0,\quad b>0,\quad a\neq b$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x^2}$, $\quad a>0,\quad b>0$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a+b}\right)^{1/x}$, $\quad a>0,\quad b>0$.

9.39. Найти а) $f(-0)$; б) $f(+0)$:

1) $f(x)=\dfrac{x-|x|}{2x}$. 2) $f(x)=\arccos(x-1)$.

3) $f(x)=e^{-1/x^2}$. 4) $f(x)=2^{\operatorname{ctg} x}$.

9.40. Найти а) $f(x_0-0)$; б) $f(x_0+0)$:

1) $f(x)=\dfrac{2(1-x^2)+|1-x^2|}{3(1-x^2)-|1-x^2|}$, $\quad x_0=1$.

2) $f(x)=\operatorname{sign}\cos x$, $\quad x_0=\pi/2$.

3) $f(x)=\operatorname{arctg}\operatorname{tg} x$, $\quad x_0=\pi/2$.

4) $f(x)=\dfrac{1}{x+3^{1/(3-x)}}$, $\quad x_0=3$.

9.41. Найти а) $f(x_0-0)$; б) $f(x_0+0)$:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x-[x]}$, $\quad x_0=-1$.

2) $f(x)=x+[x^2]$, $\quad x_0=10$.

3) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$, $\quad x_0=1$.

4) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^n-3}{x^n-1}$, $\quad x_0=1$.

9.42. Найти а) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

1) $f(x)=\operatorname{arctg} x$. 2) $f(x)=\operatorname{arcctg} x$. 3) $f(x)=e^x$.

4) $f(x)=\arcsin\dfrac{1+x}{1-x}$. 5) $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{1+2x}\right)^x$. 6) $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{|x|}\right)^x$.

7) $f(x)=\sqrt{1+7x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$. 8) $f(x)=\dfrac{\ln(1+4^x)}{x}$.

9.43. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{\dfrac{x^3+2x^2}{x+1}}\right)$. 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-7x+4}\right)$.

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arcsin\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$. 5) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x-x\cos\sqrt{x}}$.

6) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin 4x-\cos 4x}\right)^{1/x}$. 7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+\sqrt{x})}{\ln(6+\sqrt[6]{x})}$.

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(4+5e^{6x})}{\ln(1+2e^{3x})}$. 9) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$.

10) $\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

9.44. Какие из следующих функций являются бесконечно малыми:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$, $x\to 1$.

2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$; а) $x\to+\infty$, б) $x\to-\infty$.

3) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$, $x\to+0$.

4) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^x}$; а) $x\to+\infty$, б) $x\to-\infty$.

5) $f(x)=\sin\ln(x^2+1)-\sin\ln(x^2-1)$, $x\to\infty$.

6) $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^4+x+1)}$, $x\to\infty$?

9.45. Какие из следующих функций являются бесконечно большими:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-4x^2+4x}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}$, $\quad x\to 2$.

2) $f(x)=x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; а) $x\to+\infty$, б) $x\to-\infty$.

3) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$, $x\to\pi/2$.

4) $f(x)=\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x$; а) $x\to+\infty$, б) $x\to-\infty$.

5) $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x$; а) $x\to+\infty$, б) $x\to-\infty$.

6) $f(x)=(1-x)^{1/x^2}$; а) $x\to+0$, б) $x\to-0$?

9.46. При каких значениях α и β функция $f(x)$ является бесконечно малой:

1) $f(x)=\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}-\alpha x-\beta$, $x\to\infty$.

2) $f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}-\alpha x-\beta$; а) $x\to+\infty$, б) $x\to-\infty$.

3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x^3}-\alpha x-\beta$, $x\to\infty$.

4) $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-1}-\alpha x-\beta$; а) $x\to+\infty$, б) $x\to-\infty$.

5) $f(x)=(x+4)e^{1/x}-\alpha x-\beta$; а) $x\to\infty$, б) $x\to-0$.

6) $f(x)=\ln(1+e^{3x})-\alpha x-\beta$; а) $x\to+\infty$, б) $x\to-\infty$.

7) $f(x)=x\,\mathrm{arctg}\,x-\alpha x-\beta$; а) $x\to+\infty$, б) $x\to-\infty$?

9.47. При каких значениях α и β функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x\to+0$:

1) $f(x)=x^\alpha\sin(1/x^\beta)$. 2) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$.

3) $f(x)=x^\alpha\,\mathrm{arctg}(1/x^\beta)$. 4) $f(x)=(1-x^\alpha)^{x^\beta}$?

9.48. Определить порядок n бесконечно малой функции при $x\to0$:

1) $f(x)=3\sin^2x^2-5x^5$. 2) $f(x)=\sqrt{4-x^4}+x^2-2$.

3) $f(x)=1-x^4-\cos x^2$. 4) $f(x)=2\sin x-\mathrm{tg}\,2x$.

5) $f(x)=\sin\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)$. 6) $f(x)=2^{x^2}-1$.

9.49. Определить порядок n бесконечно большой функции:

1) $f(x)=\dfrac{x^5}{1+x+2x^2}$, $x\to\infty$.

2) $f(x)=\sqrt{x^4+x+1}$, $x\to\infty$.

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$, $x\to+\infty$.

4) $f(x)=\dfrac{\ln x}{(x-1)^2}$, $x\to1$.

5) $f(x)=\mathrm{ctg}^2x^3$, $x\to0$.

6) $f(x)=\dfrac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}}{x^5}$, $x\to0$.

9.50. Установить, какие из следующих утверждений верны:

1) $x^2=o(x)$ при а) $x\to0$, б) $x\to\infty$.

2) $x=o(x^2)$ при а) $x\to0$, б) $x\to\infty$.

3) $\sqrt{x^2+x}-x=o(1)$ при а) $x\to+\infty$, б) $x\to-\infty$.

4) $\ln(1+e^x)=o(1)$ при а) $x\to+\infty$, б) $x\to-\infty$.

9.51. Пусть $x\to0$, $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$, $n\geqslant k$. Показать, что:

1) $o(x^n)+o(x^k)=o(x^k)$.

2) $o(x^n)\cdot o(x^k)=o(x^{n+k})$.

9.52. Какие из следующих пар функций являются функциями одного порядка:

1) $f(x)=x^3-x^2-x+1$, $g(x)=x^3-x$; а) $x\to1$, б) $x\to\infty$.

2) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+2}$, $g(x)=\dfrac{3}{x}$; а) $x\to1$, б) $x\to\infty$.

3) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$, $g(x)=1/x$, $x\to\infty$.

4) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$, $g(x)=1/x$; а) $x\to+\infty$, б) $x\to-\infty$.

5) $f(x)=\dfrac{x^2\,\mathrm{arctg}\,x}{x^2+x+1}$, $g(x)=1$, $x\to\infty$.

6) $f(x)=x\cos(1/x)$, $g(x)=x$, $x\to0$?

9.53. Установить, какие из следующих утверждений верны при $x\to\infty$:

1) $100x+x\sin x=O(x)$. 2) $x=O(100x+x\sin x)$.

3) $x+x\sin x=O(x)$. 4) $x=O(x+x\sin x)$.

5) $\sqrt{x^2+1}-|x|=O(1/x)$. 6) $1/x=O\left(\sqrt{x^2+1}-|x|\right)$.

9.54. Доказать:

1) $O(O(f))=O(f)$. 2) $o(O(f))=o(f)$.

3) $O(o(f))=o(f)$. 4) $o(f)+O(f)=O(f)$.

5) $o(f)\cdot O(f)=o(f)$.

9.55. Пусть $x\to0$, $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$, $n>k$. Показать, что:

1) $O(x^n)+O(x^k)=O(x^k)$. 2) $O(x^n)\cdot O(x^k)=O(x^{n+k})$.

9.56. Пусть $x\to\infty$, $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$, $n>k$. Показать, что:

1) $O(x^n)+O(x^k)=O(x^n)$. 2) $O(x^n)\cdot O(x^k)=O(x^{n+k})$.

9.57. Определить, при каких значениях α и β функции $f(x)$ и $g(x)=\alpha x^\beta$ эквивалентны:

1) $f(x)=\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; а) $x\to+0$, б) $x\to+\infty$.

2) $f(x)=\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$, $x\to0$.

3) $f(x)=2e^{x^4}+(\cos x-1)^2+x^5-2$, $x\to0$.

4) $f(x)=\sin^2 2x+\arcsin^2x+2\,\mathrm{arctg}\,x^2$, $x\to0$.

5) $f(x)=1-\cos(1-\cos(1/x))$, $x\to\infty$.

6) $f(x)=E(1/x)$, $x\to\infty$.

9.58. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\mathrm{arctg}(2-x)+\sin(x-2)^2}{x^2-4}$.

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^2}+x^3-1}{\ln\cos x}$.

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3\sqrt[10]{x}\cos x+\sin^3x}{1-\sqrt{1+x^3}}$.

4) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{2\sin\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}+\ln(1+x)}{x+\sqrt{x\sqrt{x}}}$.

5) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}\,(e^{7\sqrt[3]{x}}-1)}{\operatorname{tg}\sqrt[3]{x}\cdot\ln(1+3x)}$.

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sin 2x-2\operatorname{tg}x)^2+(1-\cos 2x)^3}{\operatorname{tg}^7 6x+\sin^6 x}$.

9.59. Пусть $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=a$, причем $\varphi(t)\neq a$ при $t\neq t_0$ в некоторой окрестности точки t_0. Доказать, что

1) если $f(x)=o(g(x))$ при $x\to x_0$, то $f(\varphi(t))=o(g(\varphi(t)))$ при $t\to t_0$;

2) если $f(x)=O(g(x))$ при $x\to x_0$, то $f(\varphi(t))=O(g(\varphi(t)))$ при $t\to t_0$.

9.60. Найти $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $x_0\in\mathbb{R}$, если

$$f(x)=\begin{cases}1/q \text{ при } x=p/q, \text{ где } p \text{ и } q \text{ — взаимно простые целые числа},\\ 0 \text{ при } x \text{ иррациональном}.\end{cases}$$

9.61. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ и $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=x_0$. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t))=a$?

9.62. Доказать, что если функция $f(x)$, $x\in(x_0;+\infty)$, ограничена в каждом интервале $(x_0;x_1)$ и существует конечный или бесконечный

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

то

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{1}{n+1}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}.$$

9.63. Доказать, что не существует рациональной функции $R(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для любого рационального числа r найдется целое число k такое, что $R(k)=r$.

9.64. Вычислить

$$\lim_{x\to0}\lim_{n\to\infty}\frac{\begin{pmatrix}1 & x/n\\ -x/n & 1\end{pmatrix}^n-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{x}.$$

9.65. Найти $\varlimsup\limits_{x\to0} f(x)$ и $\varliminf\limits_{x\to0} f(x)$, если:

1) $f(x)=e^{\cos(1/x^2)}$. 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin^2\dfrac{1}{x}$.

3) $f(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$. 4) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1}{x}$.

9.66. Найти $\varlimsup\limits_{x\to\infty} f(x)$ и $\varliminf\limits_{x\to\infty} f(x)$, если:

1) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}\cos^2 x+\operatorname{arctg} x$.

2) $f(x)=\dfrac{1+x+6x^2}{1-x+2x^2}\sin x^2$.

3) $f(x)=\left(\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{4x^2-x+1}\right)(1+\cos 2x)$.

4) $f(x)=(1+\cos^2 x)^{1/\cos^2 x}$.

9.67. Доказать, что $\varlimsup\limits_{x\to\infty}(\cos x+\sin\sqrt{2}x)=2$.

§ 10. Непрерывность функции

1. Непрерывность функции в точке.

Определение 1. Функцию f, определенную в окрестности точки x_0, называют *непрерывной в точке* x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Определению 1 равносильно следующее (на языке «$\varepsilon-\delta$»)

Определение 1′. Функция f, определенная в окрестности точки x_0, непрерывна в этой точке, если для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для любого $x\in D(f)$, удовлетворяющего условию $|x-x_0|<\delta$, верно неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$; короче,

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\in D(f)\,(|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon).$$

Разность $x-x_0$ называют *приращением аргумента* и обозначают Δx, а разность $f(x)-f(x_0)$ называют *приращением функции*, соответствующим данному приращению аргумента Δx, и обозначают Δy, т. е.

$$\Delta x=x-x_0,\quad \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

В этих обозначениях определение 1 имеет вид:

Определение 1″. Функцию f, определенную в окрестности точки x_0, называют *непрерывной в точке* x_0, если

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=0.$$

Функцию f, определенную на промежутке $(a;x_0]$, называют *непрерывной слева в точке* x_0, если

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0).$$

Функцию f, определенную на промежутке $[x_0;b)$, называют *непрерывной справа в точке* x_0, если

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

Пример 1. Доказать, что функция $\sqrt{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0 > 0$ и непрерывна справа в точке $x_0 = 0$.

△ Докажем непрерывность $\sqrt{x}$ в точке $x_0 > 0$, пользуясь определением 1. Преобразуем и оценим модуль разности:

$$0 \leqslant |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leqslant \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}.$$

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} |x - x_0| = 0$, а $1/\sqrt{x_0}$ — постоянная, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{x \to x_0} |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = 0,$$

и поэтому

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

Значит, функция $\sqrt{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0 > 0$.

Докажем, что функция $\sqrt{x}$ непрерывна в точке $x_0 = 0$ справа. Пусть ε — произвольное положительное число. Неравенство $|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$ равносильно неравенству $0 \leqslant x < \varepsilon^2$. Возьмем $\delta = \varepsilon^2$, тогда из неравенства $0 \leqslant x < \delta$ следует неравенство $\sqrt{x} < \varepsilon$. Значит, $\lim\limits_{x \to +0} \sqrt{x} = 0$, и поэтому функция $\sqrt{x}$ непрерывна справа в точке $x_0 = 0$. ▲

Пример 2. Доказать, что функция $y = x^4$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

△ Воспользуемся определением 1″. Для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ и любого Δx имеем

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^4 - x_0^4 = 4x_0^3\Delta x + 6x_0^2(\Delta x)^2 + 4x_0(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4.$$

Используя теоремы о пределе суммы и произведения функций, получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(4x_0^3\Delta x + 6x_0^2(\Delta x)^2 + 4x_0(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4\right) = 0,$$

следовательно, функция $y = x^4$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$. ▲

Пример 3. Указать такую границу δ отклонений аргумента t от его значения t_0, чтобы отклонение значения функции $y = \sigma t^4$ $(\sigma > 0)$ от значения $y_0 = \sigma t_0^4$ не превышало ε, т. е. чтобы из неравенства $|t - t_0| < \delta$ следовало неравенство

$$|y(t) - y_0| < \varepsilon. \tag{1}$$

△ Оценим модуль разности:

$$|y(t) - y_0| = \sigma|t^4 - t_0^4| \leqslant \sigma|t - t_0|\left(|t|^3 + t^2|t_0| + |t|t_0^2 + |t_0|^3\right).$$

Рассмотрим только такие значения t, для которых

$$|t - t_0| < 1. \tag{2}$$

Тогда $|t| < |t_0| + 1$, а так как $|t_0| < |t_0| + 1$, то

$$|y(t) - y_0| < 4\sigma(|t_0| + 1)^3|t - t_0|.$$

Отсюда видно, что неравенство (1) будет верно, если наряду с (2) будет выполняться неравенство

$$4\sigma(|t_0| + 1)^3|t - t_0| < \varepsilon,$$

т. е.

$$|t - t_0| < \frac{\varepsilon}{4\sigma(|t_0| + 1)^3}. \tag{3}$$

Возьмем

$$\delta = \frac{\varepsilon}{(4 + \varepsilon)\cdot\sigma\cdot(|t_0| + 1)^3}, \tag{4}$$

тогда из неравенства $|t - t_0| < \delta$ следуют неравенства (3), (2), а значит, и (1). Величину δ из (4) и можно принять за границу допустимых отклонений аргумента. ▲

10.1. Для функции f заполнить таблицу

Δx	0,9	0,5	0,1	0,01
Δy				
Δx	−0,9	−0,5	−0,1	−0,01
Δy				

указав для данного приращения $\Delta x = x - 1$ соответствующее приращение функции $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1)$; построить график функции f и указать на нем точки, соответствующие $\Delta x = 0{,}5$ и $\Delta x = -0{,}5$:

1) $f(x) = 2x - 1$. 2) $f(x) = x^2$.

3) $f(x) = \sqrt{x}$. 4) $f(x) = 1/x$.

10.2. Для функции $f(x)$ заполнить таблицу

ε	2	0,5	0,01	0,001
δ				

указав для каждого данного значения ε какое-либо значение δ так, чтобы для любого $x \in D(f)$ из неравенства $|x - 1| < \delta$ следовало неравенство $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$:

1) $f(x) = 2x - 1$. 2) $f(x) = x^2$.

3) $f(x) = \sqrt{x}$. 4) $f(x) = 1/x$.

10.3. Для функции f заполнить таблицу, указав для каждого значения x_0 наибольшее значение δ_{max} так, чтобы для любого $x \in D(f)$ из неравенства $|x - x_0| < \delta_{max}$ следовало неравенство $|f(x) - f(x_0)| < 0{,}5$:

1) $f(x) = 2x - 1$

x_0	0,01	0,1	1	10
δ_{max}				

2) $f(x) = x^2$

x_0	1/4	7/8	17/12	31/16	$(2l^2-1)/4l,\ l \in \mathbb{N}$
δ_{max}					

3) $f(x) = 1/x$

x_0	0,1	0,25	1	2	8
δ_{max}					

4) $f(x) = \sqrt{x}$

x_0	0	1/16	1/4	25/81	1	4
δ_{max}						

10.4. Функция $\delta(x_0)$, $x_0 > 0$, определена следующим образом: $\delta(x_0)$ есть наибольшее из всех чисел δ таких, что для любого $x \in D(f)$ из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(x_0)| < 1/2$. Построить график $\delta(x_0)$, $x_0 > 0$, если:

1) $f(x) = 1/x$. 2) $f(x) = \sqrt{x}$.

10.5. Доказать, что функция $y(x)$ непрерывна в каждой точке своей области определения, если:

1) $y = 2x - 1$. 2) $y = x^2$. 3) $y = \sqrt{x}$.

4) $y = 1/x$. 5) $y = ax + b$, $a \neq 0$. 6) $y = |x|$.

7) $y = x^3$. 8) $y = \sqrt[3]{x}$. 9) $y = 1/x^2$.

10.6. Доказать, пользуясь неравенством $|\sin x| \leqslant |x|$, непрерывность функции y в каждой точке области определения, если:

1) $y = \sin x$. 2) $y = \cos x$. 3) $y = \sin(ax + b)$.

10.7. Сформулировать на языке «$\varepsilon - \delta$» определение непрерывной 1) слева, 2) справа в точке x_0 функции и записать его, используя символы $\exists$, $\forall$.

10.8. 1) Доказать, что функция $\sqrt[4]{1 - x}$ непрерывна в каждой точке $x_0 < 1$ и непрерывна слева в точке $x_0 = 1$.

2) Доказать, что функция $xE(x)$ непрерывна справа в каждой точке $x_0 = n$, $n \in \mathbb{Z}$.

10.9. Доказать, пользуясь свойствами предела и результатами задач **10.5—10.6**, непрерывность функции $y(x)$ в каждой точке области определения, если:

1) $y = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 2}$. 2) $y = \operatorname{tg} x$. 3) $y = x^2 + 2\sin x$.

4) $y = \sqrt{x}\sin 2x$. 5) $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. 6) $y = 1/x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

10.10. Доказать, пользуясь монотонностью функции $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, и тем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ (см. § 8 пример 9 и задачу 8.26), непрерывность в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ функции

$$y = a^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

10.11. Функция f определена в окрестности точки x_0, кроме самой точки x_0. Доопределить функцию f, задав $f(x_0)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна в точке x_0, если:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$, $x_0 = -1$. 2) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$, $x_0 = 1$.

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$, $x_0 = 0$. 4) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x_0 = 0$.

5) $f(x) = x\operatorname{ctg} x$, $x_0 = 0$. 6) $y = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$, $x_0 = 0$.

10.12. Сформулировать определение непрерывной в точке функции, используя определение предела функции по Гейне (т. е. на языке последовательностей).

10.13. Доказать, что если функция непрерывна в точке, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

10.14. Пусть функция f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$. Доказать, что существуют число $C > 0$ и окрестность точки x_0 такие, что для любого x из этой окрестности верно неравенство $|f(x)| \geqslant C$.

10.15. Функция f непрерывна в точке x_0, и в любой окрестности этой точки имеются как значения x, в которых функция положительна, так и значения x, в которых функция отрицательна. Найти $f(x_0)$.

10.16. Пусть функция определена в окрестности точки x_0. Сформулировать, используя символы $\exists$, $\forall$, утверждение, что функция не является непрерывной в точке x_0.

10.17. Доказать, что функция f не является непрерывной в точке x_0; построить график этой функции, если:

1) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 0, \\ x^2, & x \leqslant 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

2) $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

3) $f(x) = \operatorname{sign}(x + 1)$, $x_0 = -1$.

4) $f(x)=\begin{cases} 1/x^2, & x\neq 0,\\ 1, & x=0, \ x_0=0.\end{cases}$

5) $f(x)=E(x)$, $x_0=2$.

---

2. Точки разрыва функции.

Определение 2. Пусть функция f определена в окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0. Точку x_0 называют *точкой разрыва функции* f в следующих случаях:

1) функция f не определена в этой точке;

2) функция f определена в точке x_0, но

а) не существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$,

б) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но или $f(x)$ не определена в точке x_0, или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$, то x_0 называют *точкой устранимого разрыва.*

Если в точке разрыва x_0 существуют

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0), \tag{5}$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0), \tag{6}$$

то x_0 называют *точкой разрыва 1-го рода*, а разность

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+0)-f(x_0-0) \tag{7}$$

— *скачком функции* f в точке x_0. Его обозначают также $\Delta_{x_0} f$.

Если в точке разрыва x_0 не существует хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то x_0 называют *точкой разрыва 2-го рода.*

Если x_0 — точка разрыва функции, то эту функцию называют *разрывной в точке* x_0.

Употребляются термины: *непрерывная функция, разрывная функция.* Непрерывной функцией называется функция, непрерывная в каждой точке области определения (если функция определена в конце промежутка, то имеется в виду непрерывность соответственно слева или справа). Разрывной функцией называется функция, имеющая хотя бы одну точку разрыва.

Пример 4. Найти точки разрыва функции, установить их род, вычислить скачки в точках разрыва 1-го рода, построить график:

1) $y=(\operatorname{sign} x)^2$. 2) $y=E(x)$. 3) $y=\dfrac{|x|-x}{x^2}$.

△ 1) Из определения функции $\operatorname{sign} x$ следует, что

$$(\operatorname{sign} x)^2=\begin{cases} 1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 56. Функция $y=(\operatorname{sign} x)^2$ непрерывна во всех точках, кроме $x=0$. В этой же точке $y(-0)=y(+0)\neq y(0)$. Значит, $x=0$ — точка устранимого разрыва.

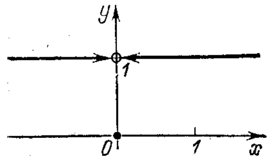


Рис. 56

2) Пусть $n\in\mathbb{Z}$. Если $n-1\leqslant x<n$, то $E(x)=n-1$, а если $n\leqslant x<n+1$, то $E(x)=n$. График показан на рис. 57. Если x_0 — нецелое число, то существует окрестность точки x_0 (не содержащая целых чисел), в которой функция постоянна, а потому и непрерывна в точке x_0. Если же $x_0=n$ — целое число, то $E(n-0)=n-1$, $E(n+0)=n$ и, значит, $x_0=n$ — точка разрыва 1-го рода, причем $\Delta E(n)=1$.

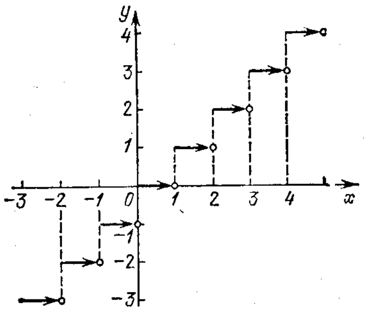


Рис. 57.

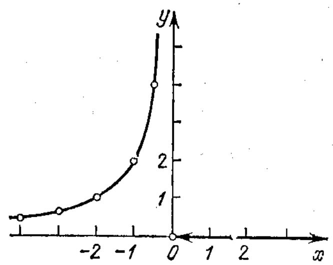


Рис. 58.

3) Функция $y=(|x|-x)/x^2$ определена для всех $x\in\mathbb{R}$, кроме $x=0$. Следовательно, $x=0$ — точка разрыва этой функции. Так как

$$y=\frac{|x|-x}{x^2}=\begin{cases} 0, & x>0,\\ -2/x, & x<0,\end{cases}$$

то $\lim\limits_{x\to+0} y=0$, $\lim\limits_{x\to-0} y=+\infty$, это означает, что $x=0$ — точка разрыва 2-го рода. График этой функции изображен на рис. 58.

10.18. Найти точки разрыва функции, установить их род, найти скачки функции в точках разрыва 1-го рода, построить график функции:

1) $y=\begin{cases} 1/(x-1), & x<0,\\ (x+1)^2, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 1-x, & 2<x.\end{cases}$

2) $y=\dfrac{|x+2|}{x+2}$. 3) $y=\dfrac{1}{x^2-4}$. 4) $y=\dfrac{|x-1|}{x^2-x^3}$.

5) $y=x-E(x)$. 6) $y=\dfrac{1}{x-E(x)}$. 7) $y=\dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{x^2-x}$.

8) $y=\dfrac{2\operatorname{sign}(1-x)}{(\operatorname{sign}(x+1))^2(x+1+(x-1)\operatorname{sign}x)}$.

9) $y=1/\cos x$. 10) $y=x/\sin x$.

10.19. Установить, существует или не существует значение a, при котором функция f непрерывна в точке x_0, если:

1) $f(x)=\begin{cases} x\sin(1/x), & x\neq 0,\\ a, & x=0, \quad x_0=0.\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+x}{1+x^3}, & x\neq -1,\\ a, & x=-1, \quad x_0=-1,\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} ax^2+1, & x>0,\\ -x, & x\leqslant 0, \quad x_0=0.\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\leqslant 0,\\ a(x-1), & x>0, \quad x_0=0.\end{cases}$

10.20. Установить, существуют или не существуют значения a и b, при которых функция f непрерывна на своей области определения, если:

1) $f(x)=\begin{cases} (x-1)^3, & x\leqslant 0,\\ ax+b, & 0<x<1,\\ \sqrt{x}, & x\geqslant 1.\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\leqslant 1,\\ x^2+ax+b, & |x|>1.\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}, & |x|\neq 1,\\ a, & x=-1,\\ b, & x=1.\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\cos(x/2)}{\sin x}, & x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2}\right], \quad x\neq 0, \quad x\neq\pi,\\ a, & x=0,\\ b, & x=\pi.\end{cases}$

10.21. Доказать, что если функция монотонна, то всякая ее точка разрыва является точкой разрыва 1-го рода.

10.22. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число},\\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число},\end{cases}$$

разрывна в каждой точке.

10.23. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x \text{ — рациональное число},\\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число},\end{cases}$$

непрерывна в точке $x=0$ и разрывна в остальных точках.

3. Свойства функций, непрерывных в точке. Если функции f и g непрерывны в точке x_0, то в некоторой окрестности этой точки определены функции cf (c — постоянное), $f+g$, fg и они непрерывны в точке x_0. Если, кроме того, $g(x_0)\neq 0$, то в некоторой окрестности точки x_0 определена функция f/g и она непрерывна в точке x_0.

Если функция $y=g(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0=g(x_0)$, то в некоторой окрестности точки x_0 определена композиция $f(g(x))$ и она непрерывна в точке x_0.

Из этих свойств следует, что знак предела можно переставлять со знаком непрерывной функции, и следует также правило замены переменной при вычислении предела (см. § 9).

10.24. Доказать непрерывность функции в каждой точке ее области определения:

1) $y=3x^5+\dfrac{1}{x^3}$. 2) $y=\operatorname{sh}x$. 3) $y=\sqrt[3]{x^2-6x^3}$.

4) $y=\dfrac{\sin x^2}{x^4+2x^2}$. 5) $y=\cos\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)$.

6) $y=xe^{(\sin x)/x}$.

10.25. Исследовать на непрерывность функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$ в точках, где определены эти композиции, если:

1) $f(x)=\operatorname{sign}x$, $\quad g(x)=1+x^2$.

2) $f(x)=\operatorname{sign}x$, $\quad g(x)=x^3-x$.

3) $f(x)=\operatorname{sign}(x-1)$, $\quad g(x)=\operatorname{sign}(x+1)$.

4) $f(x)=\operatorname{sign}x$, $\quad g(x)=1+x-E(x)$.

10.26. Доказать, что многочлен — непрерывная в каждой точке функция.

10.27. Доказать, что функция

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где P и Q — ненулевые многочлены, непрерывна в каждой точке x_0, где $Q(x_0)\neq 0$.

10.28. 1) Функция f непрерывна в точке x_0, а функция g разрывна в точке x_0. Доказать, что функция $f+g$ разрывна в этой точке.

2) Привести пример разрывных в точке x_0 функций f и g, сумма которых: а) разрывна в точке x_0; б) непрерывна в точке x_0.

10.29. 1) Привести пример непрерывной в точке x_0 функции f и разрывной в точке x_0 функции g, произведение которых: а) разрывно в точке x_0; б) непрерывно в точке x_0.

2) Привести пример разрывных в точке x_0 функций f и g, произведение которых: а) разрывно в точке x_0; б) непрерывно в точке x_0.

10.30. Привести пример непрерывных в точке x_0 функций f и g, частное f/g которых разрывно в точке x_0.

10.31. Доказать правило замены переменной для пределов непрерывных функций: пусть функция $y = g(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = g(x_0)$; тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y).$$

10.32. Доказать перестановочность знака предела и знака непрерывной функции. Пусть для функции $y = g(x)$ существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, а функция $f(y)$ непрерывна в точке y_0; тогда в некоторой окрестности точки x_0, исключая, быть может, саму эту точку, определена композиция $f(g(x))$ и существует

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x)) = f(y_0).$$

---

4. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Функцию называют *непрерывной на отрезке* $[a; b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$ и непрерывна в точке a справа и в точке b — слева.

Пусть функция определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда эта функция

1) ограничена на $[a; b]$;

2) достигает на $[a; b]$ своих верхней и нижней граней, т. е. существуют $x_1, x_2 \in [a; b]$ такие, что

$$f(x_1) = \sup_{[a;\,b]} f(x), \quad f(x_2) = \inf_{[a;\,b]} f(x)$$

(*теоремы Вейерштрасса*).

Пусть функция определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда для любого числа C, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, найдется точка $\xi \in [a; b]$ такая, что $f(\xi) = C$ (*теорема о промежуточных значениях*).

Пусть функция f определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда она имеет обратную функцию, которая определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке $[f(a); f(b)]$ (соответственно $[f(b); f(a)]$) (*теорема о непрерывности обратной функции*).

Пусть функция f определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на интервале $(a; b)$, и пусть

$$c = \lim_{x\to a+0} f(x), \quad d = \lim_{x\to b-0} f(x).$$

Тогда она имеет обратную функцию, которая определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на интервале $(c; d)$ (соответственно $(d; c)$).

При этом, если $a = -\infty$, то под пределом $\lim\limits_{x\to-\infty+0} f(x)$ понимают $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, а если $b = +\infty$, то под пределом $\lim\limits_{x\to+\infty-0} f(x)$ — предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5. Непрерывность функции, заданной параметрически. Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определены и непрерывны на интервале $(\alpha; \beta)$ и функция $\varphi(t)$ строго монотонна на $(\alpha; \beta)$. Тогда система уравнений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

определяет единственную и непрерывную функцию

$$y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$$

на интервале $(a; b)$, где

$$a = \lim_{t\to\alpha+0} \varphi(t), \quad b = \lim_{t\to\beta-0} \varphi(t).$$

6. Непрерывность элементарных функций. Все основные элементарные функции: постоянная, показательная, логарифмическая, степенная, тригонометрические, обратные тригонометрические непрерывны на своих областях определения.

Пример 5. Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, $m = \inf\limits_{[a;\,b]} f$, $M = \sup\limits_{[a;\,b]} f$. Доказать, что для любого $C \in [m; M]$ найдется $\xi \in [a; b]$ такое, что $f(\xi) = C$.

△ По первой теореме Вейерштрасса функция f ограничена на $[a; b]$, поэтому ее верхняя и нижняя грани — числа, и имеет смысл говорить об отрезке $[m; M]$. По второй теореме Вейерштрасса существуют $x_1, x_2 \in [a; b]$ такие, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$. Допустим, что $x_1 < x_2$. По теореме о промежуточных значениях на отрезке $[x_1; x_2]$ найдется число ξ такое, что $f(\xi) = C$. Если $x_1 > x_2$, то теорему о промежуточных значениях следует применить к отрезку $[x_2; x_1]$. Если же $x_1 = x_2$, то $m = M$, а f — постоянная, и в этом случае утверждение очевидно. ▲

Пример 6. Пусть $a > 1$, $b > 1$. Доказать, что уравнение

$$a^y + b^y = x \tag{8}$$

задает единственную непрерывную функцию $y(x)$, определенную на $(0; +\infty)$.

△ Функции a^y и b^y строго возрастают и непрерывны на $\mathbb{R}$. Значит, и их сумма строго возрастает и непрерывна на $\mathbb{R}$. Кроме того,

$$\lim_{y\to-\infty} (a^y + b^y) = 0, \quad \lim_{y\to+\infty} (a^y + b^y) = +\infty.$$

В силу этого по второй из указанных теорем о непрерывности обратной функции существует функция, обратная к функции $a^y + b^y$, $y \in \mathbb{R}$, определенная, строго возрастающая и непрерывная на $(0; +\infty)$. Этот результат можно выразить и иначе: уравнение (8) для любого $x > 0$ имеет и притом единственное решение y, непрерывно зависящее от x и строго возрастающее с ростом x. ▲

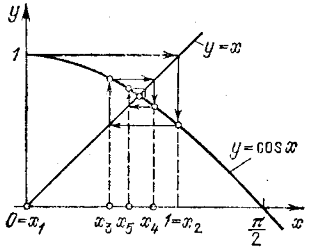


Рис. 59.

Пример 7. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентным способом:

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \cos x_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

сходится и ее предел является решением уравнения $x = \cos x$.

△ Очевидно, x_2 и все члены с большими номерами удовлетворяют условию $0 < x_n \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, т. е. данная последовательность ограничена (рис. 59). При $n \geqslant 3$ преобразуем разность

$$x_{n+1} - x_{n-1} = \cos x_n - \cos x_{n-2} = -2 \sin \frac{x_n - x_{n-2}}{2} \cdot \sin \frac{x_n + x_{n-2}}{2}.$$

Поскольку

$$0 < \frac{x_n + x_{n-2}}{2} \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \frac{x_n - x_{n-2}}{2} \leqslant 1,$$

имеем

$$\sin \frac{x_n + x_{n-2}}{2} > 0, \quad \operatorname{sign}\left(\sin \frac{x_n - x_{n-2}}{2}\right) = \operatorname{sign}(x_n - x_{n-2}).$$

Следовательно,

$$\operatorname{sign}(x_{n+1} - x_{n-1}) = -\operatorname{sign}(x_n - x_{n-2})$$

при $n \geqslant 3$, а при $n \geqslant 4$

$$\operatorname{sign}(x_{n+1} - x_{n-1}) = -(-\operatorname{sign}(x_{n-1} - x_{n-3})) = \operatorname{sign}(x_{n-1} - x_{n-3}). \quad (9)$$

Рассмотрим подпоследовательность $\{x_{2k-1}\}$ с нечетными номерами. Имеем

$$x_3 = \cos x_2 = \cos\cos 0 = \cos 1 > 0,$$

т. е. $x_3 > x_1$. Отсюда и из (9) по принципу математической индукции следует, что $\{x_{2k-1}\}$ — возрастающая последовательность: $x_{2k+1} > x_{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Для подпоследовательности с четными номерами $\{x_{2k}\}$ имеем

$$x_4 = \cos x_3 = \cos\cos 1 < 1,$$

т. е. $x_4 < x_2$; отсюда и из (9) заключаем, что $\{x_{2k}\}$ — убывающая последовательность. Таким образом, подпоследовательности $\{x_{2k-1}\}$ и $\{x_{2k}\}$ ограничены и монотонны, следовательно, они сходятся. Обозначим

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = a, \quad \lim_{k\to\infty} x_{2k} = b.$$

Из равенства $x_{2k} = \cos x_{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, в силу непрерывности функции $\cos x$ следует, что

$$b = \lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} \cos x_{2k-1} = \cos\left(\lim_{k\to\infty} x_{2k-1}\right) = \cos a,$$

а из равенства $x_{2k+1} = \cos x_{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, следует, что

$$a = \lim_{k\to\infty} \cos x_{2k} = \cos\left(\lim_{k\to\infty} x_{2k}\right) = \cos b,$$

т. е.

$$b = \cos a, \quad a = \cos b. \quad (10)$$

Заметим, что поскольку $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, то и $0 \leqslant a \leqslant 1$, $0 \leqslant b \leqslant 1$. Из соотношений (10) для разности $a - b$ имеем

$$a - b = \cos b - \cos a = 2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2}.$$

Учитывая, что $0 \leqslant (a+b)/2 \leqslant 1$, а следовательно,

$$0 \leqslant \sin \frac{a+b}{2} \leqslant \sin 1$$

и что

$$\left| \sin \frac{a-b}{2} \right| \leqslant \left| \frac{a-b}{2} \right|,$$

получаем

$$|a-b| \leqslant |a-b| \cdot \sin 1.$$

Это возможно лишь, когда $|a-b| = 0$, т. е. $a = b$. Итак, обе подпоследовательности $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$ сходятся к одному и тому же пределу a, значит, и вся последовательность $\{x_n\}$ сходится к этому пределу. Из (10) и того, что $a = b$, вытекает, что этот предел является решением уравнения $a = \cos a$. ▲

10.33. Исходя из непрерывности показательной функции, доказать непрерывность гиперболических функций:

1) $y = \operatorname{ch} x$. 2) $y = \operatorname{th} x$. 3) $y = \operatorname{cth} x$.

10.34. Исходя из непрерывности показательной функции, доказать непрерывность логарифмической функции $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

10.35. Исходя из непрерывности тригонометрических функций, доказать непрерывность обратных тригонометрических функций:

1) $y = \arcsin x$. 2) $y = \arccos x$. 3) $y = \operatorname{arctg} x$. 4) $y = \operatorname{arcctg} x$.

10.36. Исходя из непрерывности показательной функции, доказать непрерывность степенной функции $y = x^\mu$ ($x > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$).

10.37. Доказать, что если $y = f(x)$ — непрерывная функция, то непрерывны и функции $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$.

10.38. Пусть f — непрерывная на промежутке X функция. Доказать, что функции

$$f_+(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } f(x)>0,\\ 0, & \text{если } f(x)\leqslant 0,\end{cases}$$

$$f_-(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } f(x)\geqslant 0,\\ f(x), & \text{если } f(x)<0,\end{cases}$$

непрерывны на промежутке X.

10.39. Привести пример функции, непрерывной на каждом из промежутков X_1 и X_2, но не являющейся непрерывной на множестве $X_1\cup X_2$.

10.40. Привести пример непрерывной на интервале функции: 1) неограниченной на этом интервале; 2) ограниченной на этом интервале, но не достигающей ни своей верхней, ни нижней грани.

10.41. 1) Функция f определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, и все ее значения положительны. Доказать, что существует число $\mu>0$ такое, что $f(x)\geqslant\mu$ для любого $x\in[a; b]$.

2) Привести пример функции f, непрерывной на интервале $(a; b)$, принимающей лишь положительные значения и такой, что для любого $\mu>0$ найдется значение $f(x)<\mu$, $x\in(a; b)$.

3) Привести пример функции f, определенной на отрезке $[a; b]$, принимающей лишь положительные значения и такой, что для любого $\mu>0$ найдется значение функции $f(x)<\mu$, $x\in(a; b)$.

10.42. Функция f непрерывна на интервале $(a; b)$,

$$m=\inf_{(a;\,b)} f,\qquad M=\sup_{(a;\,b)} f.$$

Доказать, что для любого $y\in(m; M)$ существует $x\in(a; b)$, такое, что $f(x)=y$.

10.43. Доказать, что если функция определена и непрерывна на отрезке, то множество ее значений — отрезок.

10.44. Привести пример разрывной функции, определенной на отрезке и имеющей в качестве множества значений отрезок.

10.45. Привести пример непрерывной функции, которая принимает значения, равные 1 и 3, но не принимает значения 2.

10.46. Пусть функция определена и монотонна на промежутке и множество ее значений — промежуток. Доказать, что эта функция непрерывна.

10.47. Доказать, что уравнение $x^5-3x=1$: 1) имеет хотя бы один корень на $(1; 2)$; 2) имеет не менее трех корней на $\mathbb{R}$.

10.48. 1) Доказать, что любой многочлен нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень.

2) Доказать, что если многочлен четной степени принимает хотя бы одно значение, противоположное по знаку коэффициенту старшего члена, то он имеет не менее двух действительных корней.

10.49. Доказать, что уравнение $x=y-\varepsilon\sin y$, где $0<\varepsilon\leqslant 1$, задает одну непрерывную функцию $y=f(x)$.

10.50. Доказать, что разрывная функция $y=e^{|x|}\operatorname{sign} x$ имеет непрерывную обратную.

10.51. Доказать, что данная система уравнений определяет непрерывную функцию $y(x)$ или $x(y)$; построить график этой функции:

1) $x=\operatorname{arctg} t,\quad y=\dfrac{1}{1+t^2}$.

2) $x=\operatorname{ch} t$, $y=\operatorname{sh} t$.

3) $x=\ln(1+e^{-t})$, $y=\ln(1+e^{t})$.

10.52. Доказать, что система уравнений

$$x=\frac{t^2+1}{2t},\qquad y=\frac{t^2-1}{2t}$$

определяет две непрерывные на $\mathbb{R}$ функции $x(y)$ и четыре непрерывные на множестве $\{x\colon |x|\geqslant 1\}$ функции $y(x)$.

10.53. Пусть функция f определена в окрестности точки x_0. Будет ли функция f непрерывной в точке x_0, если:

1) $\exists\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,(|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$.

2) $\forall\delta>0\,\exists\varepsilon>0\,\forall x\,(|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$.

3) $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,(|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\Rightarrow|x-x_0|<\delta)$.

4) $\forall\delta>0\,\exists\varepsilon>0\,\forall x\,(|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\Rightarrow|x-x_0|<\delta)$.

5) $\exists\varepsilon>0\,\forall\delta>0\,\forall x\,(|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$?

10.54. Функция f определена в окрестности точки x_0, и существует последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такая, что $\varepsilon_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ и для каждого ε_n существует $\delta_n>0$ такое, что если $x\in D(f)$ и $|x-x_0|<\delta_n$, то $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon_n$. Доказать, что функция f непрерывна в точке x_0.

10.55. Функция f непрерывна в точке x_0. Пусть

$$S(\delta)=\sup_{(x_0-\delta;\ x_0+\delta)} f,\quad s(\delta)=\inf_{(x_0-\delta;\ x_0+\delta)} f.$$

Доказать, что $\lim\limits_{\delta\to 0}(S(\delta)-s(\delta))=0$.

10.56. Указать множество точек, в которых непрерывна функция, найти ее точки разрыва, установить их род, нарисовать график функции:

1) $y=\begin{cases} x^2+2, & x\leqslant 0,\\ x-1, & x>0.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases} 1-x^3, & x<0,\\ (x-1)^3, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 4-x, & 2<x.\end{cases}$

3) $y=\begin{cases} -1/x, & x<0,\\ 5x-x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 4) $y=\begin{cases} -x, & x\leqslant -1,\\ 2/(x-1), & x>-1.\end{cases}$

5) $y=\begin{cases} 2^x, & -1\leqslant x<1, \\ 1, & x=1, \\ x-1, & 1<x\leqslant 4. \end{cases}$

6) $y=\begin{cases} \cos x, & -\pi/2\leqslant x<\pi/4, \\ 1, & x=\pi/4, \\ x^2-\pi^2/16, & \pi/4<x\leqslant\pi. \end{cases}$

Найти точки разрыва функции, установить их род, доопределить функцию по непрерывности в точках устранимого разрыва (10.57—10.59):

10.57. 1) $y=\dfrac{x}{x^2+x-6}$. 2) $y=\dfrac{1}{x^3-3x^2-4x}$.

3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. 4) $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$.

5) $y=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$. 6) $y=\dfrac{2x-1}{2x^2+3x-2}$. 7) $y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}$.

10.58. 1) $y=\dfrac{x}{\cos x}$. 2) $y=(\sin x)\sin(1/x)$.

3) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sin 2x}$. 4) $y=\dfrac{\cos(\pi x/2)}{x^3-x^2}$. 5) $y=\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

10.59. 1) $y=\dfrac{2}{1-2^x}$. 2) $y=\dfrac{1}{\lg x}$. 3) $y=\lg(x^2+3x)$.

4) $y=\lg(x-1)^2$. 5) $y=2^{1/x}$. 6) $y=\dfrac{1}{\ln|x-1|}$.

7) $y=3^{x/(1-x^2)}$. 8) $y=e^{-1/|x|}$. 9) $y=\ln\ln(1+x^2)$.

10.60. Найти точки разрыва функции, установить их род, найти скачки в точках разрыва 1-го рода:

1) $y=\operatorname{sign}(x^2-2x-3)$. 2) $y=\operatorname{sign}\cos x$. 3) $y=(-1)^{E(x)}$.

4) $y=(-1)^{E(1/x)}$. 5) $y=\arcsin(1/x)$. 6) $y=\operatorname{arctg}(1/x)$.

7) $y=\operatorname{arcctg}(1/x^2)$. 8) $y=\dfrac{x+1}{\operatorname{arctg}(1/x)}$. 9) $y=\dfrac{|x|}{\operatorname{arctg} x}$.

10) $y=\dfrac{1}{1+2^{1/(x-1)}}$. 11) $y=\dfrac{3^{1/x}+2^{1/x}}{3^{1/x}-2^{1/x}}$. 12) $y=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

10.61. Доказать, что функция непрерывна в каждой точке своей области определения:

1) $y=\sin\left(x-\lg\left(\sqrt{x}-1\right)\right)$. 2) $y=\sqrt[3]{x^2-4\operatorname{ctg} x}\,2^{\operatorname{tg}(\pi/x)}$.

3) $y=\dfrac{x^{-5/3}-\cos\sqrt{x}}{\operatorname{tg}\arcsin|x|}$.

10.62. При каком значении a функция $y(x)$ будет непрерывна, если:

1) $y=\begin{cases} \dfrac{(1+x)^n-1}{x}, & x\neq 0, \\ a, & x=0,\ n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

2) $y=\begin{cases} x\operatorname{ctg} 2x, & x\neq 0,\ |x|<\pi/2, \\ a, & x=0. \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} (\pi+2x)\operatorname{tg} x, & -\pi<x<\pi/2,\ x\neq-\pi/2, \\ a, & x=-\pi/2. \end{cases}$

4) $y=\begin{cases} (\arcsin x)\operatorname{ctg} x, & x\neq 0, \\ a, & x=0. \end{cases}$

5) $y=\begin{cases} \dfrac{c^x-1}{x}, & x\neq 0, \\ a, & x=0,\ 0<c. \end{cases}$

6) $y=\begin{cases} \dfrac{x}{\ln(1+2x)}, & x\neq 0, \\ a, & x=0. \end{cases}$

7) $y=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}, & x\neq 0, \\ a, & x=0. \end{cases}$ 8) $y=\begin{cases} x\ln x^2, & x\neq 0, \\ a, & x=0. \end{cases}$

9) $y=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0, \\ a, & x=0. \end{cases}$ 10) $y=\begin{cases} (1+x)^{1/x}, & x\neq 0, \\ a, & x=0? \end{cases}$

10.63. Можно ли доопределить функцию в точке разрыва x_0 так, чтобы она стала непрерывной в этой точке:

1) $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{|x|}$, $x_0=0$. 2) $y=2^{-2^{1/(1-x)}}$, $x_0=1$.

3) $y=\dfrac{1}{x}e^{-1/x^2}$, $x_0=0$. 4) $y=\dfrac{\operatorname{th}(\sqrt{x}-1)}{x^2-1}$, $x_0=1$.

5) $y=2^{-E(1/x)}$, $x_0=0$?

10.64. Исследовать на непрерывность и построить график функции f, если:

1) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$. 2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^{2n+1}}$.

3) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n x$. 4) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

5) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$. 6) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+e^{nx}}{1+xe^{nx}}$.

7) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$. 8) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(x\operatorname{arctg}(n\operatorname{ctg} x))$.

9) $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)}$. 10) $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+x)\,\mathrm{th}\,tx$.

10.65. В каких точках непрерывна функция

$$y(x)=\begin{cases} x^2-1, & x \text{ — иррациональное число},\\ 0, & x \text{ — рациональное число?}\end{cases}$$

10.66. Пусть

$$y(x)=\begin{cases} 0, & x \text{ — иррациональное число},\\ 1/q, & x=p/q,\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N},\end{cases}$$

где p/q — несократимая дробь (эту функцию называют функцией Римана). Доказать, что:

1) Эта функция непрерывна в каждой иррациональной точке.

2) Каждая рациональная точка является для данной функции точкой разрыва 1-го рода.

10.67. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases} |x|, & x \text{ — иррациональное число},\\ qx/(q+1), & x=p/q,\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N},\end{cases}$$

где p/q — несократимая дробь.

10.68. Исследовать на непрерывность композиции $f\circ g$ и $g\circ f$, если

$$f(x)=1-|x-1|,$$

$$g(x)=\begin{cases} x, & x \text{ — рациональное число},\\ 2-x, & x \text{ — иррациональное число}.\end{cases}$$

10.69. Функция f возрастает на отрезке $[a;b]$ и разрывна в точке $x_0\in[a;b]$. Функция $g(x)$ монотонна на отрезке $[f(a);f(b)]$.

1) Привести пример таких функций f и g, что $g(f(x))$ непрерывна в x_0.

2) Доказать, что если $g(x)$ строго монотонна в окрестности точки $f(x_0)$, то $g(f(x))$ разрывна в точке x_0.

10.70. Функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$. Доказать, что:

1) $\inf\limits_{(a;\,b)} f=\inf\limits_{[a;\,b]} f$. 2) $\sup\limits_{(a;\,b)} f=\sup\limits_{[a;\,b]} f$.

10.71. Функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$. Доказать, что функции $m(x)$ и $M(x)$ непрерывны на $[a;b]$:

1) $m(x)=\min\limits_{[a;\,x]} f$. 2) $M(x)=\max\limits_{[a;\,x]} f$.

10.72. Функция f непрерывна на промежутке $[a;b)$. Доказать, что функции $m(x)$ и $M(x)$ непрерывны на $[a,b)$:

1) $m(x)=\inf\limits_{[a;\,x)} f$. 2) $M(x)=\sup\limits_{[a;\,x)} f$.

10.73. Функция f определена и ограничена на отрезке $[a;b]$. Доказать, что функции

$$m(x)=\inf_{[a;\,x)} f \quad\text{и}\quad M(x)=\sup_{[a;\,x)} f$$

непрерывны слева в каждой точке $x\in[a;b)$.

10.74. Пусть f и g — непрерывные на X функции. Доказать, что функции $M(x)$ и $m(x)$ также непрерывны на X:

1) $M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$. 2) $m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$.

10.75. 1) Пусть f — непрерывная на X функция, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Доказать, что функция

$$f(a;b;x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } a\leqslant f(x)\leqslant b,\\ a, & \text{если } f(x)<a,\\ b, & \text{если } f(x)>b,\end{cases}$$

также непрерывна на X.

2) Пусть функция f определена на $\mathbb{R}$. Доказать, что для того, чтобы f была непрерывна на $\mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $a>0$ функция $f(-a;a;x)$, определенная в 1), была непрерывна на $\mathbb{R}$.

10.76. Функция f непрерывна на $[a;+\infty)$, и существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Доказать, что f ограничена на $[a;+\infty)$.

10.77. Функция f непрерывна на интервале $(a;b)$ (конечном или бесконечном), и существуют конечные $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b} f(x)$. Доказать, что функция f ограничена на $(a;b)$.

10.78. 1) Доказать, что функция

$$y=\begin{cases} (x+1)\,2^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)}, & x\neq 0,\ |x|\leqslant 2,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

принимает все значения между $f(-2)$ и $f(2)$, но разрывна. Построить график этой функции.

2) Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} \sin(1/x), & x\neq 0,\\ -1, & x=0,\end{cases}$$

принимает на любом отрезке $[0;a]$ все промежуточные значения между $f(0)$ и $f(a)$, но не является непрерывной на $[0;a]$.

10.79. Функция f определена на отрезке $[a;b]$ и обладает следующим свойством: для любых $x_1,x_2\in[a;b]$ и для любого числа C, лежащего между $f(x_1)$ и $f(x_2)$, существует точка $\xi\in(x_1;x_2)$ такая, что $f(\xi)=C$.

1) Указать функцию, обладающую таким свойством, но не являющуюся непрерывной на $[a;b]$.

2) Доказать, что функция, обладающая указанным свойством, не может иметь точек разрыва 1-го рода.

10.80. Доказать, что если функция определена и непрерывна на промежутке, то множество ее значений — промежуток (т. е. отрезок, или интервал, или полуинтервал).

10.81. Привести пример функции, непрерывной на интервале, множеством значений которой является: 1) отрезок; 2) интервал; 3) полуинтервал.

10.82. Пусть функция, определенная на отрезке $[a; b]$, непрерывна и обратима. Доказать, что эта функция строго монотонна на $[a; b]$.

10.83. Доказать, что если функция определена и строго монотонна на промежутке, то ее обратная функция непрерывна.

10.84. Привести пример функции f, непрерывной в точке x_0, имеющей обратную функцию, разрывную в точке $y_0 = f(x_0)$.

10.85. Привести пример непрерывной, строго возрастающей функции, обратная к которой разрывна.

10.86. Доказать, что ограниченная, выпуклая (см. задачу 7.272) на интервале функция непрерывна на этом интервале.

10.87. Доказать, что данная система уравнений определяет непрерывную функцию $y(x)$ или $x(y)$:

1) $x = \dfrac{t-1}{\sqrt{t}}, \quad y = \dfrac{t+1}{\sqrt{t}}$.

2) $x = \dfrac{1}{4}(t-4)e^t, \quad y = \sqrt{t}\, e^t$.

3) $x = \dfrac{t^3}{t^2+1}, \quad y = \dfrac{t}{t^4+1}$.

10.88. Привести пример такой системы уравнений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

в которой функции φ и ψ необратимы, но которая определяет единственную непрерывную функцию $y(x)$.

10.89. Функция f непрерывна на интервале $(a; b)$. Доказать, что для любых чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ из $(a; b)$ и любых чисел

$$\alpha_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,$$

найдется число ξ, $x_1 \leqslant \xi \leqslant x_n$, такое, что

$$f(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i).$$

10.90. Функция f определена на отрезке $[a; b]$. Для любого отрезка $[c; d]$, $a < c < d < b$, множество значений $f(x)$, $x \in [c; d]$, является отрезком. Следует ли отсюда непрерывность функции f на $[a; b]$?

10.91. Функция f непрерывна и ограничена на интервале $(a; +\infty)$, и не имеет предела при x, стремящемся к $+\infty$.

Доказать, что найдется число a, для которого уравнение $f(x) = a$ имеет бесконечно много решений.

10.92. Функция f непрерывна на интервале $(a; b)$, $l = \varliminf_{x\to b} f(x)$, $L = \varlimsup_{x\to b} f(x)$, $L > l$. Доказать, что для любого числа C, $l < C < L$, уравнение

$$f(x) = C$$

в любой окрестности b имеет бесконечно много решений.

10.93. Функция f непрерывна и ограничена на промежутке $[a; +\infty)$. Доказать, что для любого числа T найдется последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n + T) - f(x_n)) = 0.$$

10.94. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называют *открытым*, если каждая точка из A имеет окрестность, принадлежащую A. Точку x_0 называют *точкой прикосновения* множества A, если в любой окрестности x_0 имеется хотя бы одна точка из A. Множество называют *замкнутым*, если оно содержит все свои точки прикосновения. Множество всех точек прикосновения множества A называют *замыканием* A и обозначают $\bar{A}$.

Функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, число C заключено между $f(a)$ и $f(b)$, $f(a) \neq f(b)$. Доказать, что:

1) Каждое из множеств:

а) $A = \{x \in (a; b) : f(x) < C\}$,

б) $B = \{x \in (a; b) : f(x) > C\}$

открыто.

2) Множество $\{x \in [a; b] : f(x) = C\}$ имеет и наибольший и наименьший элементы.

10.95. Пусть функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, $A \subset E(f)$, $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in A\}$. Доказать, что:

1) Если A замкнуто, то и $f^{-1}(A)$ замкнуто.

2) Если A открыто, то и $f^{-1}(A)$ открыто.

10.96. Множество B называют *плотным в множестве* A, если замыкание B содержит A, т. е. $\bar{B} \supset A$. Пусть функция f непрерывна на X, множество A плотно в X, $f(X)$ — множество всех значений функции $f(x)$ при $x \in X$, $f(A)$ — множество всех значений функции при $x \in A$. Доказать, что $f(A)$ плотно в $f(X)$.

10.97. 1) Существует ли непрерывное отображение: а) отрезка на интервал; б) интервала на отрезок?

2) Построить взаимно однозначное отображение отрезка на интервал.

10.98. 1) Доказать, что функция, определенная на $\mathbb{R}$, не может быть непрерывной во всех рациональных точках и разрывной во всех иррациональных.

2) Существует ли функция, непрерывная во всех рациональных точках отрезка $[0; 1]$ и разрывная во всех его иррациональных точках?

10.99. Доказать, что уравнение $x^3 - 3x^2 + 6x - 1$ имеет единственный корень; найти этот корень с точностью до 0,1.

10.100. Доказать, что уравнение $x^4 + 3x^2 - x - 2 = 0$ имеет два (и не более) действительных корня.

10.101. Доказать, что уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k+1} + c = 0,$$

где $a_k \geqslant 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, $a_n > 0$, имеет лишь один действительный корень.

10.102. Доказать, что уравнение $x^n = P_{n-1}(x)$, где $P_{n-1}(x)$ — многочлен $(n-1)$-й степени с положительными коэффициентами, имеет единственный положительный корень.

10.103. Доказать, что:

1) Уравнение

$$\frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} + \frac{a_3}{x-\lambda_3} = 0,$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, имеет по одному действительному корню в интервалах $(\lambda_1; \lambda_2)$ и $(\lambda_2; \lambda_3)$.

2) Уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{x-\lambda_j} = 0,$$

где $a_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$, имеет по одному действительному корню в интервалах $(\lambda_j; \lambda_{j+1})$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$.

10.104. Доказать, что уравнение имеет и притом единственное решение:

1) $x \cdot 2^x = 1$. 2) $xe^x = 2$.

3) $x = \varepsilon \sin x + a$, $0 < \varepsilon < 1$.

4) $x^2 \operatorname{arctg} x = a$, $a \neq 0$.

10.105. Доказать, что уравнение $x = a \sin x + b$, где $0 < a < 1$, $b > 0$, имеет по крайней мере один корень на $[0; a+b]$.

10.106. Доказать, что уравнение $10^{x-1} = x$ имеет только один корень $x_0 \neq 1$.

10.107. Доказать, что уравнение $2^x = 4x$ имеет по крайней мере два действительных корня.

10.108. Доказать, что уравнение $x \sin x - 0{,}5 = 0$ имеет бесконечно много решений.

10.109. 1) Доказать, что существует бесконечно много функций, определенных на $(a; b)$ и удовлетворяющих уравнению

$$y^2 = 1.$$

2) Пусть f — непрерывная и положительная на $(a; b)$ функция. Доказать, что существует единственная непрерывная на $(a; b)$ функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$y^2 = f(x)$$

и условию, что $\varphi(x_0) > 0$ в некоторой точке $x_0 \in (a; b)$.

3) Сколько существует непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, удовлетворяющих уравнению $y^2 = (x^2 - 1)^2$?

4) Сколько существует непрерывных на отрезке $[0; n]$, $n \in \mathbb{N}$, функций, удовлетворяющих уравнению

$$y^2 + 2y + \cos^2 \pi x = 0?$$

10.110. Доказать, что существует единственная непрерывная функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$y = \operatorname{arcctg} xy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

10.111. Найти все непрерывные на $\mathbb{R}$ функции f, удовлетворяющие условию: для любого $x \in \mathbb{R}$ верно равенство:

1) $f\left(\frac{1}{3}x\right) + f\left(\frac{2}{3}x\right) = x$. 2) $f(x) + f(3x) = x$.

3) $f(\alpha x) + f(\beta x) = ax + b$, $\alpha\beta \neq 0$. 4) $f(3x) - f(2x) = x$.

5) $f(x^2) + f(x) = x^2 + x$. 6) $f(x^2) - f(x) = x^2 - x$.

10.112. Найти все непрерывные на $\mathbb{R}$ функции f такие, что для любого $x \in \mathbb{R}$ верно равенство

$$Af(\alpha x) + Bf(\beta x) = ax + b,$$

где $a\alpha\beta AB \neq 0$, $A\alpha + B\beta \neq 0$, $A + B \neq 0$.

10.113. При каких a существуют непрерывные на $\mathbb{R}$ функции f, отличные от постоянной, такие, что для любого $x \in \mathbb{R}$:

1) $f(x^2 + a) = f(x)$. 2) $f(ax^2 + 1) = f(x)$?

10.114. При каких a, b, c существует непрерывная на $\mathbb{R}$ функция f, отличная от постоянной, такая, что для любого $x \in \mathbb{R}$

$$f(ax^2 + bx + c) = f(x)?$$

10.115. 1) Найти все непрерывные на $\mathbb{R}$ функции f, удовлетворяющие для любых $x, y \in \mathbb{R}$ равенству $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

2) Привести пример разрывной функции f, удовлетворяющей для любых $x, y \in \mathbb{R}$ равенству $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

10.116. Найти все непрерывные на $\mathbb{R}$ функции, удовлетворяющие для любых $x, y \in \mathbb{R}$ равенству $f(x+y) = f(x)f(y)$.

10.117. Найти все непрерывные на $(0; +\infty)$ функции, удовлетворяющие для любых $x, y \in (0; +\infty)$ равенству:

1) $f(xy) = f(x) + f(y)$. 2) $f(xy) = f(x)f(y)$.

10.118. Найти все непрерывные на $\mathbb{R}$ функции, удовлетворяющие для любых $x, y \in \mathbb{R}$ равенству

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

и условию: 1) $f(x) \leqslant 1$. 2) $f(x) \geqslant 1$.

10.119. Найти все непрерывные на $\mathbb{R}$ решения функционального уравнения

$$f(x+f(x))=f(x), \qquad x\in\mathbb{R}.$$

10.120. Функция f определена и непрерывна на $\mathbb{R}$, и для любых $x, y\in\mathbb{R}$ верно равенство

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}(f(x)+f(y)).$$

Доказать, что f — линейная функция, т. е. существуют a и b такие, что $f(x)=ax+b$.

10.121. Доказать, что периодическая, непрерывная на всей числовой оси функция, отличная от постоянной, имеет наименьший положительный период. Привести пример периодической функции, определенной на всей числовой оси и отличной от постоянной, которая не имеет наименьшего положительного периода.

10.122. Пусть f и g — непрерывные, периодические с периодом T функции и $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=0$. Доказать, что $f=g$.

10.123. Непрерывная функция f имеет два несоизмеримых периода T_1 и T_2 (т. е. T_1/T_2 — иррациональное число). Доказать, что $f=\mathrm{const}$.

10.124. Построить непрерывные на $\mathbb{R}$ функции f и g такие, что для любого $T>0$ функции $f(x+T)$ и $g(x)$ различны, но для каждого $\varepsilon>0$ существует $T_\varepsilon>0$ такое, что для любого $x\in\mathbb{R}$ верно неравенство

$$|f(x+T_\varepsilon)-g(x)|<\varepsilon.$$

10.125. Пусть функция f непрерывна на $[-1; 1]$ и $|f(x)|<1$, $x\in[-1; 1]$. Доказать, что функция

$$f(x)-\cos(n\arccos x), \quad n\in\mathbb{N}$$

(см. задачу **7.261**) не менее n раз обращается в нуль на отрезке $[-1; 1]$.

10.126. Пусть $P(x)=2^{n-1}x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$. Доказать, что найдется $\xi\in[-1; 1]$ такое, что $|P(\xi)|\geqslant 1$.

10.127. Функция f непрерывна на $[0; 1]$, и $f(0)=f(1)=0$. Доказать, что существует непрерывная, выпуклая вверх (задача **7.272**) функция g такая, что $g(0)=g(1)=0$ и $g(x)\geqslant f(x)$ на $[0; 1]$.

10.128. Функция f непрерывна и периодична с периодом T. Доказать, что есть такая точка x_0, что

$$f\left(x_0+\frac{T}{2}\right)=f(x_0).$$

10.129. Функция f непрерывна, монотонна на $[0; 1]$, и $f(0)=0$, $f(1)=1$. Доказать, что если для некоторого $n\in\mathbb{N}$ при любом $x\in[0; 1]$

$$\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n\text{ раз}}(x)=x,$$

то и $f(x)=x$ на $[0; 1]$.

10.130. Пусть функция f непрерывна на $[0; 1]$ и множество ее значений содержится в $[0; 1]$. Доказать, что существует точка $c\in[0; 1]$ такая, что $f(c)=c$ (всякое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку).

10.131. Пусть f и g определены и непрерывны на отрезке $[a; b]$ и $f(a)<g(a)$ и $f(b)>g(b)$. Доказать, что имеется точка $c\in(a; b)$ такая, что $f(c)=g(c)$.

10.132. Функции f и g определены и непрерывны на $[0; 1]$, и $f\circ g=g\circ f$. Доказать, что существует точка $c\in[0; 1]$ такая, что $f(c)=g(c)$.

10.133. Непрерывные функции f и g отображают отрезок $[0; 1]$ на самого себя. Доказать, что существует точка $c\in[0; 1]$ такая, что $f(g(c))=g(f(c))$.

10.134. Функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, и $f(f(x))=x$ для любого $x\in\mathbb{R}$. Доказать, что существует точка c, в которой $f(c)=c$.

10.135. Привести пример функции: 1) непрерывной на интервале $(0; 1)$, 2) непрерывной на $\mathbb{R}$, для которой уравнение $f(x)=x$ не имеет решений.

10.136. Функция f монотонна, непрерывна на $[0; 1]$, и $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ для любого $x\in[0; 1]$. Доказать, что для любого $a_1\in[0; 1]$ последовательность a_1, $a_{n+1}=f(a_n)$, $n\in\mathbb{N}$, сходится к одному из решений уравнения $f(x)=x$.

10.137. Пусть функция f непрерывна на $[a; b]$, и пусть определена последовательность $\{x_n\}$: $x_0\in[a; b]$, $x_n=f(x_{n-1})$, $n\in\mathbb{N}$ (т. е. для любого $n\in\mathbb{N}$ $f(x_{n-1})\in[a; b]$). Доказать, что:

1) Если f возрастает, то $\{x_n\}$ — монотонная последовательность и существует $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$ такой, что $c=f(c)$.

2) Если f убывает, то $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$ — монотонные подпоследовательности, имеющие пределы. Получить уравнения для этих пределов.

10.138. Функция f строго возрастает, а функция g строго убывает на $[a; b]$, и $E(f)\cap E(g)\neq\varnothing$.

1) Доказать, что уравнение $f(x)=g(x)$ имеет и притом единственное решение.

2) Пусть $x_0\in[a; b]$ таково, что $f(x_0)\in E(g)$, и для любого $n\in\mathbb{N}$ уравнение $g(x_n)=f(x_{n-1})$ имеет решение x_n, т. е. определена последовательность $\{x_n\}$. Доказать, что подпоследовательности $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$ сходятся, каждая к одному из решений уравнения $g^{-1}(f(x))=f^{-1}(g(x))$.

10.139. Для последовательности $\{x_n\}$, заданной рекуррентным способом: $x_1=1/2$, $x_{n+1}=f(x_n)$, $n\in\mathbb{N}$, где

$$f(x)=\begin{cases}(2-3x)/5, & x<-1/6,\\ -3x, & |x|\leqslant 1/6,\\ -(2+3x)/5, & x>1/6,\end{cases}$$

найти пределы подпоследовательностей $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$. Построить график функции f и показать на рисунке построение пяти первых членов последовательности.

10.140. Функция f, определенная на $\mathbb{R}$, удовлетворяет условию Липшица: существует $k>0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ верно неравенство

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant k|x_1-x_2|.$$

Доказать, что если $k<1$, то существует и притом только одно решение уравнения $f(x)=x$.

10.141. Множество значений функции f, определенной на $[a;b]$, содержится в $[a;b]$. Для любых $x, y \in [a;b]$, $x \neq y$, верно неравенство

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|.$$

1) Доказать, что уравнение $f(x)=x$ имеет и притом единственное решение c.

2) Пусть $x_0 \in [a;b]$, $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что:

а) последовательность $\{|x_n - c|\}$ убывает и имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n - c| = \Delta$;

б) существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к d, равному либо $c+\Delta$, либо $c-\Delta$;

в) $|f(d)-c|=\Delta$ и $\Delta=0$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

10.142. 1) Доказать, что уравнение $\operatorname{tg} x = a/x$, $a>0$, имеет на каждом интервале $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{N}$, одно решение.

2) Пусть x_n — решение уравнения $\operatorname{tg} x = a/x$, $a>0$, из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что

$$0 < x_n - \pi n < \frac{2a}{\pi n + \sqrt{\pi^2 n^2 + 4a}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

10.143. 1) Доказать, что уравнение

$$\operatorname{tg} x = ax, \quad a>0,$$

имеет на каждом интервале $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{N}$, одно решение x_n.

2) Пусть x_n — решение уравнения $\operatorname{tg} x = ax$, $a>0$, из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что при всех достаточно больших $n\in\mathbb{N}$

$$0 < \frac{\pi}{2}+\pi n - x_n < \frac{2/a}{\frac{\pi}{2}+\pi n + \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)^2 - \frac{4}{a}}}.$$

3) Найти $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)$, где последовательность $\{x_n\}$ определена в 1) и 2).

10.144. Для последовательности, заданной рекуррентным способом, доказать существование предела и найти его:

1) $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \sin x_n$, $n\in\mathbb{N}$.

2) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = x_n - \sin x_n + \frac{1}{2}$, $n\in\mathbb{N}$.

3) $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_{n+1} = x_n + \cos x_n - \frac{1}{2}$, $n\in\mathbb{N}$.

4) $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \operatorname{arctg} x_n$, $n\in\mathbb{N}$.

5) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = x_n - \operatorname{arctg} x_n + \frac{\pi}{4}$, $n\in\mathbb{N}$.

6) $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 1 + \ln x_n$, $n\in\mathbb{N}$.

10.145. 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $x_n \neq 0$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{1/x_n} = e.$$

10.146. Пусть $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Исследовать на сходимость последовательность

$$\left\{\left(\frac{a_1 n + b_1}{a_2 n + b_2}\right)^n\right\}$$

и найти ее предел, если он существует.

10.147. Используя непрерывность соответствующих функций, вычислить предел последовательности:

1) $\left\{\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n\right\}$, где $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$.

2) $\left\{\left(\cos\frac{x}{n} + \lambda \sin\frac{x}{n}\right)^n\right\}$, где $x, \lambda \in \mathbb{R}$.

3) $\left\{\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n\right\}$, где $a>0$, $b>0$.

4) $\left\{\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1+\frac{2a}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{ka}{n}\right)\right)^n\right\}$, где $k\in\mathbb{N}$, $a\in\mathbb{R}$.

5) $\left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right\}$.

6) $\left\{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right\}$.

7) $\{\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})\}$. 8) $\left\{n - \frac{1}{\sin(1/n)}\right\}$.

9) $\{n - \operatorname{ctg}(1/n)\}$. 10) $\{(\cos(x/\sqrt{n}))^n\}$.

10.148. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таковы, что $0 < a_n < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $0 < b_n < \pi/2$, $\cos b_n = a_n$. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\sqrt{1-a_n}}.$$

§ 11. Асимптоты и графики функций

Использование понятия предела часто позволяет более точно отразить свойства функции при построении ее графика. Перед построением графика следует выяснить, имеет ли функция левые или правые пределы (конечные или бесконечные) в концевых точках своей области определения и в точках разрыва. Если функция имеет предел при $x \to x_0$ $(x \to x_0 + 0$ или $x \to x_0 - 0)$, то иногда удается, используя метод выделения главной части, установить «схожесть» ее графика в окрестности точки x_0 с графиком более простой функции. Например, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ и если $g(x)$ — *главная часть функции при* $x \to x_0$, т. е.

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), \tag{1}$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, то график функции $f(x)$ «схож» с графиком функции $g(x)$ в окрестности точки x_0.

Если

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty, \tag{2}$$

то прямую $x = x_0$ называют *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$. Например, прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графиков функции $1/x$ (рис. 14 § 7) и $\ln x$, так как $\lim\limits_{x \to 0} (1/x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to +0} \ln x = -\infty$. График функции $\operatorname{tg} x$ имеет бесконечно много вертикальных асимптот, а именно, каждая прямая $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, является асимптотой. Выделение главной части бывает полезно и тогда, когда

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty.$$

Если в этих случаях

$$f(x) = g(x) + o(1)$$

при $x \to x_0 - 0$ (или $x \to x_0 + 0$), то график функции $f(x)$ «схож» с графиком функции $g(x)$.

Пример 1. Найти вертикальные асимптоты графика функции f и построить его, если:

1) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$. 2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - x}{x}}$. 3) $f(x) = \sqrt{x^4 - 1}$.

△ 1) Функция определена и непрерывна на интервале $(-1; 1)$. Так как

$$\lim_{x \to 1 - 0} \sqrt{1 - x^2} = \lim_{x \to -1 + 0} \sqrt{1 - x^2} = 0,$$

то

$$\lim_{x \to 1 - 0} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \to -1 + 0} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\infty.$$

Следовательно, прямые $x = -1$ и $x = 1$ — вертикальные асимптоты графика.

Данная функция нечетная. Она строго возрастает на интервале $(0; 1)$. Действительно, если $0 < x < 1$, то

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1 - x^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 - x^2} - 1},$$

откуда и видно, что при возрастании x от 0 до 1 функция $1/(1 - x^2)$, а вместе с ней и функция $f(x)$ строго возрастают. Отметим еще, что $x/\sqrt{1 - x^2} > x$ при $x > 0$. Для того чтобы уточнить вид графика вблизи точки $x = 0$, выделим главную часть функции при $x \to 0$. Так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1,$$

то $f(x)/x = 1 + o(1)$, откуда

$$f(x) = x + o(x).$$

Это означает, что график данной функции вблизи $x = 0$ «похож» на график функции $g(x) = x$ (точки этих графиков, соответствующие значению x, сближаются по вертикали быстрее, чем x убывает). График функции изображен на рис. 60.

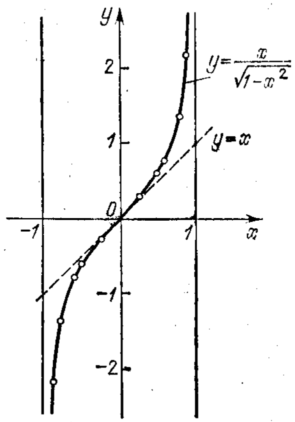


Рис. 60.

2) Функция определена и непрерывна на промежутке $(0; 1]$. Так как

$$\lim_{x \to +0} \sqrt{\frac{1 - x}{x}} = +\infty,$$

то прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота графика. Кроме того,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{1 - x}$$

и

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{1 - x} = 1.$$

Для разности $f(x) - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ имеем

$$\sqrt{\frac{1 - x}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1 - x} - 1}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x} + 1} = o(1), \text{ при } x \to 0,$$

поэтому

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + o(1).$$

Таким образом, функция $1/\sqrt{x}$ является главной частью данной функции $f(x)$ при $x\to+0$ и, более того, расстояние по вертикали между точками графиков функций $\sqrt{(1-x)/x}$ и $1/\sqrt{x}$ стремится к нулю при $x\to+0$. Как иногда говорят, график функции $1/\sqrt{x}$ является криволинейной асимптотой графика данной функции (рис. 61). Используя равенство

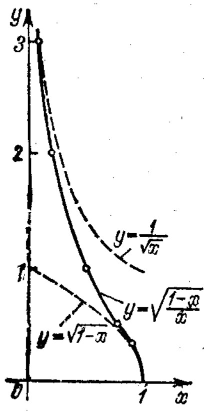


Рис. 61.

$$\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\sqrt{1-x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

и учитывая, что $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{1}{\sqrt{x}}=1$, при $x\to 1-0$ получаем

$$\frac{f(x)}{\sqrt{1-x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}=1+o(1),$$

откуда

$$f(x)=\sqrt{1-x}+o\left(\sqrt{1-x}\right).$$

Следовательно, график данной функции в окрестности точки $x=1$ $(x<1)$ «схож» с графиком более простой функции $\sqrt{1-x}$ (рис. 61). Поскольку

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{x}-1},$$

данная функция, очевидно, убывает на $(0;1]$.

3) Функция определена и непрерывна на промежутках $(-\infty;-1]$ и $[1;+\infty)$, значит, вертикальных асимптот ее график не имеет. Функция четная. Рассмотрим ее на промежутке $[1;+\infty)$. Здесь функция x^4, а значит и функция $\sqrt{x^4-1}$, строго возрастает. Используя формулу

$$f(x)=\sqrt{x-1}\,\sqrt{(x+1)(x^2+1)}$$

и учитывая, что

$$\lim_{x\to 1+0}\sqrt{(x+1)(x^2+1)}=2,$$

при $x\to 1+0$ получаем

$$f(x)=\sqrt{x-1}\,(2+o(1))=2\sqrt{x-1}+o\left(\sqrt{x-1}\right).$$

Следовательно, график данной функции в окрестности точки $x=1$ $(x>1)$ «схож» с графиком функции $2\sqrt{x-1}$ (рис. 62). Кроме того, $f(x)>2\sqrt{x-1}$ при $x>1$, т. е. при $x\to 1+0$ точки графика данной функции приближаются сверху к графику функции $y=2\sqrt{x-1}$. Так как

$$f(x)=x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^4}},\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}=1,$$

то при $x\to+\infty$ получаем

$$f(x)-x^2=x^2\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}-1\right)=$$
$$=x^2\cdot\frac{-1/x^4}{\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}+1}=-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}+1}=o(1),$$

откуда

$$f(x)=x^2+o(1).$$

При этом $f(x)<x^2$, т. е. точки графика данной функции приближаются к параболе $y=x^2$ снизу (рис. 62). ▲

Прямую $y=kx+b$ называют *асимптотой* графика функции $y=f(x)$, $x\in(a;+\infty)$, *при* $x\to+\infty$, если

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(kx+b))=0. \qquad (3)$$

Прямую $y=kx+b$ называют *асимптотой* графика функции $y=f(x)$, $x\in(-\infty;a)$, *при* $x\to-\infty$, если

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(kx+b))=0. \qquad (4)$$

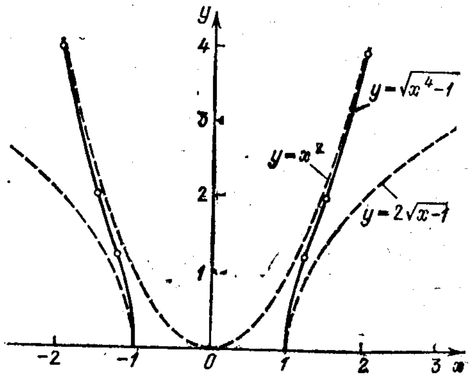


Рис. 62.

Если $k\neq 0$, то асимптоту $y=kx+b$ называют *наклонной*. Если $k=0$, то асимптоту $y=b$ называют *горизонтальной*.

Для того чтобы прямая $y=kx+b$ была асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k\quad\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k\right), \qquad (5)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b\quad\left(\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=b\right). \qquad (6)$$

В случае горизонтальной асимптоты ($k=0$) вместо (5) и (6) имеем: для того чтобы прямая $y=b$ была горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b\quad\left(\lim_{x\to-\infty}f(x)=b\right). \qquad (7)$$

Примерами функций, графики которых имеют горизонтальные асимптоты, являются функции $\operatorname{arctg}x$ и $\operatorname{arcctg}x$ (рис. 42 и 43 § 7). График функции $\operatorname{arctg}x$ имеет горизонтальную асимптоту $y=\pi/2$ при $x\to+\infty$ и горизонтальную асимптоту $y=-\pi/2$ при $x\to-\infty$.

Пример 2. Найти асимптоты графика функции f и построить его, если:

1) $f(x)=\frac{6(x^2-4)}{3x^2+8}$. 2) $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

△ 1) Поскольку

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6(x^2-4)}{3x^2+8}=2,$$

прямая $y=2$ является горизонтальной асимптотой графика и при $x\to+\infty$, и при $x\to-\infty$. Функция непрерывна на $\mathbb{R}$, следовательно, вертикальных асимптот ее график не имеет. Данная функция четная. Из равенства

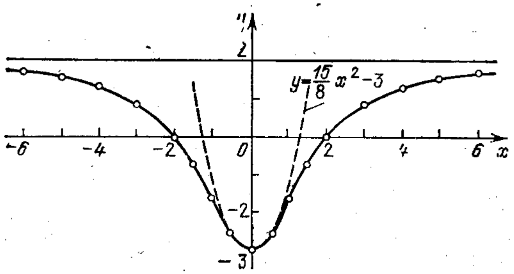


Рис. 63.

$$f(x)=2-\frac{40}{3x^2+8}$$

следует, что на $(0;+\infty)$ с ростом x значения функции строго возрастают. Из этого же равенства видно, что точки графика функции приближаются при $x\to\infty$ к прямой $y=2$ снизу ($f(x)<2$ для любого $x\in\mathbb{R}$). При $x=0$ функция принимает наименьшее значение $f(0)=-3$. Для того чтобы уточнить вид графика вблизи точки $x=0$, представим функцию в виде

$$f(x)=\frac{3(5x^2-(3x^2+8))}{3x^2+8}=\frac{15x^2}{3x^2+8}-3$$

и воспользуемся тем, что при $x\to0$

$$\frac{x^2}{ax^2+b}=\frac{x^2}{b}+o(x^2),\quad a>0,\quad b>0. \tag{8}$$

Последнее равенство доказывается легко:

$$\frac{x^2}{ax^2+b}-\frac{x^2}{b}=-\frac{ax^4}{b(ax^2+b)}=-\frac{ax^2}{b(ax^2+b)}x^2,$$

и так как $\lim\limits_{x\to0}\frac{-ax^2}{b(ax^2+b)}=0$, то $\frac{-ax^2}{b(ax^2+b)}x^2=o(x^2)$, откуда и следует (8).

Используя (8) при $a=3$, $b=8$, получаем равенство

$$f(x)=\frac{15}{8}x^2-3+o(x^2),$$

которое означает, что при $x\to0$ график данной функции «схож» с параболой $y=\frac{15}{8}x^2-3$. График представлен на рис. 63.

2) Функция определена всюду, кроме точки $x=0$. Поскольку

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to-0}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=-\infty,$$

прямая $x=0$ — вертикальная асимптота графика. Далее,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=1,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=-1,$$

поэтому $y=1$ — горизонтальная асимптота при $x\to+\infty$, а $y=-1$ — горизонтальная асимптота при $x\to-\infty$. Поскольку $|\sqrt{1+x^2}/x|>1$ при $x\neq0$, точки графика при $x\to+\infty$ приближаются сверху к прямой $y=1$, а при $x\to-\infty$ — снизу к прямой $y=-1$. Данная функция нечетная. Если $x>0$, то

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{x^2}+1},$$

поэтому с ростом x от 0 до $+\infty$ значения $f(x)$ строго убывают от $+\infty$ до 1. График функции показан на рис. 64. ▲

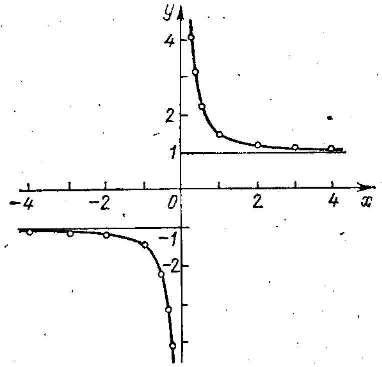


Рис. 64.

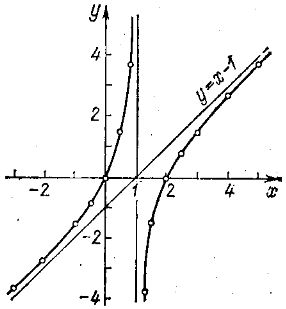


Рис. 65.

Пример 3. Найти все асимптоты графика функции $f(x)$ и построить его, если:

1) $f(x)=\frac{x^2-2x}{x-1}$. 2) $f(x)=\frac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}$.

3) $f(x)=3\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}$.

△ 1) Функция определена и непрерывна всюду, кроме $x=1$, и

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-2x}{x-1}=+\infty,\quad \lim_{x\to1+0}\frac{x^2-2x}{x-1}=-\infty,$$

следовательно, график имеет только одну вертикальную асимптоту $x=1$. Поскольку

$$\frac{x^2-2x}{x-1}=x-1-\frac{1}{x-1}, \tag{9}$$

прямая $y=x-1$ является, очевидно, наклонной асимптотой графика и при $x\to+\infty$, и при $x\to-\infty$. При $x>1$ функции $x-1$ и $-1/(x-1)$ строго возрастают, значит, и их сумма, т. е. данная функция, строго возрастает. Аналогично, при $x<1$ данная функция строго возрастает. Из (9) видно, что при $x\to+\infty$ точки графика приближаются к асимптоте снизу $(f(x)<x-1)$, а при $x\to-\infty$ — сверху. График показан на рис. 65.

2) Функция определена и непрерывна во всех точках, кроме $x=0$, и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}=+\infty,$$

т. е. $x=0$ — вертикальная асимптота графика. Выясним, есть ли асимптоты при $x\to\infty$. Находим (см. формулы (5) и (6))

$$\frac{f(x)}{x}=\sqrt{4+\frac{1}{x^4}}\to 2 \quad \text{при} \quad x\to+\infty,$$

$$f(x)-2x=\frac{\sqrt{4x^4+1}-2x^2}{x}=\frac{1}{x\left(\sqrt{4x^4+1}+2x^2\right)}\to 0$$

$$\text{при} \quad x\to+\infty.$$

Значит, $y=2x$ — наклонная асимптота графика при $x\to+\infty$, причем $f(x)>2x$, т. е. точки графика при $x\to+\infty$ приближаются к асимптоте сверху. Далее,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{1}{x^4}}\right)=-2,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4x^4+1}+2x^2}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x\left(2x^2+\sqrt{4x^4+1}\right)}=0,$$

значит, $y=-2x$ — наклонная асимптота при $x\to-\infty$. Отметим, что $f(x)>-2x$, т. е. точки графика при $x\to-\infty$ приближаются к асимптоте $y=-2x$ сверху. Теперь исследуем функцию на монотонность. Поскольку

$$f(x)=\frac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}=\sqrt{4x^2+\frac{1}{x^2}}\geqslant\sqrt{2\sqrt{4x^2\cdot\frac{1}{x^2}}}=2,$$

причем знак равенства имеет место лишь при $4x^2=1/x^2$, т. е. при $x=\pm 1/\sqrt{2}$, значение функции $f(1/\sqrt{2})=2$ является наименьшим на интервале $(0;+\infty)$. На интервале $(0;\ 1/\sqrt{2})$

функция строго убывает, так как если $0<x_1<x_2<1/\sqrt{2}$, то

$$f^2(x_2)-f^2(x_1)=4\left(x_2^2-x_1^2\right)-\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2x_2^2}=\left(x_2^2-x_1^2\right)\frac{4x_1^2x_2^2-1}{x_1^2x_2^2}<0.$$

Аналогично доказывается, что на интервале $(1/\sqrt{2};\ +\infty)$ функция строго возрастает. Функция четная. График ее изображен на рис. 66.

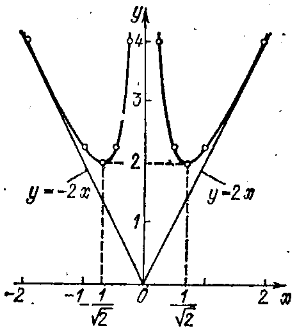


Рис. 66.

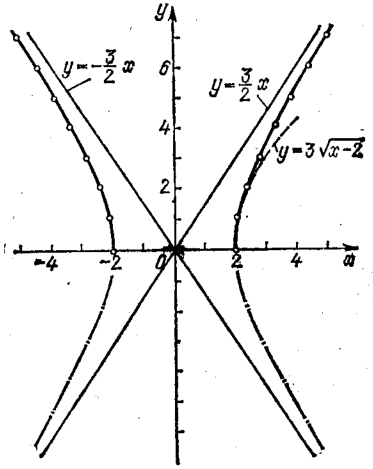


Рис. 67.

3) Функция определена и непрерывна при $|x|\geqslant 2$, значит, вертикальных асимптот не имеет. Функция четная, рассмотрим ее при $x\geqslant 2$. Здесь функция строго возрастает. Используя равенство

$$f(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}$$

и учитывая, что

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x+2}=2,$$

при $x\to 2$ находим

$$f(x)=3\sqrt{x-2}+o\left(\sqrt{x-2}\right),$$

т. е. график данной функции «схож» с графиком функции $y=3\sqrt{x-2}$ (рис. 67). Находим последовательно пределы (формулы (5) и (6))

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt{x^2-4}}{2x}=\frac{3}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{3}{2}x\right)=\frac{3}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}=0;$$

отсюда следует, что график имеет наклонную асимптоту $y=3x/2$ (рис. 67). График данной функции, изображенный на рис. 67, является частью гиперболы, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1;$$

другая часть гиперболы изображена на этом рисунке штрих-пунктирной линией. ▲

При построении кривых, заданных параметрически, также используется понятие асимптоты.

Прямую $x = x_0$ называют *вертикальной асимптотой* кривой

$$x = x(t), \quad y = y(t), \tag{10}$$

если существует такое a (число, $+\infty$ или $-\infty$), что

$$\lim_{t\to a} x(t) = x_0, \quad \lim_{t\to a} y(t) = \infty, \tag{11}$$

или

$$\lim_{t\to a+0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t\to a+0} y(t) = \infty, \tag{12}$$

или

$$\lim_{t\to a-0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t\to a-0} y(t) = \infty. \tag{13}$$

Прямую $y = b$ называют *горизонтальной асимптотой* кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ *при* $x \to +\infty$, если существует такое a (число, $+\infty$ или $-\infty$), что

$$\lim_{t\to a} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to a} y(t) = b, \tag{14}$$

или

$$\lim_{t\to a-0} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to a-0} y(t) = b, \tag{15}$$

или

$$\lim_{t\to a+0} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to a+0} y(t) = b. \tag{16}$$

Прямую $y = kx + b$, $k \neq 0$, называют *наклонной асимптотой* кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ *при* $x \to +\infty$, если существует такое a (число, $+\infty$ или $-\infty$), что

$$\lim_{t\to a} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to a} y(t) = \infty, \tag{17}$$

$$\lim_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = k, \tag{18}$$

$$\lim_{t\to a} (y(t) - kx(t)) = b, \tag{19}$$

или условия (17)—(19) выполнены при $t \to a-0$, или условия (17)—(19) выполнены при $t \to a+0$.

Аналогично даются определения асимптот при $x \to -\infty$.

П р и м е р 4. Найти все асимптоты кривой

$$x = \frac{t^2-2t}{t-1}, \quad y = \frac{\sqrt{t^4+1}}{t}$$

построить эту кривую.

△ Функции $x(t)$ и $y(t)$ определены для всех значений t, кроме $t = 0$ и $t = 1$. Находим пределы этих функций при $t \to -\infty$, $t \to +\infty$, а также левые и правые пределы в точках $t = 0$ и $t = 1$:

1) $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = -\infty, \quad \lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$,

2) $\lim\limits_{t\to-0} x(t) = -0, \quad \lim\limits_{t\to-0} y(t) = -\infty;$

$\lim\limits_{t\to+0} x(t) = +0, \quad \lim\limits_{t\to+0} y(t) = +\infty.$

3) $\lim\limits_{t\to1-0} x(t) = +\infty, \quad \lim\limits_{t\to1-0} y(t) = \sqrt{2}+0;$

$\lim\limits_{t\to1+0} x(t) = -\infty, \quad \lim\limits_{t\to1+0} y(t) = \sqrt{2}+0.$

4) $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty, \quad \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty.$

Из 2) следует, что прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота кривой, причем кривая при $y \to -\infty$ приближается к асимптоте слева ($x(t) < 0$), а при $y \to +\infty$ — справа ($x(t) > 0$) (рис. 68). Из 3) заключаем, что прямая $y = \sqrt{2}$ — горизонтальная асимптота кривой и при $x \to -\infty$, и при $x \to +\infty$, причем

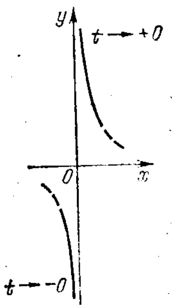


Рис. 68.

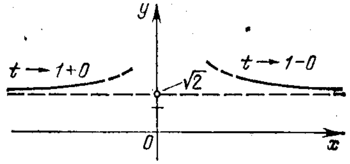


Рис. 69.

в обоих случаях кривая приближается к асимптоте сверху (рис. 69). В случаях 1) и 4) исследуем, имеет ли кривая наклонные асимптоты. Находим (см. (18) и (19))

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{\sqrt{t^4+1}\,(t-1)}{t^2(t-2)} = 1,$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} (y(t) - x(t)) = \lim_{t\to\pm\infty} \left(\frac{\sqrt{t^4+1}}{t} - \frac{t^2-2t}{t-1}\right) = \lim_{t\to\pm\infty} \left(\frac{\sqrt{t^4+1}}{t} - t + \frac{t}{t-1}\right) =$$

$$= \lim_{t\to\pm\infty} \left(\frac{\sqrt{t^4+1}-t^2}{t} + \frac{t}{t-1}\right) = \lim_{t\to\pm\infty} \left(\frac{1}{t(\sqrt{t^4+1}+t^2)} + \frac{t}{t-1}\right) = 1.$$

Следовательно, кривая имеет асимптоту $y = x + 1$ и при $x \to -\infty$, и при $x \to +\infty$. Так как

$$y(t) - x(t) - 1 = \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t(\sqrt{t^4+1}+t^2)},$$

то $y(t)-x(t)-1\to-0$ при $t\to-\infty$ (соответственно $x(t)\to$ $\to-\infty$) и $y(t)-x(t)-1\to+0$ при $t\to+\infty$ (соответственно $x(t)\to+\infty$). Поэтому при $x\to-\infty$ кривая приближается к асимптоте снизу, а при $x\to+\infty$ — сверху (рис. 70). Таким образом, кривая имеет вертикальную асимптоту $x=0$, горизонтальную асимптоту $y=\sqrt{2}$ и наклонную асимптоту $y=x+1$ (и при $x\to+\infty$, и при $x\to-\infty$). Изобразим в одной системе координат графики данных функций $x(t)$ и $y(t)$. Первый из них был построен в примере 3, 1) (рис. 65), второй строится так же,

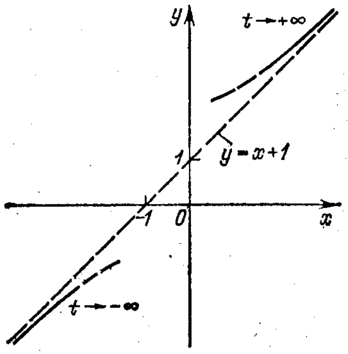


Рис. 70.

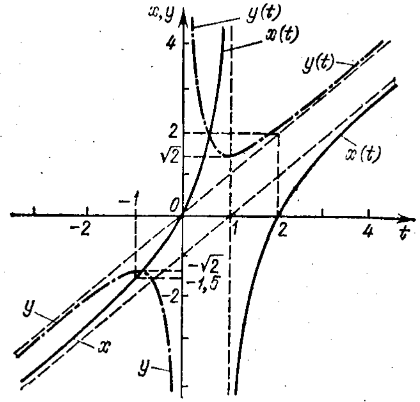


Рис. 71.

как в примере 3, 2), отличие лишь в том, что данная функция $y(t)$ — нечетная. На рис. 71 первый график изображен сплошной линией, второй — штрих-пунктирной. Используя оба эти графика и учитывая предыдущее исследование асимптот, можно представить себе движение точки $(x(t);\ y(t))$, говоря языком механики, в плоскости xOy при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$. Проведем в плоскости xOy асимптоты прямые $y=x+1$ и $y=\sqrt{2}$. Рассмотрим три промежутка оси t: $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;+\infty)$. При возрастании t от $-\infty$ до 0 значения $x(t)$ (рис. 71) строго возрастают от $-\infty$ до 0, значения $y(t)$ сначала возрастают от $-\infty$, достигая максимума при $t=-1$ $(y(-1)=$ $=-\sqrt{2}$, $x(-1)=-1{,}5)$, а затем убывают до $-\infty$. При $t\to-\infty$ точка кривой $(x(t);y(t))$ приближается к асимптоте $y=x+1$ снизу (рис. 70), а при $t\to-0$ — к асимптоте $x=0$ слева (рис. 68). Найдя несколько промежуточных точек, рисуем эту часть кривой (рис. 72). На втором промежутке при возрастании t от 0 до 1 значения $x(t)$ возрастают от 0 до $+\infty$, а значения $y(t)$ убывают от $+\infty$ до $\sqrt{2}$ (при $t=1$ точка кривой не определена, поэтому можно говорить лишь о пределах $x(t)$ и $y(t)$ при $t\to1\pm0$). Точка кривой движется в первом квадранте, переходя от асимптоты $x=0$ (при $t\to+0$) к асимптоте $y=\sqrt{2}$ (сверху) при $t\to1-0$. Наконец, при возрастании t от 1 до $+\infty$ значения $x(t)$ возрастают от $-\infty$ до $+\infty$, значения $y(t)$

возрастают от $\sqrt{2}$ до $+\infty$. Эта часть кривой расположена в 1-м и 2-м квадрантах, точка кривой движется, переходя от асимптоты $y=\sqrt{2}$ (при $t\to1+0$) к асимптоте $y=x+1$ (сверху) при $t\to+\infty$. С учетом всего этого и изображена кривая на рис. 72. Конечно, отдельные детали рисунка («плавность или гладкость», поведение вблизи точки миксимума $x=-1{,}5$, $y=-\sqrt{2}$ и т. д.) еще требуют обоснования. Оно может быть дано методами дифференциального исчисления, и соответствующие примеры будут рассмотрены в § 21. Отметим, что интервалы $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;+\infty)$ были выбраны так, что на каждом из них определены и непрерывны обе функции $x(t)$ и $y(t)$, причем функция $x(t)$ строго возрастает. Поэтому для функции $x=$ $=x(t)$ на интервале $(-\infty;0)$ существует непрерывная, возрастающая обратная функция $t=t_1(x)$, $x\in$ $\in(-\infty;\ 0)$, множеством значений которой является интервал $(-\infty;0)$. Следовательно, пара функций $x(t)$, $y(t)$, $t\in(-\infty;0)$, задает параметрически функцию $y=f_1(x)=y(t_1(x))$, $x\in$ $\in(-\infty;0)$. График этой функции является частью кривой, соответствующей значениям $t\in(-\infty;0)$ (рис. 72). Аналогично, для $x=x(t)$, $t\in(0;\ 1)$, определена непрерывная, возрастающая обратная функция $t=t_2(x)$, $x\in(0;+\infty)$, с множеством значений $(0;1)$. Пара функций $x(t)$, $y(t)$, $t\in(0;1)$, задает параметрически функцию $y=f_2(x)=y(t_2(x))$, $x\in(0;+\infty)$. График этой функции — часть кривой, соответствующая $t\in(0;1)$ (рис. 72). Для $x=x(t)$, $t\in(1;+\infty)$, есть обратная функция $t=t_3(x)$, $x\in\mathbb{R}$, с множеством значений $(1;+\infty)$. Часть кривой при $t\in(1;+\infty)$ является графиком функции $y=f_3(x)=y(t_3(x))$, $x\in\mathbb{R}$ (рис. 72). Указанные части кривой иногда называют ее *ветвями*. Вместо участков монотонности функции $x(t)$ бывает удобно рассматривать участки монотонности функции $y(t)$ и, соответственно, заданные параметрически функции вида $x=g(y)$. Отметим, что построенная кривая имеет, как говорят, *точку самопересечения* (точка A на рис. 72). Для нахождения точек самопересечения нужно найти все решения системы

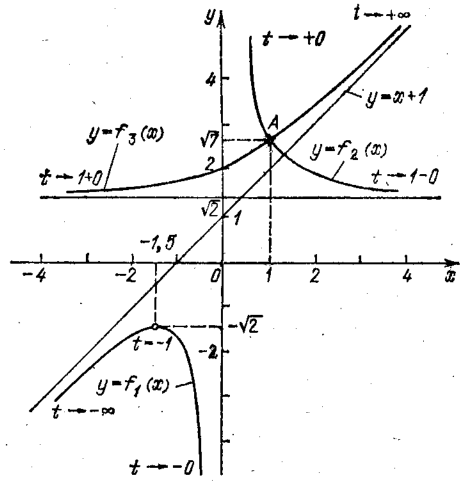


Рис. 72.

$$\begin{cases} x(u)=x(v),\\ y(u)=y(v),\\ \quad u>v,\end{cases}$$

относительно u и v. В данном случае эта система имеет единственное решение $u=(3+\sqrt{5})/2$, $v=(3-\sqrt{5})/2$, а точка самопересечения имеет координаты $x(u)=1$, $y(u)=\sqrt{7}$. ▲

В полярных координатах прямая, задаваемая уравнением

$$r=\frac{d}{\sin(\varphi-\varphi_0)}, \qquad d\neq 0, \tag{20}$$

является асимптотой графика функции $r=r(\varphi)$, если выполнены условия

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} r(\varphi)=+\infty, \tag{21}$$

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} r(\varphi)\sin(\varphi-\varphi_0)=d. \tag{22}$$

Эта прямая удалена от центра на расстояние $|d|$; перпендикуляр, опущенный из центра на прямую, составляет с полярным лучом угол, равный

$$\varphi_0+\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} d.$$

Если наряду с условием (21) вместо (22) выполнено условие

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} r(\varphi)\sin(\varphi-\varphi_0)=0, \tag{23}$$

то асимптотой графика функции $r=r(\varphi)$ является прямая, проходящая через центр и содержащая луч $\varphi=\varphi_0$.

Пример 5. Найти асимптоты графика функции

$$r(\varphi)=\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$$

и построить этот график в полярных координатах.

△ Данная функция — периодическая с периодом 2π, поэтому достаточно рассмотреть отрезок $[-\pi/2;\,3\pi/2]$ длины 2π. Здесь функция определена для

$$\varphi\in[-\pi/2;\ -\pi/4)\cup[0;\ \pi/2]\cup(3\pi/4;\ \pi],$$

причем

$$\lim_{\varphi\to-\frac{\pi}{4}-0} r(\varphi)=+\infty \quad\text{и}\quad \lim_{\varphi\to\frac{3\pi}{4}+0} r(\varphi)=+\infty.$$

Соответственно находим

$$\lim_{\varphi\to-\frac{\pi}{4}-0} r(\varphi)\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{\varphi\to-\frac{\pi}{4}-0}\frac{3\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{2}\,(1-\cos\varphi\sin\varphi)}=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{\varphi\to\frac{3\pi}{4}+0} r(\varphi)\sin\left(\varphi-\frac{3\pi}{4}\right)=\lim_{\varphi\to\frac{3\pi}{4}+0} r(\varphi)\left(-\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, при $\varphi\to-\pi/4-0$ асимптотой является прямая

$$r=-\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\varphi+(\pi/4))},$$

а при $\varphi\to\frac{3\pi}{4}+0$ — прямая

$$r=\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\varphi-(3\pi/4))}.$$

Поскольку $\sin(\varphi-(3\pi/4))=-\sin(\varphi+(\pi/4))$, это одна и та же прямая. Строим ее: отрезок OA (рис. 73) длины $1/\sqrt{2}$ поворачиваем на угол $-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(-1)=-\frac{3\pi}{4}$ и через получившуюся точку A_1 проводим прямую перпендикулярно OA_1, она и является асимптотой. Определим, как расположена кривая относительно своей асимптоты. При $\varphi\to-\frac{\pi}{4}-0$ имеем (рис. 73)

$$|MQ|=\left|r(\varphi)\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right|=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{1-\cos\varphi\sin\varphi}-1\right|<$$

$$<\frac{3}{\sqrt{2}}\left(+1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

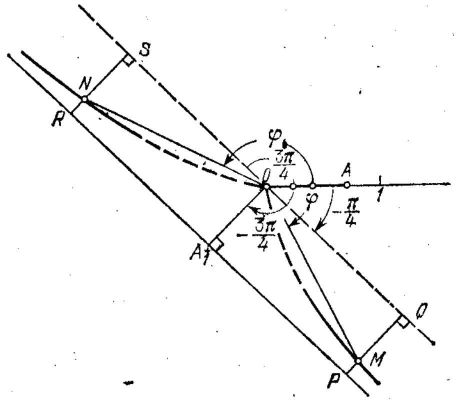


Рис. 73.

Значит, $|MQ|<|PQ|$, т. е. точки кривой находятся над асимптотой. Если $\varphi\to3\pi/4+0$, то

$$|NS|=r(\varphi)\sin\left(\varphi-\frac{3\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{1-\cos\varphi\sin\varphi}\right)<\frac{3}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

поэтому $|NS|<|RS|$ и здесь точки кривой расположены над асимптотой. Из проведенных вычислений следует, что

$$|PM|=\frac{3}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{2}{2-\sin2\varphi}\right),$$

и видно, что $|PM|$ строго убывает при возрастании φ от $-\pi/2$ до $-\pi/4$. Аналогично устанавливаем, что $|RN|$ (рис. 73) строго убывает при убывании φ от π до $3\pi/4$. Это и показано схематично на рис. 73. Кривая проходит дважды через центр O, так как $r=0$ при $\varphi=-\pi/2$ и $\varphi=\pi$ (т. е. O — точка самопересечения кривой). Исследуем вид кривой вблизи точки O. Если $\varphi\to-\pi/2$, то

$$\cos\varphi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\sim\frac{\pi}{2}+\varphi,\qquad \sin\varphi\sim-1;$$

поэтому $\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\sim-1$ и

$$r(\varphi)\sim\frac{-3(\pi/2+\varphi)}{-1}=3\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right).$$

Переходя к декартовым координатам, получаем

$$x=r(\varphi)\cos\varphi\sim3\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)^2,$$

$$y=r(\varphi)\sin\varphi\sim-3\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right),$$

откуда $x\sim y^2/3$, т. е. при $\varphi\to-\pi/2$ кривая «сливается» с параболой $x=y^2/3$ (рис. 74). Аналогично, при $\varphi\to\pi$ имеем

$$\sin\varphi=\sin(\pi-\varphi)\sim\pi-\varphi,\quad \cos\varphi\sim-1,$$

$$\sin^3\varphi+\cos^3\varphi\sim-1,\quad r(\varphi)\sim3(\pi-\varphi),$$

откуда

$$x\sim-3(\pi-\varphi),\quad y\sim3(\pi-\varphi)^2\sim x^2/3,$$

т. е. график данной функции $r=r(\varphi)$ «схож» с параболой $y=x^2/3$ (рис. 74). Точно так же найдем, что $y\sim x^2/3$ при

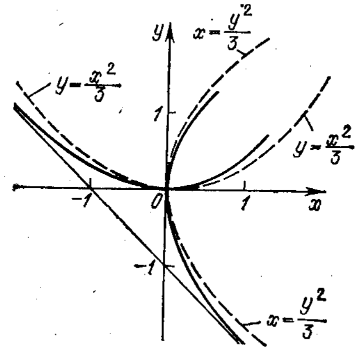


Рис. 74.

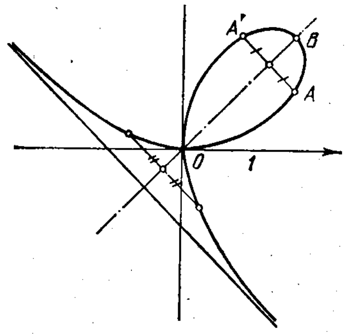


Рис. 75.

$\varphi\to0$ и $x\sim y^2/3$ при $\varphi\to\pi/2$. Оставшуюся часть графика ($\varphi\in[0;\pi/2]$) строим по точкам (рис. 75). Отметим, что эта часть, как и весь график, симметрична относительно прямой $\varphi=\pi/4$, так как $r\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=r(\varphi)$, что равносильно равенству $r\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=r\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$. Более обоснованное построение «петли» $OABA'O$ будет проведено далее с использованием понятия производной.

Построенная кривая носит название *«декартов лист»*, упоминание о ней впервые встречается в письмах Р. Декарта. В декартовых координатах эта кривая, как легко проверить, задается уравнением $x^3+y^3=3xy$. ▲

При исследовании и построении кривой, заданной уравнением $F(x,y)=0$, иногда удается представить кривую или ее

часть как график функции $y=f(x)$ (эта функция удовлетворяет равенству $F(x,f(x))=0$) или как график функции $r=r(\varphi)$ в полярных координатах (эта функция удовлетворяет равенству $F(r(\varphi)\cos\varphi,\ r(\varphi)\sin\varphi)=0$). Иногда же бывает возможным задать кривую параметрически. В этих случаях для исследования и построения кривой можно применить указанные метод выделения главной части и приемы нахождения асимптот (пример 3, 3), пример 5).

Алгебраической кривой n-й степени называют кривую, которую в декартовой системе координат можно задать уравнением вида

$$\sum a_{kl}x^ky^l=0, \tag{24}$$

где сумма составлена по всем целым k и l таким, что $0\leqslant k\leqslant n$, $0\leqslant l\leqslant n$, $k+l\leqslant n$, и имеется хотя бы одно ненулевое слагаемое, для которого $k+l=n$. Если прямая $y=kx+b$ — асимптота алгебраической кривой, то коэффициенты k и b можно найти следующим путем. Подставим в уравнение (24) $y=kx+b$ и в получившемся многочлене относительно x приравняем нулю коэффициенты при двух старших степенях x, коэффициенты k и l являются решениями этой системы из двух уравнений.

Если прямая $x=x_0$ — вертикальная асимптота алгебраической кривой, то x_0 — корень многочлена относительно x, являющегося коэффициентом при старшей степени y в уравнении кривой.

Пример 6. Найти асимптоты кривой

$$x^3-3xy^2=R(x^2+y^2),\quad R>0,\quad x\neq0.$$

△ Коэффициент при старшей степени y (т. е. при y^2) равен $3x+R$. Следовательно, вертикальной асимптотой может быть только прямая $x=-R/3$. Для нахождения наклонных асимптот подставим в данное уравнение $y=kx+b$, получим

$$(3k^2-1)x^3+(6kb+Rk^2+R)x^2+(3b^2+2Rkb)x+Rb^2=0$$

и, приравняв нулю коэффициенты при старших степенях x (т. е. при x^3 и x^2), придем к системе

$$\begin{cases}3k^2-1=0,\\ 6kb+Rk^2+R=0.\end{cases}$$

Эта система имеет два решения

$$k=\pm1/\sqrt{3},\ b=\mp2R/3\sqrt{3}.$$

Значит, только прямые

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2R}{3\sqrt{3}}\quad\text{и}\quad y=-\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{2R}{3\sqrt{3}}$$

могут быть наклонными асимптотами данной кривой. Все три найденные прямые действительно являются асимптотами данной кривой. В этом легко убедиться, например, перейдя к полярным координатам, тогда уравнение данной кривой примет вид

$$r = R/\cos 3\varphi.$$

Можно воспользоваться и заданием этой кривой с помощью параметра $t = y/x$. Подставляя $y = tx$ в уравнение кривой, найдем, что

$$x = R\frac{1+t^2}{1-3t^2}, \quad y = R\frac{t(1+t^2)}{1-3t^2},$$

эти функции задают исходную кривую. Рассмотренную кривую называют *трисектрисой Лоншама*. Она может быть использована для деления угла на три равные части. ▲

Найти асимптоты графика функции $y = y(x)$ (**11.1—11.7**), если:

11.1. 1) $y = \frac{1}{1-x^2}$. 2) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$.

3) $y = \frac{x^3}{6x^2 - 8 - x^4}$. 4) $y = \frac{x}{1+x^2}$.

5) $y = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$. 6) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$.

7) $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$. 8) $y = (2-x)^{2/3} - (2+x)^{2/3}$.

11.2. 1) $y = x + \frac{1}{x^2}$. 2) $y = x + \frac{x^2}{x^2+1}$. 3) $y = \frac{x^2+8x-6}{x}$.

4) $y = \frac{x^2}{x+4}$. 5) $y = \frac{x^2}{|x|+1}$. 6) $y = \frac{2x^4+x^3+1}{x^3}$.

7) $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$. 8) $y = \frac{x^2-2x+3}{x+2}$.

9) $y = \frac{x^3-3ax^2+a^3}{x^2-3bx+2b^2}$. 10) $y = \frac{x^5}{x^4+1}$.

11.3. 1) $y = \sqrt{x^2-4}$. 2) $y = \sqrt{x^2+3x-1}$.

3) $y = \sqrt[3]{x^3-6x}$. 4) $y = \sqrt[3]{x^3+x^2}$.

5) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$. 6) $y = x\sqrt{\frac{x}{x+4}}$.

7) $y = \sqrt{x^4+x^3} - \sqrt{x^4-x^3}$.

8) $y = \sqrt{x^2-1} - x$. 9) $y = x + \sqrt{4x^2+1}$.

11.4. 1) $y = e^{-1/x}$. 2) $y = 0{,}1^{x^2}$. 3) $y = 2^{-1/x^2}$. 4) $y = \frac{2^x}{x}$.

5) $y = x^2e^x$. 6) $y = e^{1/x} - x$. 7) $y = 1 - xe^{-\frac{1}{|x|}-\frac{1}{x}}$.

8) $y = 1 + xe^{2/x}$. 9) $y = x2^{1/x^2}$. 10) $y = |e^x - 1|$.

11) $y = |x+2|e^{-1/x}$.

11.5. 1) $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. 2) $y = x\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$. 3) $y = \operatorname{th} x$.

4) $y = \operatorname{cth} x$. 5) $y = \operatorname{th}^2 x$. 6) $y = x \operatorname{th} x$.

7) $y = 2x + \operatorname{cth} x$. 8) $y = x\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

11.6. 1) $y = \log_3(4-x^2)$. 2) $y = \log_{0,5}(2x^2-3x+1)$.

3) $y = \lg\sin 2x$. 4) $y = x + \frac{\ln x}{x}$.

5) $y = \ln(1+e^x)$. 6) $y = x\lg\left(e+\frac{1}{x}\right)$.

11.7. 1) $y = \frac{1}{\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$. 2) $y = \operatorname{cosec} 2x$.

3) $y = \frac{\cos x}{x}$. 4) $y = x + \frac{\sin x}{2x}$. 5) $y = x\sin(1/x)$.

6) $y = 2 + \cos(2/x)$. 7) $y = \operatorname{arcctg} x$. 8) $y = \operatorname{arctg}(1/x)$.

9) $y = \arcsin(1/x^2)$. 10) $y = \frac{x}{2} + \arccos\frac{1}{x+1}$.

11) $y = 2x - \operatorname{arctg}(x/2)$. 12) $y = x\operatorname{arcctg} x$.

13) $y = x\operatorname{arctg} x$. 14) $y = \frac{1}{\operatorname{arcctg}(1/x)}$.

11.8. Найти асимптоты функции, обратной к функции f, если:

1) $f(x) = \frac{x(x+2)}{x+1}$, $x > -1$. 2) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}$.

3) $f(x) = 1 - 2\sqrt[3]{x^3+3x}$. 4) $f(x) = \operatorname{th} x$.

5) $f(x) = \operatorname{cth} x$. 6) $f(x) = 2x + \operatorname{arctg} x$.

11.9. 1) Функция f определена на интервале $(a; +\infty)$. Доказать, что для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была асимптотой графика функции f при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы расстояние $\rho(x)$ от точки $(x; f(x))$ до этой прямой стремилось к нулю при $x \to +\infty$.

2) Доказать, что в случае вертикальной асимптоты необходимость предыдущего утверждения верна, а достаточность неверна.

11.10. Может ли график функции иметь две разные асимптоты при $x \to +\infty$?

11.11. Используя метод выделения главной части, построить график функции $y = y(x)$, если:

1) $y = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{1-x}}$. 2) $y = x\sqrt{4-x^2}$.

3) $y=\sqrt{x^2-x^4}$. 4) $y=\sqrt[4]{9x^2-x^4}$. 5) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1+x^2}}$.

6) $y=\sqrt[4]{\dfrac{x^4}{3+x^4}}$. 7) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. 8) $y=\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$.

9) $y=x^{3/2}-4x^{1/2}$.

11.12. Функция f определена в окрестности точки x_0, и
$$f(x)=a(x-x_0)+o((x-x_0)),\quad a\neq 0.$$
Доказать, что:

1) $\sqrt{f(x)}=\sqrt{a(x-x_0)}+o\left(\sqrt{|x-x_0|}\right)$ при $a(x-x_0)\geqslant 0$, т. е. графики функций $\sqrt{f(x)}$ и $\sqrt{a(x-x_0)}$ «сближаются» при $x\to x_0$.

2) Если $\alpha>0$, то
$$(f(x))^\alpha=(a(x-x_0))^\alpha+o(|x-x_0|^\alpha)$$
при $a(x-x_0)>0$, т. е. графики функций $(f(x))^\alpha$ и $(a(x-x_0))^\alpha$ «сближаются» при $x\to x_0$.

11.13. 1) Функция f определена в окрестности точки x_0, и
$$f(x)=a(x-x_0)+o((x-x_0)^2),\quad a\neq 0.$$
Доказать, что
$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{a(x-x_0)}+o(1),$$
т. е. графики функций $\dfrac{1}{f(x)}$ и $\dfrac{1}{a(x-x_0)}$ «сближаются» при $x\to x_0$.

2) Проверить, что функция $f(x)=x+x^{4/3}$ удовлетворяет условию
$$f(x)=x+o(x)\quad \text{при } x\to 0,$$
но равенство
$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x}+o(1)\ \text{ при } x\to 0$$
неверно.

11.14. Доказать, что расстояние между точками $(x;f_1(x))$ и $(x;f_2(x))$ графиков функций f_1 и f_2 стремится к нулю, если:

1) $f_1(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2}$, $f_2(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$, $x\to\infty$.

2) $f_1(x)=\sqrt{x^3+bx+c}$, $f_2(x)=x^{3/2}$, $x\to+\infty$.

3) $f_1(x)=\sqrt{x^3+ax^2+bx+c}$, $f_2(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x-a}}$, $x\to+\infty$.

4) $f_1(x)=\sqrt{x^6+2x^4+bx^2+c}$, $f_2(x)=x^3+x$, $x\to+\infty$.

5) $f_1(x)=\operatorname{ch}x$, $f_2(x)=\frac{1}{2}e^x$, $x\to+\infty$.

6) $f_1(x)=\operatorname{sh}x$, $f_2(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}$, $x\to-\infty$.

7) $f_1(x)=\operatorname{ctg}x$, $f_2(x)=1/x$, $x\to 0$.

8) $f_1(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$, $f_2(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2(x-1)}}$, $x\to 1+0$.

11.15. Какие из функций f, g имеют асимптоту при $x\to+\infty$, если:

1) $f(x)=x+\sqrt{x}$, $g(x)=x+\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$.

2) $f(x)=\ln\left(e^x\cdot x^{1/\sqrt{x}}\right)$, $g(x)=\ln\dfrac{e^x}{x+2}$.

3) $f(x)=\dfrac{(x+1)\ln x+1}{\ln x+1}$, $g(x)=\dfrac{(x+1)\ln x+x}{\ln x+1}$.

4) $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}$, $g(x)=\sqrt[4]{x^4+bx}$?

11.16. Найти асимптоты функции
$$y=\frac{a_{n+1}x^{n+1}+a_nx^n+P_{n-1}(x)}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+Q_{n-2}(x)}$$
при $x\to\infty$, если $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $a_{n+1}\neq 0$, $b_n\neq 0$, a_n, b_{n-1} — заданные числа, а $P_{n-1}(x)$ и $Q_{n-2}(x)$ — многочлены степени не выше $n-1$ и $n-2$ соответственно.

11.17. Пусть $P_k(x)=x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_k$, $Q_l(x)=x^l+b_1x^{l-1}+\ldots+b_l$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. Определить, при каких $k,l\in\mathbb{N}$ функция $y=\sqrt[n]{\dfrac{P_k(x)}{Q_l(x)}}$ имеет асимптоту при $x\to+\infty$, и найти эту асимптоту.

11.18. Установить, сверху или снизу приближаются точки графика функции $y=y(x)$ к наклонной асимптоте при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$, если:

1) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$. 2) $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$. 3) $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x+2)^2}$.

4) $y=\dfrac{x^2}{|x+1|}$. 5) $y=\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x}$. 6) $y=\dfrac{x^3+2\sin x}{x^2+1}$.

Найти асимптоты графика функции и построить этот график (11.19—11.22):

11.19. 1) $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$. 2) $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x}$. 3) $y=\dfrac{x^3}{1-x^3}$.

4) $y=\dfrac{(x-3)^2}{4x-4}$. 5) $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}$. 6) $y=\sqrt[5]{\dfrac{x}{x-2}}$.

7) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$. 8) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{|x^2-1|}}$. 9) $y=1-\sqrt{4x^2+1}$.

10) $y=\sqrt{x^2+4x+5}-2$. 11) $y=\sqrt[3]{x^3-x^2}$.

11.20. 1) $y=e^{1/(3+x)}$. 2) $y=\ln(4-x^2)$.

3) $y=\dfrac{e^x}{e^x-1}$. 4) $y=\log_{x^2-6x+7}2$.

5) $y=\ln(1+2e^x)$. 6) $y=\ln\cos x$.

7) $y=\ln\operatorname{arctg} x$. 8) $y=e^{1/\sin x}$.

11.21. 1) $y=x+\dfrac{\sin x}{x}$. 2) $y=x^2\sin(1/x)$.

3) $y=(x+1)^2\sin(2/x)$. 4) $y=x+\operatorname{arctg} x$.

5) $y=(x+1)\operatorname{arcctg} x$. 6) $y=x\arccos(1/x)$.

7) $y=3x+\operatorname{arctg} 5x$. 8) $y=\operatorname{arctg}(1/x)-x$.

9) $y=x^2\operatorname{arctg}(1/x)$.

11.22. 1) $y=\dfrac{x-E(x)}{E(x)}$. 2) $y=\dfrac{\sin x}{x^2-x}$.

3) $y=\dfrac{E(x^3)}{x^2+1}$. 4) $y=\dfrac{\sin x}{E(x/\pi)+0{,}5}$.

11.23. Найти асимптоты кривой:

1) $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$, $a>0$.

2) $x=\dfrac{t-8}{t^2-4}$, $y=\dfrac{3}{t(t^2-4)}$.

3) $x=\dfrac{at^4}{1-t^3}$, $y=\dfrac{at^3}{1-t^3}$, $a>0$.

4) $x=\dfrac{t^3}{t^2+1}$, $y=\dfrac{t^3-2t^2}{t^2+1}$.

5) $x=\dfrac{5at^2}{1+t^5}$, $y=\dfrac{5at^3}{1+t^5}$, $a>0$.

6) $x=t^3+3t+1$, $y=t^3-3t+1$.

7) $x=t^3-3\pi$, $y=t^3-6\operatorname{arctg} t$.

8) $x=t+\sin t$, $y=t+\cos t$. 9) $x=te^t$, $y=te^{-t}$.

10) $x=t\ln t$, $y=t\ln(t+1)$.

11) $x=\dfrac{2e^t}{t-1}$, $y=\dfrac{te^t}{t-1}$. 12) $x=t+e^{-t}$, $y=2t+e^{-2t}$.

11.24. Найти асимптоты кривой и построить эту кривую:

1) $x=\dfrac{1}{t}$, $y=\dfrac{t}{t+1}$. 2) $x=\dfrac{2t}{1-t^2}$, $y=\dfrac{t^2}{1-t^2}$.

3) $x=a\operatorname{ch} t$, $y=b\operatorname{sh} t$. 4) $x=2\cos t$, $y=\operatorname{tg} 2t$.

5) $x=\dfrac{1}{\sin t}$, $y=\dfrac{1}{\sin 2t}$. 6) $x=\dfrac{t}{t^2+1}$, $y=\dfrac{t^2}{t-1}$.

7) $x=\dfrac{2+t^2}{1+t^2}$, $y=\dfrac{t^3}{1+t^2}$. 8) $x=\dfrac{t^2}{t-1}$, $y=\dfrac{t}{t^2-1}$.

11.25. Найти асимптоты графиков функций, заданных в полярных координатах:

1) $r=\sqrt[4]{\dfrac{24}{\sin 2\varphi\,(1-\sin 2\varphi)}}$. 2) $r=\sqrt[4]{-\dfrac{4}{\sin 4\varphi}}$.

3) $r=\dfrac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$. 4) $r=\dfrac{4\cos^2\varphi\sin\varphi}{\cos 2\varphi}$ (*скифоида*).

5) $r=\dfrac{3\cos^2\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$. 6) $r=\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi\,(\cos\varphi-2\sin\varphi)}$.

11.26. Найти асимптоты графиков функций и построить эти графики в полярных координатах:

1) $r=\dfrac{\pi}{\varphi-\dfrac{\pi}{4}}$. 2) $r=\sqrt{\dfrac{\pi}{\varphi}}$ (*жезл*).

3) $\varphi=\dfrac{r}{r-1}$, $r>1$. 4) $\varphi=\dfrac{r}{r^2+1}$, $r\geqslant 0$.

5) $r=2\operatorname{tg}\varphi$. 6) $r=\dfrac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$, $p>0$, $\varepsilon>1$.

7) $r=-\dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$, $p>0$, $\varepsilon>1$.

8) $r=2|1-\operatorname{tg}\varphi|$. 9) $r=\dfrac{2}{|\sin 2\varphi|}$.

10) $r=\dfrac{a}{\cos 3\varphi}$, $a>0$. 11) $r=\dfrac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$, $a>0$.

12) $r=a\dfrac{\operatorname{th}\varphi}{\varphi-1}$, $a>0$.

13) $r=2R\operatorname{tg}\varphi\sin\varphi$, $R>0$ (*циссоида*).

14) $r=\dfrac{a}{\cos\varphi}\pm a\operatorname{tg}\varphi$, $a>0$ (*строфоида*).

15) $r=a\dfrac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$. 16) $r=\sqrt[3]{\dfrac{2\cos\varphi}{\cos^2 2\varphi}}$.

17) $r=\dfrac{\sqrt{2\sin 2\varphi}}{|\cos 2\varphi|}$. 18) $r=\sqrt{-\dfrac{\operatorname{tg} 2\varphi}{2}}$.

11.27. Найти асимптоты кривой, заданной уравнением:

1) $x^2y^2+x-2y=0$. 2) $x^2y^2+y=1$.

3) $(x-1)(x-2)y^2=x^2$. 4) $x^2y+xy^2=1$.

5) $y^3-x^3=6x^2$. 6) $y^2(a-x)=x^2(a+x)$, $a>0$.

7) $x^3-3xy^2=2$. 8) $(x^2-1)^3-x^4y^2=0$.

9) $x^4-y^4=x^2-2y^2$. 10) $xy(x-y)+x+y=0$.

11) $xy(x+y)+x^2=2y^2$. 12) $(x^2-1)y^2=x^2(x^2-4)$.

13) $y^3-x^3+y-2x=0$. 14) $x^4-y^4=4x^2y$.

15) $x^4-2x^2y^2+y^3=0$.

16) $\left(x+\frac{a}{3}\right)\left(y^2-\frac{x^2}{3}\right)+\frac{4}{9}ax^2=0,\ a>0$. 17) $x^y=y^x$.

11.28. Пусть M_0 — фиксированная точка, а M — переменная точка кривой второго порядка

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0.$$

Доказать, что координаты точки M являются рациональными функциями углового коэффициента прямой M_0M.

11.29. Найти асимптоты кривой и построить эту кривую:

1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. 2) $(y+x+1)^2=x^2+1$.

3) $2x^2-5xy+2y^2+x+y-3=0$.

4) $4x^2+9y^2=x^2y^2$. 5) $y^3+x^3=8$.

6) $y^2(x^2+1)=x^2(x^2-1)$. 7) $y^2(4-x)=x^3$ (*циссоида*).

8) $4x^{4/3}-y^{4/3}=1$. 9) $x^2y^2+y^4=4x^2$.

10) $xy(x^2-y^2)+1=0$. 11) $(x^2-y^2)^2+4xy=0$.

12) $(x^2+y^2)(y-1)^2-y^2=0$ (*конхоида*).

§ 12. Равномерная непрерывность функции

Определение. Функцию f называют *равномерно непрерывной на множестве* $X\subset D(f)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для любых $x', x''\in X$, удовлетворяющих условию $|x'-x''|<\delta$, верно неравенство

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon;$$

короче,

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x'\in X\ \forall x''\in X$$
$$(|x'-x''|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|<\varepsilon). \qquad (1)$$

Пример 1. Доказать, что функция $y=\sin x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

△ Пусть x', x'' — произвольные числа; оценим модуль разности:

$$|\sin x'-\sin x''|=\left|2\sin\frac{x'-x''}{2}\cdot\cos\frac{x'+x''}{2}\right|\leqslant|x'-x''|, \qquad (2)$$

так как

$$\left|\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\leqslant\frac{|x'-x''|}{2},\qquad\left|\cos\frac{x'+x''}{2}\right|\leqslant 1.$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Возьмем $\delta=\varepsilon$, тогда для любых $x'\in\mathbb{R}$, $x''\in\mathbb{R}$ из неравенства $|x'-x''|<\delta$ в силу (2) следует неравенство

$$|\sin x'-\sin x''|\leq\delta=\varepsilon.$$

Таким образом, функция $y=\sin x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. ▲

Отрицание определения равномерной непрерывности функции f на множестве X выглядит так:

$$\exists\varepsilon>0\,\forall\delta>0\,\exists x'\in X\,\exists x''\in X$$
$$(|x'-x''|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon). \qquad (3)$$

Пример 2. Доказать, что функция $y=1/x$: 1) равномерно непрерывна на любом промежутке $[a;+\infty)$, где $a>0$; 2) не является равномерно непрерывной на любом промежутке $(0;a]$.

△ 1) Пусть $x', x''\in[a;+\infty)$, $a>0$; тогда

$$\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\frac{|x'-x''|}{x'\cdot x''}\leqslant\frac{1}{a^2}|x'-x''|,$$

так как $x'\geqslant a>0$, $x''\geqslant a>0$. Пусть ε — произвольное положительное число; возьмем $\delta=a^2\varepsilon$, тогда для любых x', x'' из $[a;+\infty)$ из неравенства $|x'-x''|<\delta$ следует, что

$$\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|<\frac{1}{a^2}\delta=\varepsilon.$$

Это и означает равномерную непрерывность функции $1/x$ на промежутке $[a;+\infty)$, $a>0$.

2) Пусть $x', x''\in(0;a]$, где $a>0$. Из равенства

$$\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\frac{|x'-x''|}{x'x''}$$

видно, что величина $\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|$ будет расти, если при сколь угодно малой, но фиксированной разнице $|x'-x''|$ приближать меньшее из чисел x' или x'' к нулю.

Возьмем $x''=x'/2$, тогда $|x'-x''|=x'/2$,

$$\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\frac{1}{x'}.$$

Так как $0<x'<a$, то

$$\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|>a.$$

Чтобы удовлетворить неравенствам $x'<a$ и $|x'-x''|=x'/2<\delta$, достаточно взять $x'=\delta a/(\delta+a)$. Итак, возьмем $\varepsilon=a$ и для произвольного положительного числа δ возьмем $x'=\delta a/(\delta+a)$, $x''=\delta a/2(\delta+a)$. Тогда

$$|x'-x''|=\frac{\delta a}{2(\delta+a)}<\delta,\ \text{а}\ \left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|>a=\varepsilon.$$

Следовательно, функция $y=1/x$ не является равномерно непрерывной на $(0;a]$. ▲

Теорема. Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна.

Например, любой многочлен непрерывен на произвольно взятом отрезке и, следовательно, равномерно непрерывен на этом отрезке.

Справедлива более общая

Теорема (Г. Кантор). Функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна.

Компакт в $\mathbb{R}$ — это ограниченное, замкнутое (см. **10.94**) множество.

Пример 3. Доказать, что функция $y=\sqrt{x}$ равномерно непрерывна на $[0; +\infty)$.

$\triangle$ Функция $y=\sqrt{x}$ непрерывна на $[0; +\infty)$, в том числе и на $[0; 2]$. Значит, по теореме Кантора, она равномерно непрерывна на $[0; 2]$. Докажем, что данная функция равномерно непрерывна на $[1; +\infty)$. Пусть $x', x'' \in [1; +\infty)$; тогда

$$|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|=\frac{|x'-x''|}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}\leqslant\frac{1}{2}|x'-x''|.$$

Для произвольного $\varepsilon>0$ возьмем $\delta=2\varepsilon$, тогда для любых $x', x''\in[1; +\infty)$ из неравенства $|x'-x''|<\delta$ следует неравенство $|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|<0{,}5\delta=\varepsilon$. Значит, функция $y=\sqrt{x}$ равномерно непрерывна на $[1; +\infty)$. Докажем, что эта функция равномерно непрерывна на всем промежутке $[0; +\infty)$. Пусть ε — произвольное положительное число. В силу равномерной непрерывности на $[0; 2]$

$$\exists\,\delta_1>0\,\forall x'\in[0;\ 2]\,\forall x''\in[0;\ 2]$$

$$(|x'-x''|<\delta_1\Rightarrow|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|<\varepsilon),\qquad(4)$$

а в силу равномерной непрерывности на $[1; +\infty)$

$$\exists\delta_2>0\,\forall x'\in[1;\ +\infty]\,\forall x''\in[1;\ +\infty]$$

$$(|x'-x''|<\delta_2\Rightarrow|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|<\varepsilon).\qquad(5)$$

Возьмем за δ наименьшее из трех чисел δ_1, δ_2 и 1, т. е. $\delta=\min\{\delta_1;\delta_2;1\}$. Тогда для любых $x', x''\in[0; +\infty)$ из неравенства $|x'-x''|<\delta$ будет, во-первых, следовать (так как $\delta<1$), что x' и x'' оба принадлежат либо $[0; 2]$, либо $[1; +\infty)$, а во-вторых, отсюда в силу либо (4), либо (5) будет следовать, что $|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|<\varepsilon$. Значит, функция $y=\sqrt{x}$ равномерно непрерывна на $[0; +\infty)$. $\blacktriangle$

Пусть δ — произвольное положительное число.

Модулем непрерывности функции f на множестве $X\subset D(f)$ называют

$$\omega(\delta;\ f;\ X)=\sup_{|x'-x''|\leqslant\delta}(f(x')-f(x'')),\qquad(6)$$
$$x'\in X,\ x''\in X,$$

где верхняя грань берется по всем парам точек x' и x'' из X, расстояние между которыми не больше δ.

Этому определению равносильно следующее определение:

$$\omega(\delta;\ f;\ X)=\sup_{|x'-x''|\leqslant\delta}|f(x')-f(x'')|,\qquad(7)$$
$$x'\in X,\quad x''\in X.$$

Модуль непрерывности для краткости обозначают также $\omega(\delta; f)$ или $\omega(\delta)$, если ясно, о каких X и f идет речь.

Модуль непрерывности для данного δ может быть как числом, так и $+\infty$. В этом смысле модуль непрерывности определен для любого $\delta>0$.

Теорема. Для того чтобы функция f была равномерно непрерывна на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $\delta_0>0$ ее модуль непрерывности $\omega(\delta)$ был числом для каждого $\delta\in(0; \delta_0)$ и чтобы

$$\lim_{\delta\to+0}\omega(\delta)=0.$$

Пример 4. Найти на $(0; +\infty)$ модули непрерывности функций и исследовать с их помощью заданные функции на равномерную непрерывность:

1) $y=\sqrt{x}$. 2) $y=\sin(1/x)$. 3) $y=1/\sqrt{x}$.

$\triangle$ 1) Пусть $\delta>0$, $x', x''\in(0; +\infty)$, $|x'-x''|\leqslant\delta$. Положим для определенности $x'>x''$, т. е. $x'=x''+\Delta x$, где $0<\Delta x\leqslant\delta$. Тогда при любом $x''>0$ имеем

$$|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|=\sqrt{x''+\Delta x}-\sqrt{x''}\leqslant\sqrt{x''+\delta}-\sqrt{x''},$$

а

$$\sqrt{x''+\delta}-\sqrt{x''}=\frac{\delta}{\sqrt{x''+\delta}+\sqrt{x''}}<\frac{\delta}{\sqrt{\delta}}=\sqrt{\delta},$$

так как $\sqrt{x''+\delta}+\sqrt{x''}>\sqrt{\delta}$. Итак, $|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|\leqslant\sqrt{\delta}$ при $|x'-x''|\leqslant\delta$, значит, и

$$\omega(\delta)=\sup_{|x'-x''|\leqslant\delta}|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|\leqslant\sqrt{\delta}.$$

В то же время при $x'=x''+\delta$

$$\lim_{x''\to0}(\sqrt{x''+\delta}-\sqrt{x''})=\sqrt{\delta},$$

поэтому $\omega(\delta)\geqslant\sqrt{\delta}$. Отсюда и из предыдущего следует, что $\omega(\delta)=\sqrt{\delta}$, $\delta>0$. Поскольку

$$\lim_{\delta\to+0}\omega(\delta)=\lim_{\delta\to+0}\sqrt{\delta}=0,$$

функция $y=\sqrt{x}$ равномерно непрерывна на $(0; +\infty)$.

2) Пусть $\delta>0$, $x', x''\in(0; +\infty)$, $|x'-x''|\leqslant\delta$. Очевидно,

$$\left|\sin\frac{1}{x'}-\sin\frac{1}{x''}\right|\leqslant2,\qquad x',\ x''\in(0;\ +\infty),$$

значит, и $\omega(\delta)\leqslant2$.

Рассмотрим точки

$$x_n' = \frac{1}{-(\pi/2)+2\pi n} \text{ и } x_n'' = \frac{1}{(\pi/2)+2\pi n},$$

где $\sin(1/x)$ равен соответственно -1 и 1. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} x_n' = \lim_{n\to\infty} x_n'' = 0,$$

найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $0 < x_n' < \delta$, $0 < x_n'' < \delta$. Тогда $|x_n' - x_n''| < \delta$, а

$$\left|\sin\frac{1}{x_n'} - \sin\frac{1}{x_n''}\right| = 2.$$

Значит, $\omega(\delta) = 2$ для любого $\delta > 0$. Отсюда следует, что

$$\lim_{\delta\to+0} \omega(\delta) = 2 \neq 0,$$

и поэтому функция $y = \sin(1/x)$ не является равномерно непрерывной на $(0; +\infty)$.

3) Пусть $\delta > 0$, $x' > 0$, $x'' = x' + \delta$; тогда

$$\frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x''}} = \frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x'+\delta}}.$$

Так как

$$\lim_{x'\to+0} \frac{1}{\sqrt{x'}} = +\infty, \quad \lim_{x'\to+0} \frac{1}{\sqrt{x'+\delta}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}},$$

то

$$\lim_{x'\to+0}\left(\frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x'+\delta}}\right) = +\infty.$$

Следовательно,

$$\sup_{x'>0}\left(\frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x'+\delta}}\right) = +\infty,$$

а поскольку

$$\omega(\delta) \geqslant \sup_{x'>0}\left(\frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x'+\delta}}\right),$$

то и $\omega(\delta) = +\infty$ для любого $\delta > 0$. Отсюда следует, что функция $1/\sqrt{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0; +\infty)$. ▲

12.1. Доказать, что функция f равномерно непрерывна на множестве X, если:

1) $f(x) = 2x - 1$, $X = \mathbb{R}$. 2) $f(x) = x^2$, $X = (-1; 1)$.

3) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $X = [0; 2]$. 4) $f(x) = \sin x^2$, $X = (-3; 3]$.

5) $f(x) = x \sin(1/x)$, $X = (0; \pi]$.

12.2. Доказать, что функция не является равномерно непрерывной на множестве X:

1) $y = \cos(1/x)$, $X = (0; 1)$. 2) $y = \sin x^2$, $X = \mathbb{R}$.

3) $y = x^2$, $X = \mathbb{R}$. 4) $y = \ln x$, $X = (0; 1)$.

Исследовать функцию на равномерную непрерывность на множестве X (12.3—12.4):

12.3. 1) $y = e^{-\arcsin x}$, $X = [-1; 1]$.

2) $y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^2+1} + |\sin x|}\right)$, $X = [0; 10]$.

3) $y = \sqrt[3]{x}$, $X = \mathbb{R}$. 4) $y = e^x$, $X = \mathbb{R}$.

5) $y = \operatorname{ctg} x$, $X = (0; 1)$. 6) $y = \dfrac{x^6 - 1}{\sqrt{1 - x^4}}$, $X = (-1; 1)$.

7) $y = \sin\sqrt{x}$, $X = [1; +\infty)$.

8) $y = \begin{cases} 1 - x^2, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 + x, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$ $X = [-1; 1]$.

9) $y = x \sin(1/x)$, $X = (0; +\infty)$.

12.4. 1) $y = \begin{cases} x + 1, & x \leqslant 0, \\ e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$ $X = \mathbb{R}$.

2) $y = (\cos x)\cos(\pi/x)$, $X = (0; 1)$.

3) $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $X = (0; \pi)$. 4) $y = x + \sin x$, $X = \mathbb{R}$.

5) $y = x\cos x$, $X = \mathbb{R}$. 6) $y = \sin(1/x)$, $X = [0{,}01; +\infty)$.

7) $y = n^2$ при $2n \leqslant x \leqslant 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, X — это объединение всех отрезков $[2n; 2n+1]$, $n \in \mathbb{N}$.

8) $y = \dfrac{|\sin x|}{x}$, $X = (-\pi; 0) \cup (0; \pi)$.

12.5. Функция f удовлетворяет на множестве X следующему условию: существуют числа $k > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что для любых x_1 и x_2 из X верно неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant k|x_1 - x_2|^\alpha$$

(при $\alpha = 1$ это условие называют *условием Липшица*, при $\alpha < 1$ — *условием Гёльдера порядка* α). Доказать, что функция, удовлетворяющая этому условию, равномерно непрерывна на множестве X.

12.6. Доказать, что если функция равномерно непрерывна на промежутке, то она и непрерывна на этом промежутке.

12.7. Доказать, что если функция неограничена на ограниченном интервале, то она не является равномерно непрерывной на этом интервале.

12.8. 1) Привести пример функции, ограниченной и непрерывной на ограниченном интервале, но не являющейся равномерно непрерывной на нем.

2) Привести пример функции, непрерывной на замкнутом (см. 10.94) множестве и не являющейся равномерно непрерывной на нем.

12.9. 1) Доказать, что если функция f равномерно непрерывна на ограниченном множестве, то она ограничена на этом множестве.

2) Привести пример функции, равномерно непрерывной на множестве и неограниченной на этом множестве.

12.10. Нарисовать график модуля непрерывности $\omega(\delta)$ функции f на множестве X, если:

1) $f(x)=1-2x$, $X=\mathbb{R}$. 2) $f(x)=|x|$, $X=\mathbb{R}$.

3) $f(x)=x$, $X=[-2;\ -1]\cup[1;\ 2]$.

4) $f(x)=\frac{1}{2a}(|x+a|-|x-a|)$, $a>0$, $X=\mathbb{R}$.

5) $f(x)=x^3$, $X=[0;\ 1]$. 6) $f(x)=E(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

12.11. Найти модуль непрерывности функции f на множестве X и, используя его, установить равномерную непрерывность функции, если:

1) $f(x)=2x-1$, $X=\mathbb{R}$.

2) $f(x)=x^2$, $X=[-a;\ a]$, $a>0$.

3) $f(x)=1/x$, $X=[a;\ +\infty)$, $a>0$.

4) $f(x)=\cos x$, $X=\mathbb{R}$. 5) $f(x)=\ln x$, $X=[1;\ +\infty)$.

12.12. Доказать, что для любого $\delta>0$

$$\omega(\delta;\ f;\ X)=+\infty,$$

если:

1) $f(x)=x^3$, $X=\mathbb{R}$. 2) $f(x)=1/x^2$, $X=(0;\ 1)$.

12.13. 1) Привести пример функции, модуль непрерывности $\omega(\delta)$ которой удовлетворяет условию $\omega(+0)=\varepsilon>0$, где ε — данное число.

2) Привести пример неограниченной на промежутке функции, у которой модуль непрерывности $\omega(\delta)$ на этом промежутке удовлетворяет условию $\omega(\delta)<+\infty$ для любого $\delta>0$.

12.14. Пусть $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции f на множестве X.

1) Доказать, что если $\delta_1<\delta_2$, то $\omega(\delta_1)\leqslant\omega(\delta_2)$.

2) Доказать, что если f ограничена на X, то $\omega(\delta)<+\infty$ для любого $\delta>0$.

3) Доказать, что если множество X ограничено, а функция f неограничена на X, то $\omega(\delta)=+\infty$ для любого $\delta>0$.

4) Доказать, что если $\omega(\delta_0)$ — число для некоторого δ_0, то и для каждого δ, $0<\delta<\delta_0$, $\omega(\delta)$ — число, т. е. $\omega(\delta)$ — функция на $(0;\ \delta_0)$, и существует

$$\lim_{\delta\to+0}\omega(\delta)=\omega(+0).$$

5) Доказать, что если X — промежуток, то для любых $\delta_1>0$, $\delta_2>0$

$$\omega(\delta_1+\delta_2)\leqslant\omega(\delta_1)+\omega(\delta_2).$$

6) Доказать, что если X — промежуток и $\omega(\delta_0)=+\infty$ для некоторого δ_0, то $\omega(\delta)=+\infty$ для любого $\delta>0$.

7) Привести пример функции, у которой $\omega(\delta)=\delta$ при $0<\delta<1$; $\omega(\delta)=+\infty$ при $\delta\geqslant1$.

12.15. Доказать, что для любого $\varepsilon>0$ существует δ такое, что для любых $x_1, x_2\in D(f)$ из неравенства $|x_1-x_2|<\delta$ следует неравенство

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\omega(+0)+\varepsilon.$$

12.16. Доказать, что если функция f равномерно непрерывна на множестве X, а $Y\subset X$, то f равномерно непрерывна и на множестве Y.

12.17. Функция f равномерно непрерывна на отрезках $[a;\ b]$ и $[b;\ c]$. Доказать, что она равномерно непрерывна и на отрезке $[a;\ c]$.

12.18. Привести пример функции, равномерно непрерывной на отрезке $[a;\ b]$ и на полуинтервале $(b;\ c]$ и не являющейся равномерно непрерывной на отрезке $[a;\ c]$.

12.19. Доказать, что если функции f и g равномерно непрерывны на множестве X, то для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ функция $\alpha f+\beta g$ равномерно непрерывна на X.

12.20. 1) Доказать, что если функции f и g ограничены и равномерно непрерывны на $[a;\ +\infty)$, то и их произведение fg — равномерно непрерывная функция на $[a;\ +\infty)$.

2) Привести пример равномерно непрерывных на $[a;\ +\infty)$ функций, произведение которых не является равномерно непрерывной на $[a;\ +\infty)$ функцией.

3) Доказать, что если функции f и g равномерно непрерывны на ограниченном множестве, то их произведение fg — равномерно непрерывная функция на этом множестве.

12.21. Доказать, что непрерывная периодическая функция равномерно непрерывна.

12.22. Функция f равномерно непрерывна на $[a;\ +\infty)$. Доказать, что выполнено одно из трех условий: либо $f(x)$ ограничена на $[a;\ +\infty)$, либо $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, либо $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

12.23. Функция f непрерывна на $[a;\ +\infty)$, и существует (конечный) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. Доказать, что f равномерно непрерывна на $[a;\ +\infty)$.

12.24. Доказать, что ограниченная монотонная, непрерывная на интервале функция равномерно непрерывна на этом интервале (конечном или бесконечном).

12.25. Доказать, что для равномерной непрерывности функции f на ограниченном интервале $(a;\ b)$ необходимо и достаточно, чтобы функция была непрерывна на $(a; b)$ и чтобы существовали пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.

12.26. Доказать, что для того, чтобы функцию f, определенную и непрерывную на интервале $(a; b)$, можно было продолжить как непрерывную функцию на отрезок $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы функция f была равномерно непрерывна на интервале $(a; b)$.

12.27. Доказать, что если функция f равномерно непрерывна на интервале $(a; b)$, то ее можно продолжить как непрерывную функцию на всю числовую прямую $\mathbb{R}$, т. е. существует непрерывная функция $F(x)$, определенная на $\mathbb{R}$, такая, что $F(x) = f(x)$ для любого $x \in (a; b)$.

12.28. Функция f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. Доказать, что существуют числа $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ такие, что $|f(x)| \leqslant a|x| + b$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

12.29. Непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция f называется кусочно линейной, если существует разбиение отрезка $[a; b]$ точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$ такое, что

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

и функция f линейна на каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (т. е. $f(x) = a_i x + b_i$). Доказать, что всякая непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция F может быть с любой точностью аппроксимирована кусочно линейной функцией, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такая кусочно линейная функция f, что для всех $x \in [a; b]$ верно неравенство

$$|f(x) - F(x)| < \varepsilon.$$

12.30. Для функции F подобрать кусочно линейную функцию f так, чтобы для всех $x \in [a; b]$ было выполнено неравенство $|F(x) - f(x)| < 0,1$:

1) $F(x) = x^2$, $[a; b] = [-1; 1]$.

2) $F(x) = 1/x$, $[a; b] = [2/3; 2]$.

12.31. Найти такую кусочно линейную на отрезке $[0; 100]$ функцию f, что для всех $x \in [0; 100]$ верно неравенство

$$|2^{-x} - f(x)| < 1/4.$$

12.32. Функцию f, непрерывную на $\mathbb{R}$, называют кусочно линейной на $\mathbb{R}$, если существуют такие числа a и b, $a < b$, что функция f линейна на промежутках $(-\infty; a]$, $[b; +\infty)$ и кусочно линейна на $[a; b]$. Доказать, что, каково бы ни было число ε, не существует кусочно линейной на $\mathbb{R}$ функции f, для которой $|x^2 - f(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

12.33. Доказать, что всякая кусочно линейная функция может быть задана формулой

$$f(x) = a + \sum_{i=0}^{n} a_i |x - x_i|.$$

12.34. Найти формулу, указанную в предыдущей задаче, для кусочно линейной на отрезке функции f, если:

$$1)\ f(x) = \begin{cases} x + 4, & -3 \leqslant x \leqslant -1, \\ 2 - x, & -1 < x < 1, \\ x, & 1 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

$$2)\ f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ 3 - x, & 0 < x \leqslant 1, \\ x + 1, & 1 < x \leqslant 3, \\ 4, & 3 \leqslant x \leqslant 5. \end{cases}$$

3) $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(3) = 2$, $f(4) = -4$, $f(6) = 0$,

где $\{0, 1, 3, 4, 6\}$ — разбиение отрезка $[0; 6]$.

12.35. Доказать, что кусочно линейная на $\mathbb{R}$ функция равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

12.36. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0,\ |x| \leqslant 1/\pi, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

Доказать, что ни при каком a не существует кусочно линейной на $[-1/\pi; 1/\pi]$ функции g такой, что $|f(x) - g(x)| < 1/2$ для любого $x \in [-1/\pi; 1/\pi]$.

12.37. Сформулировать в позитивной форме утверждение, что функция, определенная на отрезке, не может быть аппроксимирована с любой точностью кусочно линейной функцией.

12.38. Доказать, что если функция f определена, но разрывна на отрезке $[a; b]$, то ее нельзя аппроксимировать с любой точностью кусочно линейной функцией.

12.39. Доказать, что если функцию f на промежутке можно аппроксимировать с любой точностью кусочно линейной функцией, то f равномерно непрерывна на этом промежутке.

12.40. Доказать, что если функцию f на промежутке $[c; +\infty)$ можно аппроксимировать с любой степенью точности кусочно линейной функцией, то f имеет асимптоту при $x \to +\infty$ (функция кусочно линейна на $[c; +\infty)$, если она непрерывна на $[c; +\infty)$, линейна на $[d; +\infty)$ при некотором $d > c$ и кусочно линейна на $[c; d]$).

ГЛАВА III
ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 13. Производная. Формулы и правила вычисления производных. Дифференциал функции

1. Определение производной. Предел отношения

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

при $\Delta x\to 0$ называется *производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0. Этот предел обозначают одним из следующих символов:

$$f'(x_0),\quad \frac{df(x_0)}{dx},\quad f'|_{x=x_0}.$$

Таким образом,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Если в каждой точке $x\in(a;b)$ существует

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

т. е. если производная $f'(x)$ существует для всех $x\in(a;b)$, то функция f называется *дифференцируемой на интервале* $(a;b)$. Вычисление производной называют *дифференцированием*.

Пример 1. Найти $f'(x_0)$, вычислив $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, если:

1) $f=1/x^2$, $x_0=1$. 2) $f=\sqrt{2+x}$, $x_0=0$.
3) $f=3|x+1|$, $x_0=-2$. 4) $f=\sqrt[3]{x^2}$, $x_0=0$.

$\triangle$ 1) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{(1+\Delta x)^2}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x-\Delta x^2}{\Delta x(1+\Delta x)^2}=$$
$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2+\Delta x}{(1+\Delta x)^2}=-2.$$

2) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2+\Delta x}-\sqrt{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2})}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

3) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3|-1+\Delta x|-3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3-3\Delta x-3}{\Delta x}=-3.$$

4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}=\infty$. Следовательно, данная функция при $x_0=0$ производной не имеет. ▲

Пример 2. Найти $f'(x)$, вычислив $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, если:

1) $f=x\sqrt{x}$. 2) $f=3^x\sin x$.

$\triangle$ 1) Пусть $x>0$; в противном случае предел, очевидно, не существует. Выберем Δx так, чтобы выполнялось неравенство $|\Delta x|<x$. Тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)\sqrt{x+\Delta x}-x\sqrt{x}}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x\left((x+\Delta x)\sqrt{x+\Delta x}+x\sqrt{x}\right)}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2}{(x+\Delta x)\sqrt{x+\Delta x}+x\sqrt{x}}=\frac{3x^2}{2x\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{x},\quad x>0.$$

2) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3^{x+\Delta x}\sin(x+\Delta x)-3^x\sin x}{\Delta x}=$$
$$=3^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3^{\Delta x}(\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=$$
$$=3^x\sin x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3^{\Delta x}\cos\Delta x-1}{\Delta x}+3^x\cos x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=$$
$$=3^x(\ln 3\cdot\sin x+\cos x),$$

так как

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3^{\Delta x}\cos\Delta x-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{3^{\Delta x}-1}{\Delta x}\cos\Delta x+\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}\right)=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\Delta x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3^{\Delta x}-1}{\Delta x}-2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin^2(\Delta x/2)}{\Delta x}=\ln 3.\ ▲$$

13.1. Вычислив $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, найти $f'(x_0)$:

1) $f=x^2$, $x_0=0{,}1$. 2) $f=2\sin 3x$, $x_0=\pi/6$.
3) $f=1+\ln 2x$, $x_0=1$. 4) $f=x+\operatorname{ctg}x$, $x_0=\pi/4$.

13.2. Вычислив $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, найти $f'(x)$. Указать область существования производной:

1) $f=x^3+2x$. 2) $f=1/x$. 3) $f=\sqrt{x}$. 4) $f=x\sqrt[3]{x}$.
5) $f=1/(1+x^2)$. 6) $f=2^{x+1}$. 7) $f=\ln x$.

8) $f=\sin 2x$. 9) $f=\operatorname{ctg} x+2$. 10) $f=\arcsin x$.
11) $f=\arccos 3x$. 12) $f=7\operatorname{arctg}(x+1)$.

2. Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями над функциями. Если функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ имеют производные в некоторой точке, то функция

$$f=c_1f_1+c_2f_2+\ldots+c_nf_n \quad (c_1, c_2, \ldots, c_n \text{— постоянные})$$

также имеет в этой точке производную, причем

$$f'=c_1f_1'+c_2f_2'+\ldots+c_nf_n'. \qquad (2)$$

Если функции f_1 и f_2 имеют производные в некоторой точке, то и функция $f=f_1f_2$ имеет производную в этой точке, причем

$$f'=f_1f_2'+f_1'f_2. \qquad (3)$$

Если функции f_1 и f_2 имеют производные в некоторой точке и $f_2\neq 0$ в ней, то функция $f=f_1/f_2$ также имеет производную в этой точке, причем

$$f'=\frac{f_2f_1'-f_1f_2'}{f_2^2}. \qquad (4)$$

Формулы для производных основных элементарных функций.

$$c'=0, \quad c=\text{const}. \qquad (5)$$

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}, \quad x>0, \quad \alpha\in\mathbb{R}. \qquad (6)$$

Область существования производной может быть и шире. Например, если $\alpha\in\mathbb{N}$, то

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}, \qquad x\in\mathbb{R}. \qquad (7)$$

Если $a>0$ и $a\neq 1$, то

$$(a^x)'=a^x\ln a, \qquad x\in\mathbb{R}; \qquad (8)$$

в частности,

$$(e^x)'=e^x, \qquad x\in\mathbb{R}. \qquad (9)$$

Если $a>0$ и $a\neq 1$, то

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}, \qquad x>0, \qquad (10)$$

$$(\log_a|x|)'=\frac{1}{x\ln a}, \qquad x\neq 0; \qquad (11)$$

в частности,

$$(\ln x)'=1/x, \qquad x>0, \qquad (12)$$

$$(\ln|x|)'=1/x, \qquad x\neq 0. \qquad (13)$$

$$(\sin x)'=\cos x, \qquad x\in\mathbb{R}, \qquad (14)$$

$$(\cos x)'=-\sin x, \qquad x\in\mathbb{R}, \qquad (15)$$

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}, \qquad x\neq\frac{\pi}{2}(2n+1), \qquad n\in\mathbb{Z}, \qquad (16)$$

$$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad x\neq\pi n, \qquad n\in\mathbb{Z}, \qquad (17)$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x|<1, \qquad (18)$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x|<1, \qquad (19)$$

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}, \qquad x\in\mathbb{R}, \qquad (20)$$

$$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}, \qquad x\in\mathbb{R}, \qquad (21)$$

$$(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x, \qquad x\in\mathbb{R}, \qquad (22)$$

$$(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x, \qquad x\in\mathbb{R}, \qquad (23)$$

$$(\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \qquad x\in\mathbb{R}, \qquad (24)$$

$$(\operatorname{cth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \qquad x\neq 0. \qquad (25)$$

Пример 3. Вычислить производную функции

$$f=\sqrt[3]{x}\arccos x+2\log_2 x+\frac{e^x}{x^2}, \qquad x\in(0;\ 1).$$

$\triangle$ $f'=\left(\sqrt[3]{x}\arccos x\right)'+2(\log_2 x)'+(e^x/x^2)'=$

$$=\sqrt[3]{x}(\arccos x)'+\arccos x\left(\sqrt[3]{x}\right)'+2\frac{1}{x\ln 2}+$$

$$+\frac{x^2(e^x)'-e^x(x^2)'}{x^4}=-\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arccos x}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{x\ln 2}+\frac{(x-2)e^x}{x^3}. \ \blacktriangle$$

Вычислить производную функции $y=f(x)$. Указать область существования производной (13.3—13.38):

13.3. $y=x^3+x^2+x+1$. **13.4.** $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

13.5. $y=7x^{13}+13x^{-7}$. **13.6.** $y=\dfrac{\ln 3}{x}+e^2$.

13.7. $y=\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x^3}+\dfrac{c}{x^4}$. **13.8.** $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$.

13.9. $y=\dfrac{3}{5}x^{5/3}+x^{-2}+\dfrac{2}{x}$. **13.10.** $y=x^3\sqrt[3]{x^2}+x^7\sqrt[3]{x}$.

13.11. $y=x^{\sqrt{5}}-x^{-\sqrt{5}}$. **13.12.** $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c\neq 0$.

13.13. $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x+7}$. **13.14.** $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2+\sqrt[3]{x^2}}$.

13.15. $y=5x\cos x$. **13.16.** $y=(x+1)\operatorname{tg} x$.

13.17. $y = x^2 \operatorname{ctg} x + 2$. **13.18.** $y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

13.19. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x}$. **13.20.** $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$.

13.21. $y = \operatorname{arctg} x + x + \operatorname{arcctg} x$. **13.22.** $y = x \arcsin x$.

13.23. $y = \operatorname{arctg}^2 x$. **13.24.** $y = \dfrac{\arccos x}{\arcsin x}$.

13.25. $y = \ln x^3 - \dfrac{9}{x} - \dfrac{27}{2x^2}$. **13.26.** $y = (\sqrt{2})^x + (\sqrt{5})^{-x}$.

13.27. $y = (x^2 - 7x + 8) e^x$. **13.28.** $y = 2^x \ln |x|$.

13.29. $y = e^x \log_2 x$. **13.30.** $y = \log_2 x \cdot \ln x \cdot \log_3 x$.

13.31. $y = \log_x 2$. **13.32.** $y = \log_x 2^x$.

13.33. $y = \dfrac{\arcsin x}{e^x}$. **13.34.** $y = e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)$.

13.35. $y = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$. **13.36.** $y = \operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x$.

13.37. $y = \dfrac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch}^2 x}$. **13.38.** $y = \dfrac{\ln x}{\operatorname{cth} x}$.

Вычислить производную функции $y = f(x)$ в точке x_0 (13.39—13.51):

13.39. $y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$, $x_0 = -3$.

13.40. $y = (x-a)(x-b)(x-c)$, $x_0 = a$.

13.41. $y = \dfrac{x-a}{x-b}$, $a \neq b$, $x_0 = a$.

13.42. $y = (1 + ax^b)(1 + bx^a)$, $x_0 = 1$.

13.43. $y = x(x-1)(x-2)\ldots(x-1984)(x-1985)$,

$$x_0 = 0, \quad x_0 = 1985.$$

13.44. $y = (2 - x^2)\cos x + 2x \sin x$, $x_0 = 0$.

13.45. $y = \dfrac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

13.46. $y = (ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x$, $x_0 = 0$.

13.47. $y = \operatorname{arctg} x \cdot \arccos x$, $x_0 = 0$.

13.48. $y = \log_2 x \ln 2x$, $x_0 = 1$.

13.49. $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$, $x_0 = e$.

13.50. $y = x^5 e^{-x}$, $x_0 = 5$.

13.51. $y = x \operatorname{sh} 2x$, $x_0 = 1$.

---

3. Вычисление производной сложной функции. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z = g(y)$ — в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция (композиция f и g) $z = \varphi(x) = g(f(x))$ также имеет производную в точке x_0, причем

$$\varphi'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0). \tag{26}$$

Опуская аргумент и используя другое обозначение для производных, формулу (26) можно переписать в виде

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}. \tag{27}$$

Правило вычисления производной сложной функции распространяется на композицию любого конечного числа функций. Например, для сложной функции вида $z(y(x(t)))$, в случае дифференцируемости функций $x(t)$, $y(x)$, $z(y)$ соответственно в точках t_0, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(x_0)$, в точке t_0 имеет место равенство

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}. \tag{28}$$

Пример 4. Вычислить производную функции $z = \ln \sin x$ в точке $x_0 = \pi/3$.

Функция $z = \varphi(x) = \ln \sin x$ является композицией двух функций: $y = f(x) = \sin x$ и $z = g(y) = \ln y$. Функция $f(x) = \sin x$ в точке $x_0 = \pi/3$ имеет производную, причем $f'(\pi/3) = \cos(\pi/3) = 1/2$. Функция $g(y) = \ln y$ в точке $y_0 = \sin x_0 = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ также имеет производную, причем $g'(\sqrt{3}/2) = 2/\sqrt{3}$. По формуле (26) получаем

$$\varphi'(\pi/3) = g'(\sqrt{3}/2) f'(\pi/3) = (2/\sqrt{3}) \cdot (1/2) = 1/\sqrt{3}. \ \blacktriangle$$

Пример 5. Вычислить производную функции

$$z = \sqrt{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

△ Данная функция является композицией функций $y = 1 + x^2$ и $z = \sqrt{y}$, причем

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

По формуле (27) получаем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}. \ \blacktriangle$$

Пример 6. Найти производные функций:

1) $y = 2^{\operatorname{ctg}^2 x}$, $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) $y = \ln \cos \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

△ 1) Применив дважды правило дифференцирования сложной функции, получим

$$y' = 2^{\operatorname{ctg}^2 x} \ln 2 (\operatorname{ctg}^2 x)' = 2^{\operatorname{ctg}^2 x} \ln 2 \cdot 2 \operatorname{ctg} x (\operatorname{ctg} x)'.$$

Следовательно,

$$y' = -2 \ln 2 \cdot 2^{\operatorname{ctg}^2 x} \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2) Применяем правило дифференцирования сложной функции четыре раза:

$$y' = \frac{1}{\cos \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x} (\cos \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x)' =$$

$$= \frac{-\sin \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x}{\cos \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x} (\operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x)' =$$

$$= -\operatorname{tg} \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sh}^2 2x} (\operatorname{sh} 2x)' =$$

$$= -\frac{\operatorname{sh} 2x}{1+\operatorname{sh}^2 2x} \operatorname{ch} 2x \cdot (2x)'.$$

Следовательно,

$$y' = -\frac{2 \operatorname{sh} 2x \operatorname{ch} 2x}{1+\operatorname{sh}^2 2x} = -2 \operatorname{th} 2x, \qquad x \in \mathbb{R}. \ \blacktriangle$$

Пример 7. Найти производную функции

$$y = \ln \sqrt[3]{\frac{e^x}{1+\cos x}}, \qquad x \neq \pi(2n+1), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

△ Здесь выгодно предварительно упростить формулу, с помощью которой задана функция:

$$y = \frac{1}{3} \ln e^x - \frac{1}{3} \ln(1+\cos x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{3} \ln(1+\cos x).$$

Дифференцируя, получаем

$$y' = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \frac{(\cos x)'}{1+\cos x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1+\operatorname{tg}(x/2)}{3}. \ \blacktriangle$$

Пример 8. Найти производную функции

$$y = \frac{1+x^2}{\sqrt[3]{x^4} \sin^7 x}, \qquad x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

△ Здесь удобно рассмотреть функцию $z = \ln|y|$. По формуле дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx},$$

т. е.

$$\frac{dy}{dx} = y \frac{dz}{dx}. \tag{29}$$

Записав функцию z в виде

$$z = \ln|y| = \ln(1+x^2) - \frac{4}{3} \ln|x| - 7 \ln|\sin x|,$$

продифференцируем ее:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{4}{3x} - 7 \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Подставив найденное выражение для $\frac{dz}{dx}$ в формулу (29), получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{\sqrt[3]{x^4} \sin^7 x} \left(\frac{2x}{1+x^2} - \frac{4}{3x} - 7 \frac{\cos x}{\sin x} \right). \ \blacktriangle$$

Пример 9. Найти производную функции:

1) $y = (2+\cos x)^x$, $x \in \mathbb{R}$. 2) $y = x^{2^x}$, $x > 0$.

△ 1) По определению показательно-степенной функции

$$y = e^{x \ln(2+\cos x)}.$$

Дифференцируя, получаем

$$y' = e^{x \ln(2+\cos x)} (x \ln(2+\cos x))' =$$

$$= e^{x \ln(2+\cos x)} \left(\ln(2+\cos x) - x \frac{\sin x}{2+\cos x} \right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

2) Так как $y = e^{2^x \ln x}$, то

$$y' = e^{2^x \ln x} (2^x \ln x)' = e^{2^x \ln x} \left(\frac{1}{x} 2^x + 2^x \ln 2 \cdot \ln x \right) =$$

$$= 2^x x^{2^x} \left(\frac{1}{x} + \ln 2 \cdot \ln x \right), \qquad x > 0. \ \blacktriangle$$

Найти производные функций (13.52—13.152):

13.52. $y = (3x-7)^{10}$.

13.53. $y = \frac{1}{99}(1-x)^{-99} - \frac{1}{49}(1-x)^{-98} + \frac{1}{97}(1-x)^{-97}$.

13.54. $y = (a+bx)^\alpha$.

13.55. $y = (0{,}4 \cos(8x+5) - 0{,}6 \sin 0{,}8x)^2$.

13.56. $y = \frac{\cos 3}{2} x - \frac{1}{4} \sin(2x+3)$.

13.57. $y = (a \cos x + b \sin x)^\alpha$.

13.58. $y = A e^{-k^2 x} \sin(\omega x + \alpha)$.

13.59. $y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{12}$. 13.60. $y = \sqrt{2x^2 + \sqrt{x^2+1}}$.

13.61. $y = \sqrt[13]{9 + 7 \sqrt[5]{2x}}$.

13.62. $y = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$. 13.63. $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

13.64. $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}\,(x^2+\sqrt{1+x^4})}$.

13.65. $y = \frac{x^2+4}{x\sqrt{4+\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)^2}}$.

13.66. $y = \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{xa^2}-\sqrt{x^2 a}-\sqrt{a^3}}{\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{ax^4}-\sqrt[4]{a^4 x}-\sqrt[4]{x^5}}$.

13.67. $y = \cos(1/x)$. 13.68. $y = \operatorname{ctg} x^2 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 2x$.

13.69. $y = \frac{1-\cos(8x-3\pi)}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x}$.

13.70. $y=e^{-x^2/2}$. **13.71.** $y=2^{\sin 2x}$.

13.72. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$.

13.73. $y=\frac{\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg} x}+\frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x}$.

13.74. $y=\sqrt{1+\operatorname{tg}(x^2+x^{-2})}$.

13.75. $y=\frac{1+x^2\operatorname{arctg} x^2}{\sqrt{1+x^4}}$. **13.76.** $y=\ln\ln(x/2)$.

13.77. $y=\log_2^3(2x+3)^2$. **13.78.** $y=\ln|\sin x|$.

13.79. $y=\sin\ln|x|$. **13.80.** $y=\cos\frac{1}{\log_2 x}$.

13.81. $y=3^{\operatorname{arctg}(2x+\pi)}$. **13.82.** $y=\operatorname{arcctg} 2^x$.

13.83. $y=10^{x/\log_3 x}$. **13.84.** $y=\frac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{4x-5}{\sqrt{31}}$.

13.85. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}\,x}$.

13.86. $y=\sqrt{\operatorname{ch} x}$. **13.87.** $y=\operatorname{arctg}\operatorname{th} x$.

13.88. $y=\frac{1}{2}\operatorname{th} x+\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{1+\sqrt{2}\operatorname{th} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th} x}$.

13.89. $y=\sin\cos^2 x\cdot\cos\sin^2 x$.

13.90. $y=\operatorname{tg}^2 x/(\operatorname{tg} x^2)$. **13.91.** $y=\ln\operatorname{tg}(x/2)-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg} x$.

13.92. $y=\frac{x}{2}(\sin\ln x+\cos\ln x)$.

13.93. $y=\cos^n x\cdot\cos nx$.

13.94. $y=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)-\frac{1}{2(1+x^2)}$.

13.95. $y=\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})$.

13.96. $y=2x\ln(2x+\sqrt{4x^2+1})-\sqrt{4x^2+1}$.

13.97. $y=\sin(\arcsin x)$. **13.98.** $y=\cos(2\arccos x)$.

13.99. $y=\cos(3\arccos x)$.

13.100. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)$.

13.101. $y=\arccos\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

13.102. $y=\ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2-\frac{2x+5}{(x+2)(x+3)}$.

13.103. $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right)^2$.

13.104. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)^2-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$.

13.105. $y=2^{\sin x^2}$. **13.106.** $y=3^{\cos^2 x}$.

13.107. $y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$. **13.108.** $y=\operatorname{arctg}\operatorname{tg}^2 x$.

13.109. $y=\log_2\log_3\log_5 x$. **13.110.** $y=\ln\ln\ln x^2$.

13.111. $y=\sqrt{x^2+1}-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$.

13.112. $y=\frac{2}{7}\ln(\sqrt{x^7}+\sqrt{1+x^7})$.

13.113. $y=\operatorname{tg}^2 x+\ln\cos^2 x$. **13.114.** $y=\ln(\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x})$.

13.115. $y=e^{\sqrt{\ln(x^2+x+1)}}$. **13.116.** $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

13.117. $y=\frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}}-\operatorname{arctg}\sqrt{e^{2x}-1}$.

13.118. $y=\frac{\operatorname{ch} x^2}{\operatorname{sh}^2 x^2}-\ln\operatorname{cth}\frac{x^2}{2}$.

13.119. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sin x}{2}\right)$. **13.120.** $y=\arccos(\sin x^4-\cos x^4)$.

13.121. $y=\frac{1}{\sin^4 x+1}+\ln\frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+1}$.

13.122. $y=\ln\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\cos x}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos x}$.

13.123. $y=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}$.

13.124. $y=\frac{x}{2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{th}(x/2)}{\sqrt{3}}$.

13.125. $y=\operatorname{arctg} e^{x/2}-\ln\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}$.

13.126. $y=\arcsin\frac{\sin\alpha\cdot\sin x}{1-\cos\alpha\cdot\cos x}$.

13.127. $y=\frac{1}{\sin\alpha}\ln\frac{1+x}{1-x}-\operatorname{ctg}\alpha\cdot\ln\frac{1+x\cos\alpha}{1-x\cos\alpha}$.

13.128. $y=\ln\sqrt{x^2-2x\cos\alpha+1}+\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

13.129. $y=x^2\sqrt{a^2+x^4}+a^2\ln(x^2+\sqrt{a^2+x^4})$.

13.130. $y=\operatorname{th} x+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{1+\sqrt{2}\operatorname{th} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th} x}$.

13.131. $y=\ln\frac{x^2+a}{\sqrt{x^4+b^2}}+\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{b}$.

13.132. $y=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{|a|}$.

13.133. $y=x+\operatorname{ctg} x\cdot\ln(1+\sin x)-\ln\operatorname{tg}(x/2)$.

13.134. $y=x-\ln\sqrt{1+e^{2x}}+e^{-x}\operatorname{arcctg} e^x$.

13.135. $y=\ln\frac{1-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^4}}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{3}}$.

13.136. $y=\ln\sqrt{\frac{\sqrt{x^4+1}-\sqrt{2}\,x}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{2}\,x}}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{x^4+1}}$.

13.137. $y=\ln\frac{2x^2+4x+4}{2x^2+2x+1}+4\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg}(2x+1)$.

13.138. $y=\frac{5x+2}{x^2+x+1}+\ln\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}}+\frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

13.139. $y=\frac{3-\sin x}{2}\sqrt{\cos^2 x-2\sin x}+2\arcsin\frac{1+\sin x}{\sqrt{2}}$.

13.140. $y=e^x\arcsin\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}+\operatorname{arctg}\sqrt{e^x}-\sqrt{e^x}$.

13.141. $y=x^x$. **13.142.** $y=x^{7/\ln x}$.

13.143. $y=\log_x 7$. **13.144.** $y=\log_2 x\cdot\log_x e+\log_2 x\cdot\ln 2$.

13.145. $y=x^{2/\ln x}-2x^{\log_x e}e^{1+\ln x}+e^{1+2/\log_x e}$.

13.146. $y=x^{x^2}$. **13.147.** $y=x^{e^x}$.

13.148. $y=2^{x^x}$. **13.149.** $y=x^{x^x}$.

13.150. $y=|\sin x|^{\cos x}$. **13.151.** $y=(\arcsin\sin^2 x)^{\operatorname{arctg} x}$.

13.152. $y=(\operatorname{ch} x)^{e^x}$.

Вычислить в указанных точках производные для следующих функций (13.153—13.166):

13.153. $y=\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$, $x=0$, $x=1$.

13.154. $y=(1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$, $x=0$.

13.155. $y=2^{\operatorname{tg}(1/x)}$, $x=1/\pi$.

13.156. $y=3\cos 2x-\sqrt{1-\sin 2x}\,(\sin x+\cos x)$, $x=\pi/6$.

13.157. $y=\log_{1/2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\log_2\sqrt{4x^2-4x+1}$, $x=0$.

13.158. $y=\sqrt{\ln x}\,(\ln x-\log_{ex} x)\sqrt{\ln x+\log_x e+2}$, $x=e$.

13.159. $y=\ln(1+\sin^2 x)-2\sin x\cdot\operatorname{arctg}\sin x$, $x=\pi/2$.

13.160. $y=\arcsin(2x/(1+x^2))$, $x=0$, $x=2$.

13.161. $y=\arcsin((1-x^2)/(1+x^2))$, $x=-1$, $x=1$, $x=0$.

13.162. $y=\ln\frac{x^4-x^2+1}{x^4+2x^2+1}+2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1-2x^2}$, $x=1$.

13.163. $y=\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\sqrt[5]{\cos\ln^3 x}}$, $x=1$.

13.164. $y=(\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x}$, $x=0$.

13.165. $y=\left(\sqrt{1+3^x}\right)^{\ln x^2}$, $x=1$.

13.166. $y=((\sin x)/x)^x$, $x=\pi/2$.

13.167. Решить уравнение $y'(x)=0$, если:

1) $y=x^3-6x^2+9x+12$.

2) $y=\frac{x^2+x-6}{x^2-10x+25}$. 3) $y=\frac{1}{1+\sin^2 x}$.

4) $y=x(x-1)^2(x-2)^3$. 5) $y=e^{-|x-1|}/(1+x)$.

6) $y=\max(7x-6x^2, |x|^3)$.

13.168. Пусть $f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, — всюду дифференцируемая функция. Найти $y'(x)$, если:

1) $y=\sqrt{f(x)}$, $f(x)>0$. 2) $y=\ln|f(x)|$, $f(x)\neq 0$.

3) $y=f(x^3)$. 4) $y=f(\arcsin f(x))$, $|f(x)|<1$.

13.169. Пусть $f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, и $g(x)$, $x\in\mathbb{R}$, — всюду дифференцируемые функции. Найти $y'(x)$, если:

1) $y=\sqrt[n]{f^2(x)+g^2(x)}$, $f^2(x)+g^2(x)>0$.

2) $y=\ln\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$, $f(x)g(x)\neq 0$.

3) $y=f(\sin^2 x)+g(\cos^2 x)$. 4) $y=(f(x))^{g(x)}$, $f(x)>0$.

13.170. Пусть функции f_{ij} $(1\leqslant i,j\leqslant n)$ дифференцируемы в некоторой точке. Доказать, что в этой точке справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{i1} & f_{i2} & \dots & f_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}' = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f'_{i1} & f'_{i2} & \dots & f'_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}.$$

13.171. С помощью формулы, приведенной в предыдущей задаче, найти $\Delta'(x)$, если:

1) $\Delta(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & 2 \\ x & x & 1 \end{vmatrix}$. 2) $\Delta(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ 4 & x-5 & 6 \\ 7 & 8 & x-9 \end{vmatrix}$.

3) $\Delta(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 2 \\ x^3 & 3x^2 & 6x \end{vmatrix}$.

13.172. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

1) Если функция имеет производную в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

2) Если функция непрерывна в некоторой точке, то она имеет производную в этой точке.

13.173. При каких значениях α функция

$$y=\begin{cases} |x|^{\alpha}\sin(1/x), & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0, \end{cases}$$

в точке $x=0$: 1) непрерывна; 2) имеет производную; 3) имеет непрерывную производную?

13.174. При каких значениях α и β $(\beta>0)$ функция

$$y=\begin{cases} |x|^{\alpha}\sin(1/|x|^{\beta}), & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0, \end{cases}$$

в точке $x=0$: 1) непрерывна; 2) имеет производную; 3) имеет непрерывную производную?

13.175. Построить пример функции, имеющей производную всюду, за исключением точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

13.176. Определить значения α и β, при которых следующие функции а) всюду непрерывны, б) всюду дифференцируемы:

1) $y=\begin{cases} \alpha x+\beta, & \text{если } x\leqslant 1,\\ x^2, & \text{если } x>1. \end{cases}$ 2) $y=\begin{cases} \alpha+\beta x^2, & \text{если } |x|<1,\\ 1/|x|, & \text{если } |x|\geqslant 1. \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} \alpha x^3+\beta x, & |x|\leqslant 2,\\ \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{x}, & |x|>2. \end{cases}$

4) $y=\begin{cases} 2x-2, & \text{если } x\leqslant 1,\\ \alpha(x-1)(x-2)(x-\beta), & \text{если } 1<x<2,\\ \frac{x}{2}-1, & \text{если } x\geqslant 2. \end{cases}$

13.177. Определить значения α и β, при которых функции всюду дифференцируемы:

1) $y=\begin{cases} (x+\alpha)e^{-\beta x}, & \text{если } x<0,\\ \alpha x^2+\beta x+1, & \text{если } x\geqslant 0. \end{cases}$

2) $y=\begin{cases} \alpha x+\beta, & \text{если } x<0,\\ \alpha\cos x+\beta\sin x, & \text{если } x\geqslant 0. \end{cases}$

13.178. Определить значения α и β, при которых функция

$$y=\begin{cases} \operatorname{arctg}\alpha x, & \text{если } |x|\leqslant 1,\\ \beta\,\operatorname{sign}x+\frac{x-1}{2}, & \text{если } |x|>1, \end{cases}$$

имеет производную: 1) в точке $x=1$, 2) в точке $x=-1$.

13.179. Исследовать на дифференцируемость следующие функции:

1) $y=|x^3(x+1)^2(x+2)|$. 2) $y=|\sin x|$.

3) $y=x|x|$. 4) $y=|\pi-x|\sin x$.

5) $y=\arccos(\cos x)$. 6) $y=\begin{cases} x^3, & \text{если } x\leqslant 0,\\ e^{-1/x}, & \text{если } x>0. \end{cases}$

7) $y=\begin{cases} x^2|\cos(\pi/x)|, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0. \end{cases}$

8) $y=\begin{cases} x, & \text{если } x \text{ — рациональное число},\\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число}. \end{cases}$

13.180. Вычислить значения производной для функции во всех точках, где производная существует:

1) $y=\begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ — рациональное число},\\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число}. \end{cases}$

2) $y=\begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ — рациональное число},\\ 2|x|-1, & \text{если } x \text{ — иррациональное число}. \end{cases}$

13.181. Верно ли утверждение: если функция имеет производную в точке, то она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки?

13.182. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

1) Если функция f имеет, а функция g не имеет производной в некоторой точке, то функция $f+g$ не имеет производной в этой точке.

2) Если функции f и g не имеют производной в некоторой точке, то и функция $f+g$ не имеет производной в этой точке.

3) Если функция f имеет, а функция g не имеет производной в некоторой точке, то и функция fg не имеет производной в этой точке.

4) Если функции f и g не имеют производной в некоторой точке, то и функция fg не имеет производной в этой точке.

13.183. Привести пример функции $f(x)$, для которой $f'(x_0)$ и $(f^2(x_0))'$ не существуют, а $(f^3(x_0))'$ существует.

13.184. Привести пример функции, не имеющей производной ни в одной точке $x\in\mathbb{R}$, квадрат которой имеет производную в каждой точке $x\in\mathbb{R}$.

13.185. Привести пример сложной функции $f(g(x))$, имеющей производную в точке x_0 и такой, что:

1) $f'(g(x_0))$ существует, $g'(x_0)$ не существует.

2) $f'(g(x_0))$ не существует, $g'(x_0)$ существует.

3) $f'(g(x_0))$ и $g'(x_0)$ не существуют.

13.186. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

1) Если для дифференцируемых на интервале $(a;b)$ функций f и g верно неравенство $f<g$, то $f'\leqslant g'$ на $(a;b)$.

2) Если на интервале $(a;b)$ верно неравенство $f'<g'$, то $f\leqslant g$ на $(a;b)$.

3) Если $f(a)=g(a)$ и $f'(x)<g'(x)$ на интервале $(a;b)$, то $f(x)<g(x)$ на $(a;b)$.

13.187. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

1) Для того чтобы дифференцируемая функция $y(x)$, $x\in(a;b)$, имела монотонную на интервале $(a;b)$ производную, необходимо, чтобы $y(x)$ была монотонна на $(a;b)$.

2) Для того чтобы дифференцируемая функция $y(x)$, $x\in(a;b)$, имела монотонную на интервале $(a;b)$ производную, достаточно, чтобы $y(x)$ была монотонна на интервале $(a;b)$.

3) Для того чтобы дифференцируемая функция имела периодическую производную, необходимо, чтобы функция была периодической.

4) Для того чтобы дифференцируемая функция имела периодическую производную, достаточно, чтобы функция была периодической.

13.188. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

1) Для того чтобы производная дифференцируемой функции была четной функцией, достаточно, чтобы функция была нечетной.

2) Для того чтобы производная дифференцируемой функции была четной функцией, необходимо, чтобы функция была нечетной.

3) Для того чтобы производная дифференцируемой функции была нечетной функцией, необходимо, чтобы функция была четной.

4) Для того чтобы производная дифференцируемой функции была нечетной функцией, достаточно, чтобы функция была четной.

13.189. Верно ли утверждение: если функция f имеет производную в точке x_0, то последовательность

$$\left\{n\left(f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right)\right\}$$

сходится? Верно ли обратное утверждение?

13.190. Верны ли следующие утверждения:

1) Если функция $y(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} y'(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a+0} y(x)=\infty$.

2) Если функция $y(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} y(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a+0} y'(x)=\infty$.

3) Если функция $y(x)$ дифференцируема на интервале $(a;+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$ существует, то существует и $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x)$.

4) Если функция $y(x)$ дифференцируема на интервале $(a;+\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x)$, то существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$?

4. Понятия бесконечной и односторонней производных. Если

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=+\infty, \tag{30}$$

то говорят, что функция f в точке x_0 имеет *бесконечную положительную производную*. Аналогично, функция f в точке x_0 имеет *бесконечную отрицательную производную*, если

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\infty. \tag{31}$$

Односторонние пределы

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ \text{и}\ \lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{32}$$

называют соответственно *правой* и *левой производными* функции f в точке x_0 и обозначают $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$.

Для существования производной функции f в точке необходимо и достаточно существование в этой точке правой и левой производных и их равенство.

Функция f называется *дифференцируемой* на отрезке $[a;\beta]$, если она дифференцируема на интервале $(a;b)$ и существуют конечные односторонние производные $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$.

Пример 10. Доказать, что функции

$$1)\ f(x)=\sqrt[3]{x},\quad 2)\ g(x)=\begin{cases}1/x, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0,\end{cases}$$

в точке $x=0$ имеют бесконечную положительную производную.

$\triangle$ 1) $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}=+\infty.$

2) $g'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1/\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta x^2}=+\infty.$ ▲

Пример 11. Найти $f'_+(0)$ и $f'_-(0)$, если

$$1)\ f(x)=|\sin 2x|,\quad 2)\ f(x)=\begin{cases}e^{1/x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0.\end{cases}$$

$\triangle$ 1) $f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{|\sin 2\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\sin 2\Delta x}{\Delta x}=2,$

$f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{|\sin 2\Delta x|}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\sin 2\Delta x}{\Delta x}=-2.$

2) $f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{e^{1/\Delta x}}{\Delta x}=+\infty,\ f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{e^{1/\Delta x}}{\Delta x}=0.$ ▲

13.191. Найти правую и левую производные в указанных точках для следующих функций:

1) $f(x) = |x|$, $x = 0$.

2) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$, $x = 2$, $x = 3$.

3) $f(x) = |2^x - 2|$, $x = 1$.

4) $f(x) = \sqrt[3]{\sin \pi x}$, $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

5) $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$, $x = 0$, $x = \sqrt{\pi}$.

6) $f(x) = \sin x |\cos x| + \cos x |\sin x|$, $x = \pi k/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

7) $f(x) = x |\cos(\pi/x)|$, $x = 2/(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

8) $f(x) = \arccos(1/x)$, $x = -1$, $x = 1$.

9) $f(x) = \arcsin \sin x$, $x = (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

13.192. Найти $f'_-(0)$ и $f'_+(0)$ для следующих функций:

1) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \leqslant 0, \\ \sqrt[3]{x^4} \ln x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x < 0, \\ \ln(1 + \sqrt[5]{x^7}), & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} 1 + e^{1/x}, & \text{если } x < 0, \\ \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^4}}, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$

13.193. Найти правую и левую производные в точках разрыва следующих функций:

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}(1 - x^2), & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

2) $f(x) = (1 - x^2) \operatorname{sign} x$.

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1+x}{1-x}, & \text{если } x \neq 1, \\ \pi/2, & \text{если } x = 1. \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(1/|x|), & \text{если } x \neq 0, \\ \pi/2, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ -\pi/2, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

13.194. Найти $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ для функции $f(x) = |x - x_0| \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — заданная функция, непрерывная в точке x_0.

13.195. Привести пример функции, имеющей в точке разрыва бесконечную отрицательную производную.

13.196. Привести пример функции, непрерывной в некоторой точке и не имеющей в этой точке ни левой, ни правой производной.

---

5. Производная обратной функции. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0, и пусть в этой точке существует производная $\dfrac{df(x_0)}{dx} \neq 0$; тогда обратная функция в точке $y_0 = f(x_0)$ имеет производную, которая может быть найдена по формуле

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}. \tag{33}$$

Пример 12. Найти производную функции, обратной к функции

$$y = x + x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

△ Данная функция всюду непрерывна и строго монотонна, ее производная $\dfrac{dy}{dx} = 1 + 3x^2$ не обращается в нуль ни в одной точке, поэтому

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + 3x^2}. \ ▲$$

Пример 13. Найти $y'(x)$, если $x = \operatorname{sh} y$.

△ Функция $x = \operatorname{sh} y$ непрерывна и строго монотонна при всех $y \in \mathbb{R}$. Производная $x' = \operatorname{ch} y$ не обращается в нуль ни в одной точке. Следовательно,

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Функция $y(x)$, т. е. функция, обратная для гиперболического синуса, обозначается $\operatorname{arsh} x$. Таким образом,

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}. \ ▲$$

13.197. Найти производные обратных функций в указанных точках:

1) $y = x + \frac{1}{5}x^5$, $y = 0$, $y = \frac{6}{5}$. 2) $y = 2x - \frac{\cos x}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$.

3) $y = 0{,}1x + e^{0{,}1x}$, $y = 1$. 4) $y = 2x^2 - x^4$, $x > 1$, $y = 0$.

5) $y = 2x^2 - x^4$, $0 < x < 1$, $y = 3/4$.

13.198. Найти производные обратных функций. Указать область их существования:

1) $y=x+\ln x,\ x>0$. 2) $y=x+e^x$.

3) $y=\frac{x^2}{1+x^2},\ x<0$. 4) $y=\operatorname{ch} x,\ x>0$.

13.199. Найти производную функции, обратной для гиперболического тангенса.

13.200. Дана функция $y=x+\sin x,\ x\in\mathbb{R}$. В каких точках обратная функция имеет бесконечную положительную производную?

---

6. Производная функции, заданной параметрически. Пусть функции $x=x(t)$ и $y=y(t)$ определены в некоторой окрестности точки t_0 и параметрически задают в окрестности точки $x_0=x(t_0)$ функцию $y=f(x)$. Тогда, если $x(t)$ и $y(t)$ имеют в точке t_0 производные и если $\frac{dx(t_0)}{dt}\neq 0$, то функция $y=f(x)$ в точке x_0 также имеет производную, которая может быть найдена по формуле

$$\frac{df(x_0)}{dx}=\frac{\frac{dy(t_0)}{dt}}{\frac{dx(t_0)}{dt}}.$$

Эту формулу обычно записывают короче:

$$y'_x(x_0)=\frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}. \tag{34}$$

Пример 14. Функция $y=f(x)$ задана параметрически формулами

$$x=a\cos^3 t,\quad y=b\sin^3 t,\quad t\in(0;\pi/2).$$

Найти y'_x.

△ Функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы при всех t, и $x'_t=-3a\cos^2 t\sin t\neq 0$ на интервале $(0;\pi/2)$. По формуле (34) находим

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3b\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\frac{b}{a}\operatorname{tg} t,\ t\in(0;\ \pi/2). \ ▲$$

Пример 15. Функция $y=f(x)$ задана уравнением

$$r=a(1+\cos\varphi),\quad \varphi\in(0;2\pi/3),$$

где r и φ — полярные координаты точки $(x;y)$. Найти y'_x.

△ Перейдем к параметрическому заданию функции

$$x=r\cos\varphi=a(1+\cos\varphi)\cos\varphi,$$
$$y=r\sin\varphi=a(1+\cos\varphi)\sin\varphi$$

и воспользуемся формулой (34):

$$y'_x=\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}=-\frac{a(1+\cos\varphi)\cos\varphi-a\sin^2\varphi}{a(1+\cos\varphi)\sin\varphi+a\cos\varphi\sin\varphi}=$$
$$=-\frac{\cos\varphi+\cos 2\varphi}{\sin\varphi+\sin 2\varphi}=-\frac{\cos(3\varphi/2)\cos(\varphi/2)}{\sin(3\varphi/2)\cos(\varphi/2)}=$$
$$=-\operatorname{ctg}(3\varphi/2),\quad \varphi\in(0;\ 2\pi/3). \ ▲$$

13.201. Найти y'_x для функций $y=y(x)$, заданных параметрически:

1) $x=\sin^2 t,\quad y=\cos^2 t,\quad 0<t<\pi/2$.
2) $x=e^{-t},\quad y=t^3,\quad -\infty<t<+\infty$.
3) $x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad 0<t<\pi$.
4) $x=a\operatorname{ch} t,\quad y=b\operatorname{sh} t,\quad -\infty<t<0$.
5) $x=t^2+6t+5,\quad y=\frac{t^3-54}{t},\quad 0<t<+\infty$.
6) $x=(t-1)^2(t-2),\quad y=(t-1)^2(t-3),\quad 5/3<t<+\infty$.
7) $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad -\infty<t<+\infty$.
8) $x=\ln\sin(t/2),\quad y=\ln\sin t,\quad 0<t<\pi$.

13.202. Найти x'_y для функций $x=x(y)$, заданных параметрически:

1) $x=t+2t^2+t^3,\quad y=-2+3t-t^3,\quad 1<t<+\infty$.
2) $x=(t^3-2t^2+3t-4)e^t,\quad y=(t^3-2t^2+4t-4)e^t,$
$1<t<+\infty$.
3) $x=\operatorname{ctg} 2t,\quad y=\frac{2\cos 2t-1}{2\cos t},\quad 0<t<\frac{\pi}{2}$.

13.203. Для функции $y=y(x)$, заданной параметрически: $x=2t+|t|,\ y=5t^2+4t|t|,\ -\infty<t<\infty$, вычислить производную в точке $x=0$. Можно ли использовать при этом формулу (34)?

13.204. Найти y'_x для функции $y=y(x)$, заданной параметрически:

$$x=\begin{cases} t, & \text{если } t \text{ — рациональное число,}\\ -t, & \text{если } t \text{ — иррациональное число,}\end{cases}\quad y=t^2.$$

13.205. Вычислить $y'(x_0)$ для функций $y=y(x)$, заданных уравнением $r=r(\varphi)$, где r и φ — полярные координаты точки $(x;y)$:

1) $r=a\varphi,\quad 4\pi/3<\varphi<2\pi,\quad x_0=0.$

2) $r=e^{\varphi},\quad -\pi/6<\varphi<\pi/6,\quad x_0=1.$

3) $r=a\sqrt{\cos 2\varphi},\quad 0<\varphi<\pi/4,\quad x_0=a\sqrt{6}/4.$

13.206. Для функции $y=y(x)$, заданной уравнением $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/4$, вычислить $y'_+(0)$ и $y'_-(a)$.

7. Производная функции, заданной неявно. Если дифференцируемая на некотором интервале функция $y=y(x)$ задана неявно уравнением $F(x;y)=0$, то ее производную $y'(x)$ можно найти из уравнения

$$\frac{d}{dx}F(x;\ y)=0. \tag{35}$$

Пример 16. Пусть $y=y(x)$, $x\in(-a;a)$, — положительная функция, заданная неявно уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Найти $y'(x)$.

△ Уравнение (35) в данном случае имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0.$$

Дифференцируя, получим

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot y'=0.$$

Из этого уравнения находим

$$y'(x)=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y},\quad x\in(-a;\ a),\quad y>0. \ ▲$$

13.207. Найти y' для дифференцируемых функций $y=y(x)$, заданных неявно следующими уравнениями:

1) $y^5+y^3+y-x=0.$ 2) $y-x=\varepsilon\sin y,\quad |\varepsilon|<1.$

3) $y^2=2px,\quad y>0.$ 4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad y>0.$

5) $(2a-x)y^2=x^3,\quad y<0.$ 6) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2.$

7) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3},\quad y>0.$

8) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0,\quad y<-1.$

9) $x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0,\quad x<2y-1.$

13.208. Для дифференцируемых функций $y=y(x)$, заданных неявно, вычислить $y'(x_0)$:

1) $x^2+y^2-6x+10y-2=0,\quad y>-5,\quad x_0=0.$

2) $6xy+8y^2-12x-26y+11=0,\quad y<2,\quad x_0=11/12.$

3) $e^y+xy=e,\quad y>0,\quad x_0=0.$

4) $xy+\ln y=1,\quad y<e^2,\quad x_0=0.$

8. Дифференциал функции. Если приращение Δy функции $y=f(x)$ в точке x_0 представимо в виде

$$\Delta y|_{x=x_0}=A(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{36}$$

где $A(x_0)$ не зависит от Δx и $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, то функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, а произведение $A(x_0)\Delta x$ называется ее *дифференциалом* в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$ или $dy|_{x=x_0}$.

Таким образом, если равенство (36) верно, то

$$dy|_{x=x_0}=A(x_0)\Delta x. \tag{37}$$

Дифференциалом dx независимой переменной x называется ее приращение Δx, т. е. по определению полагают $dx=\Delta x$.

Для дифференцируемости функции в точке (т. е. для существования дифференциала) необходимо и достаточно, чтобы функция имела в этой точке конечную производную.

Дифференциал функции $y=f(x)$ в точке x_0 выражается через производную $f'(x_0)$ следующим образом:

$$df(x_0)=f'(x_0)\,dx. \tag{38}$$

Эта формула позволяет вычислять дифференциалы функций, если известны их производные.

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала $(a;b)$, то

$$dy=f'(x)\,dx \tag{39}$$

для всех $x\in(a;b)$.

Равенство (36) может быть записано в виде

$$y(x_0+\Delta x)=y(x_0)+dy(x_0)+\alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Если $dy(x_0)\neq 0$, то для приближенного вычисления значения функции в точке $x_0+\Delta x$ можно пользоваться формулой

$$y(x_0+\Delta x)\approx y(x_0)+dy(x_0), \tag{40}$$

так как абсолютная и относительная погрешности при таком приближении как угодно малы при достаточно малом Δx.

Пример 17. Найти дифференциал функции $y=x-3x^2$ в точке $x=2$.

△ 1-й способ. Найдем приращение функции в точке $x=2$:

$$\Delta y|_{x=2}=y(2+\Delta x)-y(2)=$$
$$=2+\Delta x-3(2+\Delta x)^2-2+12=-11\Delta x-3\Delta x^2.$$

Приращение функции представлено в виде (36); в данном случае оказалось, что $A=-11$ и $\alpha(\Delta x)=-3\Delta x\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Следовательно,

$$dy|_{x=2}=-11dx.$$

2-й способ. Вычислим производную функции в точке $x=2$:

$$y'(x)=1-6x,\quad y'(2)=-11.$$

По формуле (38) находим

$$dy(2)=y'(2)\,dx=-11dx. \ \blacktriangle$$

Пример 18. Найти дифференциал функции $y=\operatorname{ctg} 3x$.

△ По формуле (39) находим

$$dy=y'(x)\,dx=-\frac{3}{\sin^2 3x}\,dx,\quad x\neq\frac{\pi k}{3},\quad k\in\mathbb{Z}. \ \blacktriangle$$

Пример 19. Найти приближенное значение функции $y=\sqrt{x}$ в точке $x=3{,}98$.

△ Положив в формуле (40) $y=\sqrt{x}$, $x_0=4$, $\Delta x=-0{,}02$, получим

$$\sqrt{3{,}98}\approx\sqrt{4}+\frac{1}{2\sqrt{4}}(-0{,}02),\quad \sqrt{3{,}98}\approx 1{,}995. \ \blacktriangle$$

9. Свойства дифференциала.

1°. Для любых дифференцируемых функций u и v справедливы равенства

$$d(\alpha u+\beta v)=\alpha\,du+\beta\,dv, \tag{41}$$

где α и β — произвольные постоянные,

$$d(uv)=u\,dv+v\,du, \tag{42}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2},\quad v\neq 0. \tag{43}$$

2°. Формула для дифференциала $dy=f'(x)\,dx$ справедлива и в том случае, когда x является не независимой переменной, а функцией. Это свойство называют *свойством инвариантности формы дифференциала.*

Пример 20. Вычислить дифференциал функции

$$y=x\sqrt{64-x^2}+64\arcsin(x/8).$$

△ Используя свойства дифференциала, получаем

$$dy=d\left(x\sqrt{64-x^2}\right)+d64\arcsin(x/8)=$$
$$=xd\sqrt{64-x^2}+\sqrt{64-x^2}\,dx+64d\arcsin(x/8)=$$
$$=x\frac{d(64-x^2)}{2\sqrt{64-x^2}}+\sqrt{64-x^2}\,dx+64\frac{d(x/8)}{\sqrt{1-\frac{x^2}{64}}}=$$
$$=\frac{-x^2\,dx}{\sqrt{64-x^2}}+\sqrt{64-x^2}\,dx+64\frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}=$$
$$=2\sqrt{64-x^2}\,dx,\quad |x|<8. \ \blacktriangle$$

Пример 21. Пусть u и v — дифференцируемые функции и их дифференциалы du и dv известны. Найти dy, если

$$y=\operatorname{arctg}(u/v)+\ln\sqrt{u^2+v^2}.$$

$$\triangle\ dy=d\operatorname{arctg}(u/v)+\frac{1}{2}d\ln(u^2+v^2)=$$
$$=\frac{d(u/v)}{1+\frac{u^2}{v^2}}+\frac{1}{2}\frac{d(u^2+v^2)}{u^2+v^2}=\frac{v\,du-u\,dv}{u^2+v^2}+\frac{u\,du+v\,dv}{u^2+v^2}=$$
$$=\frac{(v+u)\,du+(v-u)\,dv}{u^2+v^2},\quad u^2+v^2>0. \ \blacktriangle$$

13.209. Найти $A(x_0)$ и $\alpha(\Delta x)$ в формуле (36), если:

1) $y=x^3-2x$, $x_0=1$. 2) $y=x^{10}$, $x_0=0$.

13.210. Найти разность между приращением и дифференциалом функции $y=(x-1)^3$.

13.211. При каких значениях x дифференциал функции $y=\cos x$ не эквивалентен при $\Delta x\to 0$ ее приращению?

13.212. Какой порядок при $\Delta x\to 0$ имеет бесконечно малая $\Delta y-dy$, если $y=x^3-3x$?

13.213. Найти дифференциалы:

1) $d(e^{-x}+\ln x)$. 2) $d\left(\sqrt{x}+2\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$.

3) $d\left(2\sqrt{x^3}(3\ln x-2)\right)$. 4) $d(\arccos e^x)$.

5) $d\ln\left(\sqrt{1+2\sin x}+\sqrt{2\sin x-1}\right)$.

6) $d(5\operatorname{sh}^7(x/35)+7\operatorname{sh}^5(x/35))$. 7) $d\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$.

8) $d\left(\ln\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\sin x}\right)$. 9) $d(x^{x^2})$.

13.214. Найти дифференциалы в указанных точках:

1) $d\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{x-1}{x}\right)$, $x=-1$.

2) $d\operatorname{arctg}\frac{\ln x}{x}$, $x_1=1/e$, $x_2=e$.

3) $d\left(\frac{(2x-1)^3\sqrt{2+3x}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}\right)$, $x=0$.

4) $d\left(\frac{x^2 2^x}{x^x}\right)$, $x_1=1$, $x_2=2$.

13.215. В указанных точках найти дифференциалы функций $y=y(x)$, заданных неявными или параметрическими уравнениями:

1) $y^3-y=6x^2$, $(1;2)$.

2) $x^4 + y^4 - 8x^2 - 10y^2 + 16 = 0$, $(1; 3)$.

3) $y^5 + x^4 = xy^2$, $(x_0;\ y_0)$. 4) $x + y \ln y = 0$, $(x_0;\ y_0)$.

5) $xy - \sqrt[3]{xy^2 + 6} = 0$, $(2;\ 1)$. 6) $xe^{\left(\frac{x}{y^2} - 1\right)} - 2y = 0$, $(4;\ 2)$.

7) $3^{\sin yx^2} - 3x(y - \pi) - 1 = 0$, $(1;\ \pi)$.

8) $4xy^3 + \ln \sqrt[3]{x/(x + y)} = 0$, $(1;\ 0)$.

9) $x = (t-1)^2(t-2)$, $y = (t-1)^2(t-3)$, $(4;\ 0)$.

10) $x = e^t/t$, $y = (t-1)^2 e^t$, $\left(-2/\sqrt{e};\ 9/(4\sqrt{e})\right)$.

13.216. В точке $(0; a)$ найти дифференциал функции $y = y(x)$, заданной в полярной системе координат уравнением $r = a(1 + \cos\varphi)$, $0 < \varphi < \pi$.

13.217. Найти дифференциал функции y, считая известными дифференциалы функций u и v:

1) $y = u^2 v$. 2) $y = u^2/v$.

3) $y = uv/(u^2 + v^2)$. 4) $y = e^{uv}$. 5) $y = \sqrt{u^2 + v^2}$.

6) $y = \ln \operatorname{tg}(v/u)$. 7) $y = u^v$.

13.218. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение функции $y = y(x)$ в указанных точках:

1) $y = \sqrt[3]{x}$, а) $x = 65$, б) $x = 125{,}1324$.

2) $y = \sqrt[4]{x}$, а) $x = 90$, б) $x = 15{,}8$.

3) $y = \sin x$, а) $x = 29°$, б) $x = 359°$.

4) $y = \operatorname{tg} x$, $x = 44°50'$. 5) $y = \arcsin x$, $x = 0{,}51$.

6) $y = \operatorname{arctg} x$, $x = 1{,}05$. 7) $y = \ln \operatorname{tg} x$, $x = 47°\,15'$.

8) $y = \sqrt{\dfrac{2 - x}{2 + x}}$, $x = 0{,}15$.

13.219. Доказать, что для всех малых, по сравнению с x_0, значений Δx верна приближенная формула

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\,\Delta x, \qquad x_0 > 0. \tag{44}$$

С помощью этой формулы приближенно вычислить:

1) $\sqrt{640}$; 2) $\sqrt[3]{200}$; 3) $\sqrt[5]{243{,}45}$; 4) $\sqrt[10]{1000}$.

13.220. Определить, насколько приблизительно увеличится объем шара, если его радиус $R = 15$ см увеличить на 0,2 см.

13.221. Определить приблизительно относительную погрешность при вычислении поверхности сферы, если при определении ее радиуса относительная погрешность составила 1%.

13.222. Насколько приблизительно изменится (в процентах) сила тока в проводнике, если его сопротивление увеличится на 1%?

13.223. Насколько приблизительно следует изменить длину маятника $l = 20$ см, чтобы период колебаний маятника увеличился на 0,05 с? Период T определяется формулой $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

§ 14. Геометрический и физический смысл производной

1. Геометрический смысл производной. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то угловой коэффициент касательной TT' (рис. 76) к графику функции в точке $M(x_0; f(x_0))$ равен $f'(x_0)$. Следовательно, уравнение касательной в точке $M(x_0; f(x_0))$ имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{1}$$

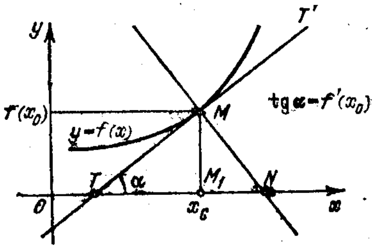


Рис. 76.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty,$$

то касательная к графику функции в точке $M(x_0; f(x_0))$ имеет уравнение $x = x_0$. В этом случае график функции $y = f(x)$

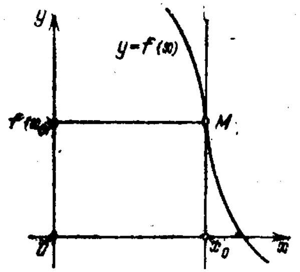


Рис. 77.

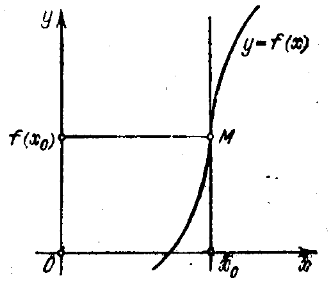


Рис. 78.

в окрестности точки x_0 имеет вид, схематически изображенный на рис. 77—80.

Прямая, проходящая через точку $M(x_0; f(x_0))$ перпендикулярно касательной, называется *нормалью* (прямая MN на рис. 76).

Если $f'(x_0) \neq 0$, то уравнение нормали записывается в виде

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{2}$$

Если $f'(x_0) = 0$, то нормаль имеет уравнение $x = x_0$.

Пусть к графику функции $y=f(x)$ в точке M проведены касательная и нормаль (рис. 76), которые пересекают ось абсцисс соответственно в точках T и N. В прямоугольном треугольнике TMN катет TM называют *отрезком касательной*, катет NM — *отрезком нормали*. Отрезок TM_1, где M_1 — проекция

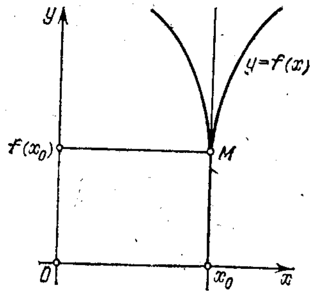


Рис. 79.

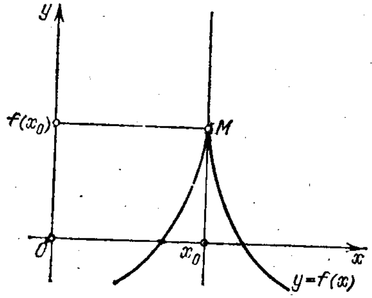


Рис. 80.

точки M на ось абсцисс, называют *подкасательной*, отрезок NM_1 — *поднормалью*. Длины этих четырех отрезков выражаются через значения функции и ее производной в точке x_0 следующим образом:

$$|TM|=\left|\frac{f}{f'}\right|\sqrt{1+(f')^2},\quad |NM|=|f|\sqrt{1+(f')^2}, \tag{3}$$

$$|TM_1|=\left|\frac{f}{f'}\right|,\quad |NM_1|=|ff'|. \tag{4}$$

Пусть графики функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ пересекаются в точке M (рис. 81). За угол φ между графиками этих функций принимается величина угла, образованного касательными, проведенными к графикам в точке M. Угол φ находится с помощью формулы

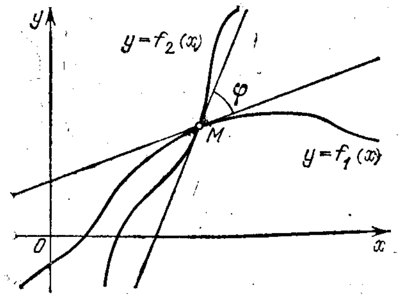


Рис. 81.

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{f_1'-f_2'}{1+f_1'f_2'}\right|,\qquad 0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Если $1+f_1'f_2'=0$, то $\varphi=\pi/2$.

Если функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 правую производную $f'_+(x_0)$, то уравнение правой касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0;\ f(x_0))$ имеет вид

$$y-f(x_0)=f'_+(x_0)(x-x_0). \tag{6}$$

Аналогично записывается уравнение левой касательной:

$$y-f(x_0)=f'_-(x_0)(x-x_0). \tag{7}$$

Пример 1. Под какими углами синусоида $y=\sin x$ пересекает ось абсцисс?

△ Синусоида $y=\sin x$ пересекает ось абсцисс в точках $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Если $x=2\pi k$, то $y'(2\pi k)=\cos 2\pi k=1$, т. е. угловой коэффициент касательной к синусоиде равен единице. Следовательно, в точках $x=2\pi k$ синусоида пересекает ось абсцисс под углом 45°. Если $x=(2k+1)\pi$, то $y'((2k+1)\pi)=-1$. Поэтому в точках $x=(2k+1)\pi$ синусоида пересекает ось абсцисс под углом 135°. ▲

Пример 2. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y=2x/(1+x^2)$ в точке с абсциссой $x=\sqrt{2}$.

△ Находим производную функции

$$y'(x)=2\frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2}=2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Вычисляем значения функции и ее производной в точке $x=\sqrt{2}$:

$$y(\sqrt{2})=2\sqrt{2}/3,\quad y'(\sqrt{2})=-2/9.$$

Записываем уравнение касательной

$$y-\frac{2\sqrt{2}}{3}=-\frac{2}{9}(x-\sqrt{2})$$

и уравнение нормали

$$y-\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{9}{2}(x-\sqrt{2}).$$

Упрощая уравнения, получаем

$$y=-\frac{2}{9}x+\frac{8\sqrt{2}}{9}\ \text{(уравнение касательной)},$$

$$y=\frac{9}{2}x-\frac{23\sqrt{2}}{6}\ \text{(уравнение нормали)}.\ ▲$$

Пример 3. Вычислить длину отрезка нормали к цепной линии $y=a\operatorname{ch}(x/a)$ в каждой ее точке.

△ Подставив значения данной функции и ее производной $y'=\operatorname{sh}(x/a)$ в формулу для длины отрезка нормали, получим

$$|NM|=|y|\sqrt{1+(y')^2}=a\operatorname{ch}(x/a)\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(x/a)}=a\operatorname{ch}^2(x/a).\ ▲$$

Пример 4. В точках пересечения эллипсов

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1,\quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

найти угол между ними.

△ Эллипсы расположены симметрично относительно координатных осей. Рассмотрим поэтому только первый квадрант где

$$C_{-1/2}^{k}(-1)^k=(-1)^k\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!}=\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}.$$

Следовательно,

$$g(t)=\frac{3}{2}t+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3(2k-1)!!}{2^{3k+1}k!}t^{2k+1}+o(t^{2n}).$$

Заменяя t на $x+1$, получаем

$$f(x)=\frac{3}{2}(x+1)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3(2k-1)!!}{2^{3k+1}k!}(x+1)^{2k+1}+o\left((x+1)^{2n}\right). \ \blacktriangle$$

Пример 13. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x=2$ до $o((x-2)^n)$ функцию $f(x)=\ln(2x-x^2+3)$.

$\triangle$ Так как $2x-x^2+3=(3-x)(x+1)$, то, полагая $x-2=t$, получаем

$$2x-x^2+3=(1-t)(3+t)=3(1-t)\left(1+\frac{t}{3}\right).$$

Отсюда следует, что

$$f(x)=g(t)=\ln 3+\ln(1-t)+\ln\left(1+\frac{t}{3}\right).$$

Разложив функцию $g(t)$ по формуле Маклорена до $o(t^n)$, получаем

$$g(t)=\ln 3-\sum_{k=1}^{n}\frac{t^k}{k}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{t^k}{k3^k}+o(t^n).$$

Следовательно,

$$f(x)=\ln 3+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{3^k}-1\right)\frac{(x-2)^k}{k}+o((x-2)^n). \ \blacktriangle$$

Если функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то для любой точки x из этой окрестности найдется точка ξ, лежащая между x и x_0 ($x<\xi<x_0$ или $x_0<\xi<x$) и такая, что

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (34)$$

Формула (34) называется *формулой Тейлора с остаточным членом*

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (35)$$

в форме Лагранжа.

Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$ функции (18.1—18.4):

18.1. 1) e^{5x-1}. 2) $\sin(2x+3)$. 3) $\cos\left(\frac{x}{2}+2\right)$.

4) $\frac{1}{1-2x}$. 5) $\frac{1}{3x+4}$. 6) $\frac{1}{\sqrt{1+4x}}$. 7) $\ln(ex+2)$.

8) 3^{2-x}. 9) $\frac{1}{(1-x)^2}$.

18.2. 1) $(x-1)e^{x/2}$. 2) $(x^2-x)e^{-x}$. 3) $\frac{x^2+3e^x}{e^{2x}}$.

4) $(2x+1)\sqrt{1-x}$. 5) $(2x-3)\ln(5x+6)$.

6) $\ln\frac{1+2x}{1-x}$. 7) $\ln\frac{2-3x}{3+2x}$.

8) $\ln(x^2+3x+2)$. 9) $\ln(2+x-x^2)$.

18.3. 1) $(1+x^2)\ln\sqrt{1+x}$. 2) $(x-1)(x+\ln(1+x))$.

3) $(1-x)\ln(1+x)-(1+x)\ln(1-x)$.

4) $x\sqrt[3]{4-4x+x^2}$. 5) $\frac{x}{\sqrt[3]{9-6x+x^2}}$. 6) $\ln\frac{x+4}{x^2-5x+6}$.

7) $\ln(6+11x+6x^2+x^3)$. 8) $\ln\left(\frac{2x^2-5x+2}{2}\right)^{1/x}$.

18.4. 1) $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$. 2) $\frac{2x-3}{x+1}$. 3) $\frac{x^2+1}{2x-3}$.

4) $\frac{x^3}{x-1}$. 5) $\frac{2x+5}{x^2+5x+4}$. 6) $\frac{3x-1}{x^2+x-6}$.

7) $\frac{x^2+4x-1}{x^2+2x-3}$. 8) $\frac{1-2x^2}{2+x-x^2}$. 9) $\frac{3x^2+5x-5}{x^2+x-2}$.

Разложить по формуле Маклорена до $o(x^{2n})$ функции (18.5—18.6):

18.5. 1) $\operatorname{sh}(x/2)$. 2) $x\operatorname{ch}3x$. 3) $x\sin^2 2x$. 4) $x\operatorname{ch}^2 x$.

5) $\sin x\cos 2x$. 6) $\sin^3 x$. 7) $\operatorname{sh}x\operatorname{ch}2x$. 8) $\sin^3 x\cos x$.

18.6. 1) $\frac{x^4+1}{x^2+1}$. 2) $\frac{x^2}{3x^2-4}$. 3) $\frac{1}{3x^4+10x^2+3}$.

4) $\frac{x^2+2}{x^3+x^2+x+1}$. 5) $\frac{x}{3}\ln\frac{x^2-1}{x^2-e}$.

6) $(1+2x)e^{-2x}-(1-2x)e^{2x}$. 7) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Разложить по формуле Маклорена до $o(x^{2n+1})$ функции (18.7—18.9):

18.7. 1) $\cos 3x$. 2) $x^2\cos^2 x$. 3) $\cos 3x\cos 5x$.

4) $\sin x\sin 3x$. 5) $\operatorname{ch}x\operatorname{ch}3x$. 6) $\operatorname{sh}x\operatorname{sh}5x$.

18.8. 1) $\operatorname{sh}^2 x$. 2) $\cos^4 x$. 3) $\sin^2 x\cos^4 x$.

4) $\cos^4 x+\sin^4 x$. 5) $\cos^6 x+\sin^6 x$. 6) $\sin^8 x+\cos^8 x$.

18.9. 1) $\frac{x-1}{2-x^2-x^4}$. 2) $\frac{1}{x^4-8x^2+15}$. 3) $x\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$.

координатной плоскости. Решив систему

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1, \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1, \end{cases}$$

найдем точку пересечения эллипсов (12/5; 12/5). Из уравнения первого эллипса получаем

$$\frac{2x}{16}+\frac{2yy'}{9}=0, \quad \text{т. е.} \quad y'(x)=-\frac{9}{16}\frac{x}{y},$$

и, следовательно, $y'(12/5)=-9/16$. Аналогично, для второго эллипса получим $y'(12/5)=-16/9$. Формула (5) в данном случае имеет вид

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{(-9/16)-(-16/9)}{1+(-9/16)(-16/9)}\right|=\frac{175}{288}.$$

Итак, эллипсы пересекаются в четырех точках под углом $\varphi=\operatorname{arctg}(175/288)$, т. е. под углом, равным приблизительно 31°.

14.1. Найти углы, под которыми график функции $y=f(x)$ пересекает ось абсцисс:

1) $y=\sin 3x$. 2) $y=\operatorname{tg} x$.
3) $y=\ln|x|$. 4) $y=1-e^x$.
5) $y=\operatorname{arctg}\alpha x$, $\alpha>0$.
6) $y=(x-1)^3(x-2)^2(x-3)$. 7) $y=\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$.
8) $x=(t-1)^2(t-2)$, $y=(t-1)^2(t-3)$, $2<t<+\infty$.
9) $x=\frac{3at}{t^3+1}$, $y=\frac{3at^2}{t^3+1}$, $-1<t<\frac{1}{2}$.
10) $x^2+y^2+2y-9=0$, $y>-1$.

14.2. Найти точки, в которых касательные к графику функции $y=f(x)$ параллельны оси абсцисс:

1) $y=2x^3-3x^2-12x+7$.
2) $y=3x^4+4x^3-12x^2-1$.
3) $y=3x^4-28x^3-6x^2+84x+1$.
4) $y=\cos 2x-5\cos x$. 5) $y=(3-x^2)e^x$.
6) $y=(2-x)^3/(x-3)^2$. 7) $y=|x-5|\cdot(x-3)^3$.
8) $x=t^3/(1+t^2)$, $y=(t^3-2t^2)/(1+t^2)$.
9) $x^2+2y^2+4x-4y=0$, $y>1$.

14.3. Написать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в указанной точке:

1) $y=\sqrt{5-x^2}$, $x=1$. 2) $y=\operatorname{arctg} 2x$, $x=0$.

3) $y=\ln\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$, $x=0$.
4) $y=4\operatorname{ctg} x-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$, $x=\frac{\pi}{2}$.
5) $y=\sqrt[3]{x-1}$, $x=1$.
6) $y=(x^3+2x^2)/(x-1)^2$, $x=-2$.
7) $y=|x-1|\cdot\sqrt[3]{x+2}$, $x=6$.
8) $x^2+y^2-2x+6y=0$, $y>-3$, $x=0$.
9) $x=te^t$, $y=te^{-t}$, $t>-1$, $t=t_0>-1$.
10) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t=t_0\neq 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

14.4. Написать уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке $(x_0; y_0)$.

14.5. Найти точки пересечения касательных к эллипсам

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

в точках с абсциссой x_0 с осью абсцисс.

14.6. Найти угол между касательными к кривой

$$2x^2-4xy+y^2-2x+6y-3=0,$$

проходящими через точку (3; 4).

14.7. Написать уравнение нормали к графику функции $y=f(x)$ в указанной точке:

1) $y=\cos 2x-2\sin x$, $x=\pi$.
2) $y=\operatorname{arcctg}(1/x)$, $x=1$. 3) $y=x^3/(2-x)^2$, $x=6$.
4) $y=x/\sqrt[3]{x+1}$, $x=-3$. 5) $y^2=2px$, $y\geqslant 0$, $x=x_0$.
6) $x=e^{2t}\cos^2 t$, $y=e^{2t}\sin^2 t$, $|t|<\pi/4$, $t=\pi/6$.

14.8. Написать уравнение нормали к эллипсу $3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0$ в точке $(-2; 1)$.

14.9. Написать уравнение нормали к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

в точке $(x_0; y_0)$.

14.10. Написать уравнение касательной и нормали к кривой в точке M:

1) $x^3+y^2+2x-6=0$, $M(-1; 3)$.
2) $4x^3-3xy^2+6x^2-5xy-8y^2+9x+14=0$, $M(-2; 3)$.
3) $y^4-4x^4-6xy=0$, $M(1; 2)$.
4) $x^5+y^5-2xy=0$, $M(1; 1)$.
5) $(4-x)y^2=x^3$, $M(x_0; y_0)$.

6) $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2,\quad n\in\mathbb{N},\ M(a;\ b)$.

7) $x=t^2,\ y=t^3,\ M(4;\ 8)$.

8) $x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ M(\pi\sqrt{2}/8;\ \pi\sqrt{2}/8)$.

9) $x=\sqrt{2}\cos^3 t,\ y=\sqrt{2}\sin^3 t,\ M(1/2;\ 1/2)$.

10) $x=\frac{1+t}{t^3},\ y=\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{2t},\ M(2;\ 2)$.

11) $x=(2t-1)/t^2,\quad y=(3t^2-1)/t^3,\ M(1;\ 2)$.

14.11. Определить, в каких точках и под каким углом пересекаются графики функций:

1) $f_1(x)=x-x^3,\quad f_2(x)=5x$.

2) $f_1(x)=\sqrt{2}\sin x,\quad f_2(x)=\sqrt{2}\cos x$.

3) $f_1(x)=x^2,\quad f_2(x)=x^3$.

4) $f_1(x)=1/x,\quad f_2(x)=\sqrt{x}$. 5) $f_1(x)=x^3,\ f_2(x)=1/x^2$.

6) $f_1(x)=\ln x,\ f_2(x)=x^2/(2e)$.

7) $f_1(x)=x^2-4x+4,\ f_2(x)=-x^2+6x-4$.

8) $f_1(x)=4x^2+2x-8,\ f_2(x)=x^3-x+10$.

9) $f_1(x)=\varphi(x),\ f_2(x)=\varphi(x)\sin\pi x,\ \varphi(x)$ — всюду дифференцируемая функция.

14.12. Определить, в каких точках и под каким углом пересекаются кривые:

1) $y=x^2$ и $x=y^2$. 2) $y=\frac{2}{3}x^5-\frac{1}{9}x^3$ и $x=1$.

3) $y=e^{x/2}$ и $x=2$. 4) $x^2+y^2=5$ и $y^2=4x$.

5) $y^2=2x^3$ и $64x-48y-11=0$.

6) $x^3+y^3-xy-7=0$ и $y=x+1$.

7) $x=\frac{t^3}{1+t^2},\ y=\frac{t^3-2t^2}{1+t^2}$ и $y+\ln\frac{5x}{8}=0$.

8) $x=\left(1+\frac{1}{t}\right)^t,\ y=\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}$ и $y=x$.

14.13. Доказать, что семейства парабол $y^2=p^2-2px$ и $y^2=2qx+q^2,\ p\neq 0,\ q\neq 0$, образуют *ортогональную сетку*, т. е. кривые этих семейств пересекаются под прямыми углами.

14.14. Доказать, что семейства гипербол

$$x^2-y^2=a \quad\text{и}\quad xy=b$$

образуют ортогональную сетку.

14.15. Доказать, что семейство эллипсов

$$x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\cos t,\quad y=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\sin t,\ 0\leqslant t<2\pi,$$

и семейство гипербол

$$x=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\cos\alpha,\quad y=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\sin\alpha,\quad 0<t<+\infty$$

(a и α — постоянные, причем $a>0,\ \alpha\neq\pi k/2,\ k\in\mathbb{Z}$), образуют ортогональную сетку.

14.16. Определить угол между левой и правой касательными в точке M графика функции $y=f(x)$:

1) $y=|x|,\ M(0;\ 0)$. 2) $y=\sqrt[3]{x^2},\ M(0;\ 0)$.

3) $y=\arccos(\cos x),\ M(\pi;\ \pi)$. 4) $y=\sqrt{1-e^{-3x^2}},\ M(0;\ 0)$.

5) $y=\sqrt{2x^3+9x^2},\quad M(0;\ 0)$.

6) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{2x}{1+x^2},\quad M\left(1;\ \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)$.

7) $x^3+y^3=3x^2,\ M(0;\ 0)$.

8) $y=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{если}\quad x\neq 0,\\ 0, & \text{если}\quad x=0,\end{cases}\quad M(0;\ 0)$.

9) $y=\frac{\sqrt{1+|x-2|}}{1+x},\quad M\left(2;\ \frac{1}{3}\right)$.

10) $x=t-\frac{t}{1+t^2},\quad y=\frac{2+t^2}{1+t^2},\ M(0;\ 2)$.

14.17. Вычислить в точке $(1;2)$ параболы $y^2=4x$ длины отрезков: 1) касательной, 2) нормали, 3) подкасательной, 4) поднормали.

14.18. Найти длину подкасательной графика функции $y=a^x$, $a>0,\ a\neq 1$, в каждой его точке.

14.19. Найти длины подкасательной и поднормали графика функции $y=ax^n,\ n\in\mathbb{N},\ a\neq 0$, в каждой его точке.

14.20. Найти длины подкасательной и поднормали: 1) параболы $y^2=2px$; 2) гиперболы $x^2-y^2=a^2$.

14.21. Доказать, что подкасательные эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и окружности $x^2+y^2=a^2$ в точках с равными абсциссами равны.

14.22. Доказать, что в точках с равными абсциссами поднормали графиков функций

$$y=f(x)\quad\text{и}\quad y=\sqrt{f^2(x)+a^2},$$

где $f(x)$ — дифференцируемая функция, равны.

14.23. Найти длины подкасательной и поднормали для кривых:

1) $y^2=x^3$. 2) $xy^2=1$.

14.24. Найти длины отрезков касательной, нормали, подкасательной и поднормали у циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

в каждой ее точке, не лежащей на оси абсцисс.

14.25. Найти длины отрезков касательной и нормали у трактрисы

$$x = a(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t), \quad y = a \sin t, \quad 0 < t < \pi, \quad a > 0.$$

14.26. Доказать, что у кривой

$$x = 2a(\ln \sin t - \sin^2 t), \quad y = a \sin 2t, \quad 0 < t < \pi, \quad a > 0,$$

сумма длин подкасательной и поднормали постоянна и равна $2a$.

14.27. Доказать, что если $r = f(\varphi)$ — уравнение кривой в полярной системе координат и ω — угол, образованный касательной и полярным радиусом точки касания, то $\operatorname{tg} \omega = r/|r'|$.

14.28. Найти угол между касательной и полярным радиусом точки касания для следующих кривых:

1) *Спирали Архимеда* $r = a\varphi$.
2) *Гиперболической спирали* $r = a/\varphi$.
3) *Логарифмической спирали* $r = ae^{b\varphi}$.
4) *Кардиоиды* $r = a(\cos \varphi + 1)$.
5) Дуги *лемнискаты Бернулли* $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $0 \leqslant \varphi < \pi/4$.

14.29. Под каким углом пересекаются кривые $r = \varphi$ и $r = 1/\varphi$ в точке $(1; 1)$?

14.30. Доказать, что угол между касательной к спирали Архимеда $r = a\varphi$ и полярным радиусом точки касания при $\varphi \to +\infty$ стремится к $\pi/2$.

14.31. Найти расстояние от полюса до произвольной касательной кривой $r = ae^{b\varphi}$.

14.32. Записать в декартовых и в полярных координатах уравнение нормали к кардиоиде $r = a(1 + \cos \varphi)$ в точке с полярным углом $\varphi = \pi/6$.

---

2. Физический смысл производной. Средней скоростью изменения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называют отношение

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{8}$$

Мгновенной скоростью или скоростью изменения в точке x функции $f(x)$ называется

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x). \tag{9}$$

Таким образом, производная есть скорость изменения функции. На интерпретации производной как величины мгновенной

скорости изменения функции основано применение прозводной к изучению разнообразных физических явлений.

Пример 5. Высота h снаряда, вылетевшего с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, изменяется по закону

$$h = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{gt^2}{2},$$

где t — время, g — ускорение силы тяжести. В какой момент скорость изменения высоты снаряда над горизонтом равна нулю?

△ Вычисляем производную функции $h(t)$:

$$h'(t) = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Следовательно, скорость изменения высоты снаряда над горизонтом равна нулю при

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \quad ▲$$

Пример 6. Количество электричества q (в кулонах), протекающее через поперечное сечение проводника, изменяется по закону $q = 3t^2 + 2t$. Найти силу тока в конце пятой секунды.

△ Сила тока i в момент времени t равна мгновенной скорости изменения количества электричества, протекающего через поперечное сечение проводника. Поэтому $i(t) = q'(t) = 6t + 2$ и $i(5) = 32$, т. е. сила тока в конце пятой секунды равна 32 амперам. ▲

14.33. Поезд Москва — Тбилиси проходит весь путь в 2400 км за 44 часа 14 минут. Определить среднюю скорость поезда.

14.34. Определить среднюю скорость изменения функции $y = \sin(1/x)$ на отрезке $[2/\pi; 6/\pi]$.

14.35. Тело с массой $m = 1{,}5$ движется прямолинейно по закону $S(t) = t^2 + t + 1$. Найти кинетическую энергию тела через 5 с после начала движения (масса m задана в килограммах, путь S — в метрах).

14.36. Точка движется по параболе $y = 8x - x^2$ так, что ее абсцисса изменяется по закону $x = \sqrt{t}$ (x измеряется в метрах, t — в секундах). Какова скорость изменения ординаты точки через 9 с после начала движения?

14.37. Радиус шара возрастает равномерно со скоростью 5 см/с. Какова скорость изменения объема шара в момент, когда его радиус становится равным 50 см?

14.38. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан за 8 с. Найти угловую скорость через 64 с после начала движения.

14.39. По оси абсцисс движутся две точки, имеющие законы движения

$$x = 100 + 5t \quad \text{и} \quad x = t^2/2.$$

С какой скоростью удаляются они друг от друга в момент встречи (x измеряется в метрах, t — в секундах)?

14.40. Паром подтягивается к берегу при помощи каната, который наматывается на ворот со скоростью 3 м/мин. Определить скорость движения парома в тот момент, когда он находится в 25 м от берега, если ворот расположен на берегу выше поверхности воды на 4 м.

14.41. Закон движения материальной точки, брошенной под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0, без учета сопротивления воздуха, имеет вид

$$x=(v_0\cos\alpha)t, \quad y=(v_0\sin\alpha)t-\frac{gt^2}{2},$$

где t — время, g — ускорение силы тяжести. Определить координаты вектора скорости и величину скорости.

14.42. Точка движется по спирали Архимеда $r=a\varphi$ так, что угловая скорость вращения ее полярного радиуса постоянна и равна 6° в секунду. Определить скорость удлинения полярного радиуса r, если $a=10$ м.

14.43. Расстояние r спутника Земли от ее центра приближенно может быть выражено формулой

$$r=a\left(1-\varepsilon\cos\frac{2\pi(t-t_0)}{P}-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\cos\frac{4\pi(t-t_0)}{P}-1\right)\right),$$

где t — время, a — большая полуось эллиптической орбиты, ε — ее эксцентриситет, P — период обращения спутника, t_0 — время прохождения через перигей. Найти величину скорости изменения расстояния r (так называемую радиальную скорость спутника).

14.44. Количество тепла Q Дж, необходимого для нагревания 1 кг воды от 0° С до t° С, определяется формулой

$$Q=t+2\cdot10^{-5}t^2+3\cdot10^{-7}t^3.$$

Определить теплоемкость воды при $t=100$° С.

14.45. Масса $m(t)$ радиоактивного вещества изменяется по закону

$$m=m_0 2^{(t_0-T)/T},$$

где t — время, m_0 — масса в момент времени t_0, T — период полураспада. Доказать, что скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна количеству вещества. Найти коэффициент пропорциональности.

§ 15. Производные и дифференциалы высших порядков

1. Производные высших порядков. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$. Производную $f'(x)$ называют *производной первого порядка* или *первой производной* функции $f(x)$. Если первая производная $f'(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$, то ее производную называют *второй производной* или *производной второго порядка* функции $f(x)$. Для

производной второго порядка приняты следующие обозначения:

$$f''(x),\ f^{(2)}(x),\ \frac{d^2f(x)}{dx^2},\quad f''_{xx},\ f''_{x^2}.$$

Аналогично определяется производная

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^nf(x)}{dx^n}$$

порядка $n\in\mathbb{N}$: если на интервале $(a;b)$ существует производная порядка $n-1$, то ее первая производная называется *производной порядка n*, т. е. по определению

$$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))',\quad n\in\mathbb{N};$$

при этом под производной $f^{(0)}(x)$ нулевого порядка подразумевается функция $f(x)$.

Если $s=s(t)$ — закон прямолинейного движения материальной точки, то $s''(t)$ есть ускорение этой точки в момент времени t. В этом заключается физический смысл второй производной.

Пример 1. Найти производную второго порядка функции

$$f(x)=\ln|1+x|.$$

△ Так как $f'(x)=1/(1+x)$, то

$$f''(x)=\left(\frac{1}{1+x}\right)'=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad x\neq-1. \ ▲$$

Пример 2. Найти производную порядка n функции $f(x)=2^{3x}$.

△ Так как

$$f'(x)=2^{3x}\cdot3\ln2,$$
$$f''(x)=(2^{3x}\cdot3\ln2)'=2^{3x}\cdot3^2\ln^2 2,$$
$$f'''(x)=(2^{3x}\cdot3^2\ln^2 2)'=2^{3x}\cdot3^3\ln^3 2,$$

то естественно предположить, что

$$f^{(n)}(x)=2^{3x}\cdot3^n\ln^n 2.$$

Докажем справедливость этой формулы методом математической индукции. При $n=1$ формула верна. Предположим, что она верна при $n=k$, т. е.

$$f^{(k)}(x)=2^{3x}\cdot3^k\ln^k 2.$$

Тогда

$$f^{(k+1)}(x)=(2^{3x}\cdot3^k\ln^k 2)'=2^{3x}\cdot3^{k+1}\ln^{k+1}2$$

и, следовательно, формула верна и при $n=k+1$. Отсюда вытекает ее справедливость при всех значениях n. ▲

При вычислении производных высших порядков часто используются следующие основные формулы:

$$(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a, \tag{1}$$

в частности,

$$(e^x)^{(n)} = e^x. \tag{2}$$

$$(\sin \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \sin\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right), \tag{3}$$

$$(\cos \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right). \tag{4}$$

$$((ax+b)^\alpha)^{(n)} = a^n \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n}. \tag{5}$$

$$(\log_a |x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}, \tag{6}$$

в частности,

$$(\ln |x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}. \tag{7}$$

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные порядка n, то функции $\alpha u(x) + \beta v(x)$, где α и β — постоянные, и $u(x)v(x)$ также имеют производные порядка n, причем

$$(\alpha u + \beta v)^{(n)} = \alpha u^{(n)} + \beta v^{(n)}, \tag{8}$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}. \tag{9}$$

Последняя формула называется формулой Лейбница.

Пример 3. Найти производную порядка n функций:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$. 2) $f(x) = x^2 \cos 2x$.

△ 1) Представим данную функцию в виде (разложим на элементарные дроби; см. § 6)

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right).$$

Согласно формуле (8) имеем

$$\left(\frac{1}{x^2-4}\right)^{(n)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}.$$

Положив в формуле (5) $\alpha = -1$, $a = 1$, $b = \pm 2$, получим

$$\left(\frac{1}{x \pm 2}\right)^{(n)} = (-1)(-2)\ldots(-1-n+1)(x \pm 2)^{-1-n} = (-1)^n n! \frac{1}{(x \pm 2)^{n+1}}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1}{x^2-4}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{4}\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right).$$

2) Применим формулу Лейбница, положив в ней $u = \cos 2x$, $v = x^2$:

$$(x^2 \cos 2x)^{(n)} = C_n^0 x^2 (\cos 2x)^{(n)} + C_n^1 (x^2)' (\cos 2x)^{(n-1)} + C_n^2 (x^2)'' (\cos 2x)^{(n-2)}.$$

Остальные слагаемые равны нулю, так как

$$(x^2)^{(k)} = 0 \text{ при } k > 2.$$

Для вычисления производных порядка n, $n-1$ и $n-2$ функции $\cos 2x$ используем формулу (4):

$$(\cos 2x)^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

$$(\cos 2x)^{(n-1)} = 2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{\pi(n-1)}{2}\right) = 2^{n-1} \sin\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

$$(\cos 2x)^{(n-2)} = 2^{n-2} \cos\left(2x + \frac{\pi(n-2)}{2}\right) = -2^{n-2} \cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

Следовательно,

$$(x^2 \cos 2x)^{(n)} = 2^n \left(x^2 - \frac{n(n-1)}{4}\right) \cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right) + 2^n n x \sin\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right). \ \blacktriangle$$

Пример 4. Для функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ вычислить $f^{(n)}(0)$.

△ Так как $f'(x) = 1/(1+x^2)$, то

$$(1+x^2) f'(x) = 1.$$

Вычислим производные порядка $n-1$ от обеих частей этого равенства. Для вычисления производной от левой части применим формулу Лейбница, положив в ней $u = f'(x)$, $v = 1 + x^2$. Получим

$$(1+x^2) f^{(n)}(x) + 2(n-1) x f^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2) f^{(n-2)}(x) = 0,$$

откуда при $x = 0$ найдем рекуррентное соотношение

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2) f^{(n-2)}(0).$$

При четном n $(n = 2k)$, поскольку $f^{(2)}(0) = 0$, получаем

$$f^{(2k)}(0) = 0.$$

При нечетном n $(n = 2k+1)$, поскольку $f'(0) = 1$, находим

$$f^{(2k+1)}(0) = -(2k)(2k-1) f^{(2k-1)}(0) = \ldots = (-1)^k (2k)! f'(0) = (-1)^k (2k)! \ \blacktriangle$$

Пример 5. Найти вторую производную функции, обратной к функции

$$y = x + x^5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

△ Данная функция всюду непрерывна и строго монотонна, ее производная $y'_x = 1 + 5x^4$ не обращается в нуль ни в одной точке, поэтому

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1+5x^4}.$$

Дифференцируя это тождество по y, получим

$$x''_{yy} = \left(\frac{1}{1+5x^4}\right)'_x \cdot x'_y = \frac{-20x^3}{(1+5x^4)^3}. \ ▲$$

Пример 6. Функция $y = f(x)$ задана параметрически формулами

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t \in (0; 2\pi).$$

Найти y''_{xx}.

△ По формуле (34) § 13 находим

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{2\sin(t/2)\cos(t/2)}{2\sin^2(t/2)},$$

т. е. $y'_x = \operatorname{ctg}(t/2)$. Дифференцируя обе части полученного равенства по x, получим

$$y''_{xx} = (\operatorname{ctg}(t/2))'_t \cdot t'_x = (\operatorname{ctg}(t/2))'_t \cdot \frac{1}{x'_t} =$$

$$= -\frac{1}{2\sin^2(t/2)} \cdot \frac{1}{1-\cos t} = -\frac{1}{4\sin^4(t/2)}. \ ▲$$

Пример 7. Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически формулами

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (a; b),$$

и пусть $x(t)$ и $y(t)$ дважды дифференцируемы и $x'(t) \neq 0$ при $t \in (a; b)$. Найти y''_{xx}.

△ По формуле (34) § 13 находим первую производную $f'(x)$:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по x, получаем

$$y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot t'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t},$$

т. е.

$$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}. \qquad (10) \ ▲$$

Пример 8. Пусть $y = y(x)$, $|x| > a$, — положительная функция, заданная неявно уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Найти y''_{xx}.

△ Для нахождения y'_x воспользуемся уравнением (35) § 13, которое в данном случае имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0.$$

Дифференцируя, получаем

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} y'_x = 0. \qquad (11)$$

Из этого уравнения находим $y'_x = \frac{b^2 x}{a^2 y}$, $|x| > a$, $y > 0$. Дифференцируя по x обе части равенства (11), найдем

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}(y'_x)^2 - \frac{y}{b^2} y''_{xx} = 0.$$

Следовательно,

$$y''_{xx} = \frac{1}{y}\left(\frac{b^2}{a^2} - (y'_x)^2\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2}\right) =$$

$$= -\frac{b^4}{a^2y^3}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = -\frac{b^4}{a^2y^3}, \quad y > 0. \ ▲$$

Пример 9. Определить, какого порядка производными обладает в точке $x = 0$ функция $y = |x|^3$.

△ Если $x \neq 0$, то

$$y'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{при} \quad x > 0, \\ -3x^2 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

При $x = 0$ по определению производной находим

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(0+\Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|^3}{\Delta x} = 0.$$

Таким образом, первая производная существует при всех x, причем

$$y'(x) = 3x^2 \operatorname{sign} x.$$

Аналогично, для второй производной получаем

$$y''(x) = \begin{cases} 6x & \text{при} \quad x > 0, \\ -6x & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

$$y''(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y'(0+\Delta x) - y'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x^2 \operatorname{sign} \Delta x}{\Delta x} = 0,$$

т. е. вторая производная существует при всех x, причем

$$y''(x) = 6|x|.$$

Функция $|x|$ недифференцируема в точке $x=0$. Следовательно, данная функция $y=|x|^3$ обладает в точке $x=0$ производными до второго порядка включительно. ▲

2. Дифференциалы высших порядков. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$. Ее дифференциал

$$dy=f'(x)\,dx, \tag{12}$$

который называют также ее первым дифференциалом, зависит от двух переменных x и dx. Пусть производная $f'(x)$ также дифференцируема на интервале $(a;b)$. Тогда при фиксированном dx дифференциал dy является функцией только x, для которой можно в свою очередь вычислить дифференциал, причем в качестве приращения Δx независимой переменной x взять то же самое приращение, которое было выбрано при нахождении первого дифференциала функции $f(x)$, т. е. dx. Вычисленный при этом условии дифференциал от первого дифференциала называется вторым дифференциалом или дифференциалом второго порядка функции $y=f(x)$ и обозначается d^2y или d^2f.

Таким образом, по определению

$$d^2y=d(dy)=d(f'(x)\,dx)=(df'(x))\,dx=f''(x)\,dx\,dx=f''(x)(dx)^2,$$

или

$$d^2y=f''(x)\,dx^2. \tag{13}$$

Аналогично, в случае, когда функция $y=f(x)$ на интервале $(a;b)$ имеет производную порядка n, определяется n-й дифференциал d^ny как первый дифференциал от $(n-1)$-го дифференциала при условии, что при вычислении первого дифференциала в качестве приращения Δx берется то приращение dx, которое выбиралось при вычислении $(n-1)$-го дифференциала.

Методом индукции для n-го дифференциала получается формула

$$d^ny=f^{(n)}(x)\,dx^n. \tag{14}$$

Дифференциал n-го порядка независимой переменной x при $n>1$ по определению считается равным нулю, т. е.

$$d^nx=0 \text{ при } n>1. \tag{15}$$

Если для функций $u(x)$ и $v(x)$ дифференциалы d^nu и d^nv существуют, то функции $\alpha u(x)+\beta v(x)$, где α и β — постоянные, и $u(x)v(x)$ также имеют дифференциалы n-го порядка, причем

$$d^n(\alpha u+\beta v)=\alpha d^nu+\beta d^nv, \tag{16}$$

$$d^n(uv)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k}u\cdot d^kv. \tag{17}$$

Замечание. Формула (13) и формула (14) при $n>1$ справедливы только тогда, когда x является независимой переменной. Для сложной функции $y=y(x(t))$ формула (13) обобщается следующим образом:

$$d^2y=d(dy)=d(y'_x\,dx)=(dy'_x)\,dx+y'_xd(dx),$$

т. е.

$$d^2y=y''_{xx}\,dx^2+y'_xd^2x. \tag{18}$$

В случае, когда x — независимая переменная, $d^2x=0$ и формула (18) совпадает с формулой (13).

Пример 10. Найти второй дифференциал функции $y=xe^{-x}$, считая x независимой переменной.

△ I способ. По определению второго дифференциала находим

$$d^2y=d(dy)=d(x\,de^{-x}+e^{-x}\,dx)=d(-xe^{-x}\,dx+e^{-x}\,dx)=$$
$$=-d(xe^{-x})\,dx+(de^{-x})\,dx=-(x\,de^{-x}+e^{-x}\,dx)\,dx-e^{-x}\,dx^2=$$
$$=xe^{-x}\,dx^2-e^{-x}\,dx^2-e^{-x}\,dx^2=(x-2)\,e^{-x}\,dx^2.$$

II способ. Вычисляем вторую производную

$$y''=(xe^{-x})''=(e^{-x}-xe^{-x})'=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=(x-2)\,e^{-x}$$

и по формуле (13) находим

$$d^2y=(x-2)\,e^{-x}dx^2. \ ▲$$

Пример 11. Найти второй дифференциал функции $y=\sin x^2$, считая x: а) функцией некоторой независимой переменной; б) независимой переменной.

△ а) I способ. По определению второго дифференциала имеем

$$d^2y=d(d\sin x^2)=d(2x\cos x^2\,dx)=(2x\cos x^2)\,d^2x+$$
$$+(d(2x\cos x^2))\,dx=2x\cos x^2d^2x+(2\cos x^2-4x^2\sin x^2)\,dx^2.$$

II способ. Вычисляем первую и вторую производные данной функции по x:

$$y'_x=2x\cos x^2,$$
$$y''_{xx}=2\cos x^2-4x^2\sin x^2.$$

Согласно формуле (18) получаем

$$d^2y=(2\cos x^2-4x^2\sin x^2)\,dx^2+2x\cos x^2d^2x.$$

б) В этом случае $d^2x=0$ и, следовательно,

$$d^2y=(2\cos x^2-4x^2\sin x^2)\,dx^2. \ ▲$$

Пример 12. Найти d^2y, если $y=u/v$ и du, dv, d^2u, d^2v известны.

△ При решении используем свойства первого дифференциала (формулы (41)—(43) § 13)

$$d^2\left(\frac{u}{v}\right)=d\left(d\,\frac{u}{v}\right)=d\left(\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}\right)=$$

$$=\frac{v^2d\,(v\,du-u\,dv)-(v\,du-u\,dv)\,dv^2}{v^4}=$$

$$=\frac{v^2\,(vd^2u+dv\,du-ud^2v-du\,dv)-2v\,(v\,du-u\,dv)\,dv}{v^4}=$$

$$=\frac{1}{v}\,d^2u-\frac{u}{v^2}\,d^2v-\frac{2}{v^2}\,du\,dv+\frac{2u}{v^3}\,dv^2. \blacktriangle$$

15.1. Найти производную второго порядка:

1) $y=x^2+13x+11$. 2) $y=1+10x+\frac{1}{x^{98}}$.

3) $y=\frac{x\,(1+3\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}}$. 4) $y=\cos^2 x$.

5) $y=\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x$. 6) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

7) $y=\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. 8) $y=\operatorname{arcctg}\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

9) $y=\arcsin\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

10) $y=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}-\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}$.

15.2. Найти вторую производную в указанной точке:

1) $y=e^{\sqrt{x}}$, $x=4$. 2) $y=\frac{x^5}{(x-1)^4}$, $x=5$.

3) $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x=0$. 4) $y=e^{\sin x}\cos(\sin x)$, $x=0$.

15.3. Точка движется по закону $s(t)=2t^2+\frac{5}{3}t^3$ (s измеряется в метрах, t — в секундах). Найти ее ускорение через 5 с после начала движения.

15.4. Доказать, что при движении тела по закону $s(t)=ae^t+be^{-t}$ его ускорение численно равно пройденному пути.

15.5. Доказать, что при движении тела по закону $s(t)=\sqrt{t}$ его ускорение пропорционально кубу скорости.

15.6. Одна точка движется по закону $s_1(t)=t^3+\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2}$, другая — по закону $s_2(t)=\frac{2}{3}t^3+3t^2-5t$ (s_1, s_2 измеряются в метрах, t — в секундах). Найти ускорения точек в тот момент, когда их скорости равны.

15.7. Найти величину силы, действующей на точку с массой $m=0{,}1$, движущуюся по закону $s(t)=t^2-4t^4$ в момент времени $t=3$ (m, s, t заданы в системе СИ).

15.8. По окружности радиуса 5 м движется точка с постоянной угловой скоростью 2 рад/с. Найти величину ускорения точки.

15.9. Найти второй дифференциал функции:

1) $y=(x^2+x+1)\,e^{-x}$. 2) $y=2x+\operatorname{ctg}2x$.
3) $y=x(\cos\ln x+\sin\ln x)$. 4) $y=x^x$.

15.10. Найти второй дифференциал функции в указанной точке:

1) $y=\frac{x^3}{3-x^2}$, $x=1$. 2) $y=\frac{3x+2}{x^2-2x+5}$, $x=0$.

3) $y=x\sqrt[3]{(x-5)^2}$, $x=-3$. 4) $y=\operatorname{arctg}\frac{2+x^2}{2-x^2}$, $x=0$.

15.11. Определить, удовлетворяет ли функция $y=y(x)$ заданному уравнению:

1) $y=A\cos ax+B\sin ax$, $y''+a^2y=0$.
2) $y=Ae^{ax}+Be^{-ax}$, $y''-a^2y=0$.
3) $y=(A\cos 3x+B\sin 3x)\,e^{-x}$, $y''+2y'+10y=0$.
4) $y=Ae^x+Be^{-x}-\frac{1}{x}$, $y''-y=\frac{x^2-2}{x^3}$.
5) $y=1+\cos e^x+\sin e^x$, $y''-y'+e^{2x}y=0$.
6) $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{10}$, $(1+x^2)\,y''+xy'-100y=0$.
7) $y=e^{10\arcsin x}$, $(1-x^2)\,y''-xy'-100y=0$.
8) $y=\cos(10\arccos x)$, $(1-x^2)\,y''-xy'+100y=0$.

15.12. Найти y'', считая известными u', u'', v', v'':

1) $y=(v+2u)/u$. 2) $y=e^{uv}$.
3) $y=\operatorname{arctg}(v/u)$. 4) $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$.

15.13. Найти d^2y, считая известными du, d^2u, dv, d^2v:

1) $y=u(2+v)$. 2) $y=u\ln v$.
3) $y=\sqrt{u^2+v^2}$. 4) $y=u^v$.

15.14. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функций, заданных параметрически уравнениями:

1) $x=t^3$, $y=t^2$. 2) $x=\frac{t^2}{1+t^3}$, $y=\frac{t^3}{1+t^3}$.
3) $x=\ln\cos t$, $y=\ln\cos 2t$. 4) $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.
5) $x=(1+\cos^2 t)\sin t$, $y=\sin^2 t\cos t$.
6) $x=t\operatorname{ch}t-\operatorname{sh}t$, $y=t\operatorname{sh}t-\operatorname{ch}t$.
7) $x=\frac{e^t}{1+t}$, $y=(t-1)\,e^t$. 8) $x=\frac{1}{\cos t}$, $y=\operatorname{tg}t-t$.
9) $x=\sin\log_2 t$, $y=\operatorname{tg}\log_2 t$. 10) $x=2^{\cos^2 t}$, $y=2^{\sin^2 t}$.

15.15. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ в заданной точке:

1) $x=(t^2+1)e^t,\ y=t^2e^{2t};\ (1;\ 0)$.
2) $x=\frac{2t-t^2}{t-1},\ y=\frac{t^2}{t-1};\ (0;\ 4)$.
3) $x=\ln(1+\sin\varphi),\ y=\ln(1-\cos 2\varphi);\ (\ln(3/2);\ \ln(1/2))$.
4) $x=\operatorname{ch}t\sin t+\operatorname{sh}t\cos t,\ y=\operatorname{ch}t\cos t-\operatorname{sh}t\sin t;\ (0;\ 1)$.

15.16. Найти $\frac{d^2x}{dy^2}$ для функций, заданных параметрически уравнениями:

1) $x=-2+3t-t^3,\ y=t+2t^2+t^3$.
2) $x=\ln\operatorname{tg}(t/2),\ y=\ln\operatorname{tg}t$.
3) $x=\log_5\sin t,\ y=\log_5\cos t$.
4) $x=\arcsin\operatorname{tg}t,\ y=\sqrt{\cos 2t}$.

15.17. Доказать, что функции $y=y(x)$, заданные параметрически, удовлетворяют заданным уравнениям:

1) $x=t^3+t,\ y=\frac{3}{4}t^4+\frac{1}{2}t^2+1;\ y''(1+3y'^2)=1$.
2) $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ -\pi/4<t<\pi/4;$

$$(x-y)^2y''=2(xy'-y).$$

3) $x=\sin t,\ y=Ae^{\sqrt{2}\,t}+Be^{-\sqrt{2}\,t},\ -\pi/2<t<\pi/2,$

A и B — произвольные постоянные; $(1-x^2)y''-xy'-2y=0$.

4) $x=3At^2+\ln Bt,\ y=2At^3+t,\ A$ и B — произвольные положительные постоянные; $(3y-2y')y''=y'^2$.

15.18. Найти $\frac{d^3y}{dx^3}$ для функций, заданных параметрически уравнениями:

1) $x=a\cos t,\ y=a\sin t$. 2) $x=a\operatorname{ch}t,\ y=a\operatorname{sh}t$.
3) $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$.
4) $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$.
5) $x=e^{-t}\cos t,\ y=e^{-t}\sin t$.
6) $x=\cos t-\ln\operatorname{ctg}(t/2),\ y=\sin t$.

15.19. Найти $\frac{d^ny}{dx^n}$ для функций, заданных параметрически уравнениями:

1) $x=a\cos^2 t,\ y=b\sin^2 t$. 2) $x=\cos t,\ y=\cos nt,\ n\in\mathbb{N}$.
3) $x=t^2-t+1,\ y=t^2+t+1$. 4) $x=\frac{t}{t+1},\ y=\frac{2t^2+t}{(t+1)^2}$.

15.20. Пусть для функции $y=f(x)$ известны $f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$. Найти вторую и третью производные обратной функции $x=f^{-1}(y)$, предполагая, что они существуют.

15.21. Для функций $y=y(x)$, заданных неявно, найти y'':

1) $x^2+y^2=a^2$. 2) $x^2-y^2=a^2$.
3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 4) $y^2=2px$.
5) $e^{x-y}=x+y$. 6) $e^{2y}-2\ln x-1=0$.
7) $y-x\operatorname{tg}\ln\sqrt{x^2+y^2}=0$. 8) $y^2=e^{x^4-y^2}$.

15.22. Найти d^2y в точке $(x_0;y_0)$ для функций $y=y(x)$, заданных неявно:

1) $x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0,\ (1;\ 1)$.
2) $2\ln(y-x)+\sin xy=0,\ (0;\ 1)$.
3) $x^3y+\arcsin(y-x)=1,\ (1;\ 1)$.
4) $3(y-x+1)+\operatorname{arctg}(y/x)=0,\ (1;\ 0)$.

15.23. Доказать, что функции $y=y(x)$, заданные неявно, удовлетворяют уравнениям:

1) $y=A\ln y+x+B,\quad y\cdot y''=(y')^2-(y')^3$.
2) $(A+Bx)e^{y/x}=x,\quad x^3y''=(xy'-y)^2$.

15.24. Найти $y^{(n)}(x)$ для следующих функций:

1) $y=x^3+x+e^{3x}$. 2) $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$.
3) $y=\frac{1+x}{1-x}$. 4) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$.
5) $y=\ln(ax+b)$. 6) $y=\sin^2 x$.
7) $y=\sin ax\sin bx$. 8) $y=\operatorname{ch}ax\operatorname{ch}bx$.
9) $y=\sin^2 x\sin 2x$. 10) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.
11) $y=\cos^4 x$. 12) $y=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$.
13) $y=\frac{x}{x^2-4x-12}$. 14) $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$. 15) $y=\frac{3-2x^2}{2x^2+3x-2}$.

15.25. Найти $y^{(n)}(x)$ для следующих функций:

1) $y=(x-1)2^{x-1}$. 2) $y=(2x-1)2^{3x}\cdot 3^{2x}$.
3) $y=(3-2x)^2e^{2-3x}$. 4) $y=x\log_2(1-3x)$.
5) $y=\ln(x-1)^{2x}$. 6) $y=x\ln\frac{3+x}{3-x}$.
7) $y=x\ln(x^2-3x+2)$. 8) $y=x\cos x$.
9) $y=2x\cos^2(x/3)$. 10) $y=(x^2+x)\cos^2 x$.

15.26. Найти $y^{(n)}(x)$ для следующих функций:

1) $y=\frac{x}{\sqrt{1-5x}}$. 2) $y=\frac{x^2}{\sqrt{1-2x}}$.
3) $y=e^{ax}\cos(bx+c)$. 4) $y=e^{2x}\sin^2 x$.

5) $y=\operatorname{ch} ax \sin bx$.

6) $y=x^{n-1}e^{1/x}$.

7) $y=x^{n-1}\ln x$. 8) $y=\operatorname{arctg} x$.

15.27. Вычислить в заданной точке производную указанного порядка:

1) $y=(2x-7)^2(3x+7)^3$; а) $n=5$, $x=x_0$; б) $n=6$, $x=x_0$.

2) $y=\sqrt{x}$; $n=10$, $x=1$. 3) $y=\dfrac{x^2}{1-x}$; $n=8$, $x=0$.

4) $y=\dfrac{x+1}{x^2+x-2}$; $n=13$, $x=-\dfrac{1}{2}$.

5) $y=\sqrt{x^2+3x^3}$; $n=5$, $x=1$.

6) $y=\dfrac{1-x^2}{\sqrt[3]{2-3x}}$; $n=6$, $x=-1$.

7) $y=x^2\ln x$; $n=100$, $x=1$.

8) $y=(x^2-2x)\cos 3x$; $n=101$, $x=1$.

9) $y=x\sin x\cos 2x$; $n=100$, $x=\pi/2$.

10) $y=(x-\sin x)^2$; $n=16$, $x=\pi/4$.

11) $y=\operatorname{arctg}^2 x$; а) $n=10$, $x=0$; б) $n=11$, $x=0$.

15.28. Вычислить в заданной точке дифференциал указанного порядка:

1) $y=(x+5)^5$; $n=3$, $x=0$.

2) $y=\dfrac{7x+1}{(3x-2)^2}$; $n=10$, $x=1$.

3) $y=\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}\right)^2$; $n=16$, $x=1$.

4) $y=\sin x\sin 2x\sin 3x$; $n=10$, $x=\pi/6$.

5) $y=(2x^2+1)\operatorname{sh}^2 x$; $n=8$, $x=0$.

6) $y=\arcsin x$; а) $n=19$, $x=0$; б) $n=20$, $x=0$.

15.29. Определить, какого порядка производными обладает в точке $x=0$ функция $y=y(x)$, и вычислить в этой точке все существующие производные:

1) $y(x)=\begin{cases} 1-\cos x, & \text{если } x<0,\\ \ln(1+x)-x, & \text{если } x\geqslant 0.\end{cases}$

2) $y(x)=\begin{cases} 2x\cos x, & \text{если } x<0,\\ \sin 2x, & \text{если } x\geqslant 0.\end{cases}$

3) $y(x)=\begin{cases} \operatorname{sh} x-x, & \text{если } x<0,\\ x-\sin x, & \text{если } x\geqslant 0.\end{cases}$

4) $y(x)=\begin{cases} \operatorname{sh} x, & \text{если } x<0,\\ \sin x\operatorname{ch} x, & \text{если } x\geqslant 0.\end{cases}$

5) $y(x)=\begin{cases} x^{10}, & \text{если } x \text{ — рациональное число},\\ -x^{10}, & \text{если } x \text{ — иррациональное число}.\end{cases}$

6) $y(x)=\begin{cases} x^{100}\sin(1/x), & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0.\end{cases}$

7) $y(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0.\end{cases}$

15.30. Пусть $f(x)\in C^{n-1}[0;+\infty)$. Доказать, что существуют числа a_k $(1\leqslant k\leqslant n)$ такие, что функция

$$\varphi(x)=\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k f(-kx), & \text{если } x<0,\\ f(x), & \text{если } x\geqslant 0,\end{cases}$$

непрерывно дифференцируема на всей оси.

15.31. Пусть функция $\varphi(x)$ дифференцируема и удовлетворяет условию $\varphi'(x)=f(\varphi(x))$, где f имеет производные всех порядков. Доказать, что $\varphi(x)$ также имеет производные всех порядков.

15.32. Доказать, что если $f^{(n)}$ существует, то

$$\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

15.33. Пусть

$$P_{n,m}(x)=\frac{d^n}{dx^n}(1-x^m)^n,\quad m>0.$$

Найти $P_{n,m}(1)$.

ГЛАВА IV

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

§ 16. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

1. Теорема Ролля. Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, имеет во всех его внутренних точках конечную или определенного знака бесконечную производную и $f(a)=f(b)$, то существует такая точка $\xi \in (a; b)$, что

$$f'(\xi)=0. \qquad (1)$$

Условие (1) означает, что в точке $(\xi; f(\xi))$ графика функции f касательная к нему горизонтальна (рис. 82). В условиях теоремы Ролля среди точек ξ, удовлетворяющих условию (1), всегда существует точка, в которой функция f имеет экстремум.

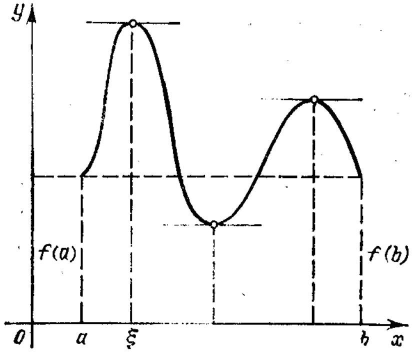


Рис. 82.

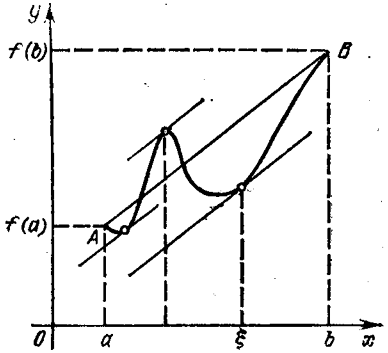


Рис. 83.

2. Теорема Лагранжа. Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет во всех его внутренних точках конечную или определенного знака бесконечную производную, то существует такая точка $\xi \in (a; b)$, что

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a). \qquad (2)$$

Формула (2) называется *формулой конечных приращений Лагранжа.* Ее геометрический смысл состоит в том, что в условиях теоремы на графике функции f найдется точка $(\xi; f(\xi))$, $a<\xi<b$, в которой касательная к графику параллельна хорде графика (рис. 83), соединяющей точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$. Действительно, если формулу (2) переписать в виде

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi), \qquad (3)$$

то ее левая часть равна тангенсу угла, образованного указанной хордой с осью x, а правая — тангенсу угла, образованного соответствующей касательной с той же осью.

Положив $a=x$, $b-a=h$, формулу (2) можно удобно записать в виде

$$f(x+h)-f(x)=f'(x+\theta h)h, \quad 0<\theta<1. \qquad (4)$$

Следствие 1. Пусть функция f непрерывна на некотором промежутке и дифференцируема во всех его точках, кроме конечного их множества. Тогда, если производная функции f равна нулю во всех точках, где производная существует, то функция f постоянна на рассматриваемом промежутке.

Следствие 2. Пусть функции f и g непрерывны на некотором промежутке и дифференцируемы во всех его точках, кроме конечного их множества (вообще говоря, различного для каждой из них). Если во всех точках, в которых одновременно существуют производные f' и g', они совпадают: $f'(x)=g'(x)$, то на всем рассматриваемом промежутке функции f и g отличаются на постоянную:

$$f(x)=g(x)+c, \quad c - \text{const}.$$

Следствие 3. Пусть функция f непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в проколотой окрестности этой точки. Тогда, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=A$, то функция f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0)=A$.

3. Теорема Коши. Если функции $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и имеют во всех его внутренних точках конечные производные, причем $\varphi'(t)\neq 0$, $a<t<b$, то существует такая точка $\xi \in (a; b)$, что

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \qquad (5)$$

Если $\varphi(a)\neq\varphi(b)$, то условие $\varphi'(t)\neq 0$ на $(a; b)$ можно заменить условием $[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2>0$, $a<t<b$.

Геометрический смысл теоремы Коши состоит в том, что на параметрически заданной кривой $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, существует точка $(\varphi(\xi); \psi(\xi))$, $a<\xi<b$, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей начало $(\varphi(a); \psi(a))$ и конец $(\varphi(b); \psi(b))$ этой кривой. В самом деле, дроби $\frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ и $\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$ равны соответственно тангенсам углов, образованных указанными касательной и хордой с осью x.

Пример. Доказать, что все корни *многочленов Лежандра*

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots) \qquad (6)$$

действительные, простые и лежат на интервале $(-1; 1)$.

△ Рассмотрим многочлен $Q_{2n}(x)=(x^2-1)^n$. Он имеет степень $2n$, и его корнями являются $x_1=-1$ и $x_2=1$, причем каждый корень имеет кратность n. Поэтому, если $n>1$, то производная Q'_{2n} также имеет x_1 и x_2 своими корнями, но уже кратности $n-1$. По теореме Ролля, у производной $Q'_{2n}(x)$ существует еще по крайней мере один корень x_3, лежащий между x_1 и x_2. Поскольку сумма кратностей всех корней многочлена равна его степени, а степень многочлена $Q'_{2n}(x)$ равна $2n-1$, то кратность корня x_3 равна 1 и других корней, кроме x_1, x_2 и x_3, у многочлена $Q'_{2n}(x)$ нет. Продолжая этот процесс, по индукции получим, что производная $Q_{2n}^{(n-1)}(x)$ имеет $n+1$ простых корней x_i $(i=1, 2, \ldots, n+1)$. Занумеруем их в порядке возрастания: $-1=x_1<x_2<\ \ldots\ <x_n<x_{n+1}=1$. По теореме Ролля, на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ лежит хотя бы один корень производной многочлена $Q_{2n}^{(n-1)}(x)$, т. е. корень многочлена Лежандра, ибо

$$\left[Q_{2n}^{(n-1)}(x)\right]'=Q_{2n}^{(n)}(x)=2^n n! P_n(x).$$

Таким образом, многочлен Лежандра имеет на интервале $(-1; 1)$ n различных корней, а так как его степень равна n, то все они простые и других корней, действительных или комплексных, у него нет. ▲

16.1. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $x(x^2-1)$ на отрезках $[-1; 1]$ и $[0; 1]$.

16.2. На интервалах $(-1; 1)$ и $(1; 2)$ найти точки, в которых касательная к графику функции $f(x)=(x^2-1)(x-2)$ горизонтальна.

16.3. На интервале $(0; 1)$ найти такую точку ξ, что касательная к графику функции $y=x^3$ в точке $(\xi; \xi^3)$ будет параллельна хорде графика, соединяющей точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$.

16.4. Доказать, что между двумя действительными корнями многочлена с действительными коэффициентами имеется корень его производной.

16.5. Доказать, что если функция f дифференцируема n раз на отрезке $[a; b]$ и обращается на нем в нуль в $n+1$ точках, то существует такое $\xi\in(a; b)$, что $f^{(n)}(\xi)=0$.

16.6. Доказать, что если функция f дифференцируема n раз на отрезке $[a; b]$, $a=x_1<x_2<\ \ldots\ <x_k=b$, $x_i\in[a; b]$, n_i — натуральные числа, $n_1+\ \ldots\ +n_k=n-1$ и $f^{(j_i)}(x_i)=0$, $j_i=0, 1, \ldots, n_i-1$, $i=1, 2, \ldots, k$, то на отрезке $[a; b]$ существует такая точка ξ, что $f^{(n)}(\xi)=0$.

16.7. Доказать, что корни производной многочлена

$$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

действительные, простые и лежат на интервалах $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; 4)$.

16.8. Доказать, что все корни уравнения

$$(1+x^2)^n\frac{d^n(1+x^2)^{-1}}{dx^n}=0$$

действительные.

16.9. Доказать, что все корни уравнения

$$x^{2n}e^{-1/x}\frac{d^n e^{-1/x}}{dx^n}=0$$

действительные.

16.10. Доказать, что все производные от многочлена с действительными коэффициентами, имеющего только действительные корни, также могут иметь только действительные корни.

16.11. Доказать, что корни всех производных (порядка $m<2n$) многочленов Лежандра

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)}{dx^n}$$

действительные, простые и лежат в интервале $(-1; 1)$.

16.12. Доказать, что у *многочленов Лагерра*

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n x^n e^{-x}}{dx^n}$$

все корни положительны.

16.13. Доказать, что у *многочленов Чебышёва — Эрмита*

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

все корни действительны и лежат в интервале

$$\left(-\sqrt{2n+1};\quad \sqrt{2n+1}\right).$$

16.14. Применив теорему Лагранжа к функции $1/x^\alpha$, доказать, что при любом $n\in\mathbb{N}$ и любом $\alpha>0$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}}<\frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{(n-1)^\alpha}-\frac{1}{n^\alpha}\right].$$

16.15. Пользуясь теоремой Лагранжа, доказать неравенства:

1) $n(b-a)a^{n-1}<b^n-a^n<n(b-a)b^{n-1}$ при $0<a<b$, $n\in\mathbb{N}$.

2) $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ при $x>0$.

3) $e^x>1+x$ при $x\in\mathbb{R}$. 4) $e^x>ex$ при $x>1$.

5) $x^\alpha|\ln x|<\dfrac{1}{\alpha e}$ при $0<x<1$, $\alpha>0$.

16.16. Доказать, что при $x \geqslant 0$ справедливо равенство

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

где $1/4 \leqslant \theta(x) < 1/2$, причем $\lim\limits_{x\to+0}\theta(x)=1/4$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=1/2$.

16.17. Доказать: если функция f дифференцируема n раз при $x \geqslant 0$, $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$, а $f^{(n)}(x)>0$ при $x>0$, то и $f(x)>0$ при $x>0$.

16.18. Доказать: если функции f и g дифференцируемы n раз при $x \geqslant 0$ и $f(0)=g(0)$, $f'(0)=g'(0)$, ..., $f^{(n-1)}(0)=g^{(n-1)}(0)$, $f^{(n)}(x)>g^{(n)}(x)$ при $x>0$, то и $f(x)>g(x)$ при $x>0$.

16.19. Доказать, что если функция f дифференцируема и неограничена на конечном интервале $(a; b)$, то ее производная также неограничена на этом интервале.

16.20. Доказать, что если функция f дифференцируема на конечном или бесконечном интервале $(a; b)$ и существуют равные конечные или одного и того же знака бесконечные пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$, то существует такая точка $\xi\in(a; b)$, что $f'(\xi)=0$.

16.21. Пусть $f(x)-f(0)=xf'(\xi(x))$, $0<\xi(x)<x$. Доказать, что если $f(x)=x\sin(\ln x)$ при $x>0$ и $f(0)=0$, то функция $\xi(x)$ разрывна в сколь угодно малом интервале $(0; \varepsilon)$, $\varepsilon>0$.

16.22. Доказать, что если функция f дифференцируема при $x>a$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

16.23. Доказать, что если функция f дифференцируема при $x>a$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, то $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=0$.

16.24. Доказать, что если функция f дифференцируема на отрезке $[a; b]$, $ab>0$, то

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

где $a<\xi<b$.

16.25. Доказать, что если функция f удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[a; b]$ и не является постоянной, то на этом отрезке существуют такие точки ξ_1 и ξ_2, что

$$f'(\xi_1)>0, \quad f'(\xi_2)<0.$$

16.26. Доказать, что если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и не является линейной, то существует такая точка $\xi\in(a; b)$, что

$$|f'(\xi)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

16.27. Доказать, что если функция f дважды дифференцируема на отрезке $[a; b]$ и $f'(a)=f'(b)=0$, то существует такая точка $\xi\in(a; b)$, что

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

16.28. Пусть функция f непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в проколотой окрестности этой точки. Доказать, что если существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x)$, причем они не равны между собой, то функция f недифференцируема в точке x_0.

16.29. Доказать, что если функция f дифференцируема в некоторой проколотой окрестности точки x_0, непрерывна в самой этой точке и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$, то существует и производная $f'(x_0)$, причем $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ (иначе говоря, доказать следствие 3 теоремы Лагранжа).

16.30. Доказать, что если функция f дифференцируема на отрезке $[1; 2]$, то существует такая точка $\xi\in(1; 2)$, что $f(2)-f(1)=\frac{\xi^2}{2}f'(\xi)$.

16.31. Доказать, что если функция f дифференцируема на отрезке $[a; b]$, причем $f(a)=f(b)$, то существует такая точка $\xi\in(a; b)$, что $f(a)-f(\xi)=\frac{1}{2}\xi f'(\xi)$.

16.32. Пусть функция f непрерывно дифференцируема на интервале $(a; b)$ и ее производная монотонна на этом интервале. Доказать, что если $f(x_0)=0$, $x_0\in(a; b)$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{f'(x)}=0$.

16.33. Выяснить, будет ли всегда существовать такая точка $\xi\in(a; b)$, что $f'(\xi)=0$, если функция f удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, кроме одного из следующих: а) функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$; б) функция f имеет во всех точках интервала $(a; b)$ конечную или определенного знака бесконечную производную; в) $f(a)=f(b)$.

16.34. Являются ли условия теоремы Ролля необходимыми и достаточными для того, чтобы существовала такая точка $\xi\in(a; b)$, что $f'(\xi)=0$?

16.35. Справедлива ли формула конечных приращений Лагранжа на отрезке $[-1; 1]$ для функции

$$f(x)=\begin{cases} x\sin(1/x), & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0?\end{cases}$$

16.36. Пусть функция f непрерывно дифференцируема на интервале $(a; b)$. Верно ли, что для любого $\xi\in(a; b)$ существуют такие точки $x_1\in(a; b)$ и $x_2\in(a; b)$, что

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}?$$

§ 17. Правило Лопиталя

Теорема (правило Лопиталя раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

а) дифференцируемы в окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, причем $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности;

б) функции $f(x)$ и $g(x)$ являются одновременно либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при $x \to a$;

в) существует конечный

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогда существует

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (1)$$

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке a, $f(a) = g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \qquad (2)$$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1}$.

△ Применяя формулу (2), получаем

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{5x^4}{6x^2 - 1} = 1. \ ▲$$

Теорема остается в силе при $a = +\infty$, $a = -\infty$, а также в случае одностороннего предела ($x \to a + 0$, $x \to a - 0$) при выполнении условий а)—в) соответственно на интервалах $(\delta; +\infty)$, $(-\infty; -\delta)$, $(a; a + \delta)$, $(a - \delta; a)$, $\delta > 0$.

Если выполнены условия а), б), а $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ равен $+\infty$ или $-\infty$, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ также равен соответственно $+\infty$ или $-\infty$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

△ Раскрывая неопределенность вида $\frac{0}{0}$ по правилу Лопиталя, получаем

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{1 + x^2}}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{3x^2(1 + x^2)} = \frac{1}{3}. \ ▲$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

△ Раскрывая неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ по правилу Лопиталя, получаем

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0. \ ▲$$

Применяя правило Лопиталя, часто бывает выгодно предварительно использовать асимптотические равенства вида

$$\sin \alpha \sim \operatorname{tg} \alpha \sim e^{\alpha} - 1 \sim \ln(1 + \alpha) \sim \operatorname{sh} \alpha \sim$$
$$\sim \operatorname{tg} \alpha \sim \operatorname{arctg} \alpha \sim \arcsin \alpha \sim \alpha, \qquad (3)$$

где $\alpha = \alpha(x) \to 0$ при $x \to a$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$.

△ Замечая, что $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, по правилу Лопиталя находим

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} =$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3}. \ ▲$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x \ln(1 + x)}{\operatorname{tg} x - x}$.

△ Замечая, что $\ln(1 + x) \sim x$, $\operatorname{sh} x \sim x$ при $x \to 0$ и применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x \ln(1 + x)}{\operatorname{tg} x - x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\operatorname{tg} x - x} =$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{\sin^2 x} \cos^2 x = 3. \ ▲$$

Иногда при вычислении пределов правило Лопиталя приходится применять несколько раз.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{10} - 10x + 9}{x^5 - 5x + 4}$.

△ Применяя правило Лопиталя, снова получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{10} - 10x + 9}{x^5 - 5x + 4} = \lim_{x \to 1} \frac{10x^9 - 10}{5x^4 - 5}.$$

Пользуясь еще раз правилом Лопиталя, находим

$$\lim_{x \to 1} \frac{10x^9 - 10}{5x^4 - 5} = 2 \lim_{x \to 1} \frac{x^9 - 1}{x^4 - 1} = 2 \lim_{x \to 1} \frac{9x^8}{4x^3} = \frac{9}{2}.$$

Следовательно, искомый предел равен 9/2. ▲

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^{\beta x}}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

△ Пусть $k=[\alpha]+1$; тогда $\alpha-k<0$. Применяя правило Лопиталя k раз, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta e^{\beta x}}=\ldots$$

$$\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}}{\beta^k e^{\beta x}}=0. \ ▲$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^\beta}$, где $\alpha>0$, $\beta>0$.

△ Пусть $\ln x=t$; тогда $x=e^t$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^\beta}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^\alpha}{e^{\beta t}}=0$ (пример 7). ▲

Неопределенности вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ часто удается свести к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ с помощью алгебраических преобразований, а затем применить привило Лопиталя.

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x$.

△ Преобразуя неопределенность вида $0\cdot\infty$ к виду $\frac{\infty}{\infty}$ и применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to+0}x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to+0}(-x)=0. \ ▲$$

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^{50}}e^{-1/x^2}$.

△ Полагая $1/x^2=t$, получаем

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^{50}}e^{-1/x^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{25}}{e^t}=0. \ ▲$$

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x\right)$.

△ Преобразуя неопределенность вида $\infty-\infty$ к виду $\frac{0}{0}$ и используя асимптотическую формулу $\sin x\sim x$ при $x\to0$, получаем

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x+x\cos x)(\sin x-x\cos x)}{x^2\sin^2x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\cos x=2$, а $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\frac{1}{3}$ (пример 4), то искомый предел равен $2/3$. ▲

При вычислении пределов функций вида $\varphi(x)=(f(x))^{g(x)}$ часто приходится раскрывать неопределенности вида 0^0, ∞^0, 1^∞. Представляя функцию $\varphi(x)$ в виде $\varphi(x)=e^{g(x)\ln f(x)}$, можно свести вычисление предела функции $g(x)\ln f(x)$ к раскрытию неопределенности вида $0\cdot\infty$.

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to+0}x^x$.

△ Так как $x^x=e^{x\ln x}$, а $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=0$ (пример 9), то $\lim\limits_{x\to+0}x^x=e^0=1$. ▲

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

△ Так как $(\sin x)^{\operatorname{tg}x}=e^{\operatorname{tg}x\ln\sin x}=e^{(\ln\sin x)/\operatorname{ctg}x}$, то, применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{ctg}x}{-1/\sin^2x}=\lim_{x\to\pi/2}(-\cos x\cdot\sin x)=0,$$

а, следовательно, $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}=e^0=1$. ▲

Пример 14. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{1/\ln x}$.

△ По правилу Лопиталя находим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{1/x}=1,$$

и поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{1/\ln x}=e$. ▲

Найти пределы функций (17.1—17.75):

17.1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2+4x-7}{2x^2+3x-5}$. **17.2.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}$.

17.3. $\lim\limits_{x\to3}\frac{\ln(x^2-8)}{2x^2-5x-3}$. **17.4.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{ch}2x-1}{x^2}$.

17.5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax-\sin bx}{\operatorname{sh}ax-\operatorname{sh}bx}$, $a\neq b$.

17.6. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}$, $\beta\neq0$. **17.7.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos ax}{x^2}$.

17.8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^a-a^x}{a^x-a^a}$, $a>0$, $a\neq1$.

17.9. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^a-a^x}{x^a-a^a}$. **17.10.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{\operatorname{tg}^2x}$.

17.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)}{\ln(1+x)}$. **17.12.** $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x}$.

17.13. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{4\sin^2 x-6\sin x+1}{3\sin^2 x+5\sin x-4}$. **17.14.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-3x^2+7x-5}{x^4-5x+4}$.

17.15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{\ln x}$. **17.16.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x^3-x}-2x}{\sqrt[5]{x^2}-1}$.

17.17. $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}}$. **17.18.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+7x-5}{x^3+2x^2-9x+6}$.

17.19. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\sqrt[5]{3\operatorname{tg}^2 x}-1}{2\sin^2 x+5\sin x-3}$.

17.20. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos(2m+1)x}{\cos(2n+1)x}$, $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$.

17.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin x^2}{x\cos x-\sin x}$. **17.22.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\operatorname{tg} x-x}$.

17.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)\ln(1+x)-x}{e^x-x-1}$. **17.24.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{1+x}{1-x}-2x}{x-\sin x}$.

17.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$, $a>0$. **17.26.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\operatorname{tg} 3x-6\operatorname{tg} x}{3\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} 3x}$.

17.27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{20}-2x+1}{x^{30}-2x+1}$. **17.28.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{\ln^3(1+x)}$.

17.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2x}{x^2\arcsin x}$. **17.30.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{\arcsin x-\ln(1+x)}$.

17.31. $\lim\limits_{x\to 1}\,[(x^{10}-10x+9)/(x-1)^2]$.

17.32. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{50}-50x+49}{x^{100}-100x+99}$. **17.33.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^4+3x^3-4x^2-9x-4}{3x^4+5x^3+3x^2+3x+2}$.

17.34. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha x^{\alpha+2}-(\alpha+1)x^{\alpha+1}+x}{(x-1)^2}$.

17.35. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha(1-x^\beta)-\beta(1-x^\alpha)}{(1-x^\alpha)(1-x^\beta)}$, $\alpha\beta\neq 0$.

17.36. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-x+1}{x-x^x}$. **17.37.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}$.

17.38. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+x^3-3x^2-5x-2}{x^4+2x^3-2x-1}$.

17.39. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$. **17.40.** $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg} x}$.

17.41. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\dfrac{\ln(x-\pi/2)}{\operatorname{tg} x}$. **17.42.** $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln\operatorname{tg} x}$.

17.43. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{3+\ln x}{2-3\ln\sin x}$. **17.44.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^\alpha\ln^\beta x}{e^{\gamma x}}$.

17.45. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}\ln\ln x}{\sqrt[3]{2x+3}\sqrt{\ln x}}$. **17.46.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^{\alpha\ln^\beta x}}$.

17.47. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\ln\operatorname{ctg} x$. **17.48.** $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)$.

17.49. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n e^{-x^2}$. **17.50.** $\lim\limits_{x\to +\infty}(\pi-2\operatorname{arctg}\sqrt{x})\sqrt{x}$.

17.51. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\pi-2\arcsin\left(x/\sqrt{x^2+1}\right)\right)$.

17.52. $\lim\limits_{x\to +0} x^\alpha\ln^\beta(1/x)$, $\alpha>0$, $\beta>0$.

17.53. $\lim\limits_{x\to +0}(x^x-1)\ln x$. **17.54.** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha a^x$, $a>0$, $a\neq 1$.

17.55. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$. **17.56.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\arcsin x}\right)$.

17.57. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$. **17.58.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

17.59. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$. **17.60.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^{7/8}-x^{6/7}\ln^2 x\right)$.

17.61. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\alpha}{1-x^\alpha}-\dfrac{\beta}{1-x^\beta}\right)$, $\alpha\beta\neq 0$.

17.62. $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$. **17.63.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$.

17.64. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$. **17.65.** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

17.66. $\lim\limits_{x\to +0}(1+x)^{\ln x}$. **17.67.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x}$.

17.68. $\lim\limits_{x\to +0}(\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$. **17.69.** $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{1}{\ln \operatorname{sh} x}}$.

17.70. $\lim\limits_{x\to\pi/2-0}(\pi-2x)^{\cos x}$. **17.71.** $\lim\limits_{x\to +0} x^{x^x-1}$.

17.72. $\lim\limits_{x\to\pi/2-0}(\operatorname{tg} x)^{\cos x}$. **17.73.** $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x^2+3^x)^{1/x}$.

17.74. $\lim\limits_{x\to +0}|\ln x|^{2x}$. **17.75.** $\lim\limits_{x\to +0}(1/x)^{\sin x}$.

17.76. Показать, что следующие пределы не могут быть вычислены по правилу Лопиталя, и найти эти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\sin(1/x)}{\sin^2 x}$. 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x-\cos x}$.

17.77. Выяснить, можно ли применить правило Лопиталя для вычисления предела

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+2x+\sin 2x}{(2x+\sin 2x)\, e^{\sin x}}.$$

Найти этот предел, если он существует.

17.78. Найти

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2},$$

предполагая, что существует $f''(a)$.

17.79. Найти

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+3h)-3f(a+2h)+3f(a+h)-f(a)}{h^3},$$

предполагая, что существует $f'''(a)$.

17.80. Показать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

бесконечно дифференцируема на всей числовой прямой, и найти $f^{(k)}(0)$, $k\in\mathbb{N}$.

17.81. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln x\cdot\ln(1-x)$. 2) $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln x\cdot\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos 3x+x^3\cos(\pi/x)}{x^2}$.

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left[\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - x^{-\frac{1}{x(x+a)}}\right]$.

§ 18. Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0, имеет в этой окрестности производные до $(n-1)$-го порядка включительно, и пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \quad \text{при} \quad x\to x_0,$$

или, короче,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n), \quad x\to x_0. \tag{1}$$

Многочлен

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{2}$$

называется *многочленом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0*, а функция

$$r_n(x)=f(x)-P_n(x) \tag{3}$$

— *остаточным членом n-го порядка формулы Тейлора.*

Формула (1) называется *формулой Тейлора n-го порядка для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 с остаточным членом в форме Пеано*, ее называют также *локальной формулой Тейлора.*

Функция $f(x)$, имеющая в точке x_0 производные до n-го порядка включительно, единственным образом представляется в виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n), \qquad x\to x_0, \tag{4}$$

причем коэффициенты разложения (4) определяются формулами

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{5}$$

Если $x_0=0$, то формула (1) принимает вид

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n), \qquad x\to 0, \tag{6}$$

и называется *формулой Маклорена.*

Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки $x_0=0$ производные всех порядков (бесконечно дифференцируема). Тогда:

а) если f — четная функция, то при любом $n\in\mathbb{N}$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1}); \tag{7}$$

б) если f — нечетная функция, то при любом $n\in\mathbb{N}$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o(x^{2n+2}). \tag{8}$$

Формулы Тейлора в окрестности точки $x_0=0$ (формулы Маклорена) для основных элементарных функций имеют вид:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),$$

или

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n); \tag{9}$$

$$\operatorname{sh} x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}),$$

или

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}); \tag{10}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

или

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}); \tag{11}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

или

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}); \tag{12}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

или

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}); \tag{13}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n),$$

или

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n), \tag{14}$$

где $C_\alpha^0 = 1$, $C_\alpha^k = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}$, $k = 1, 2, \ldots$; в частности,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n), \tag{15}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n); \tag{16}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n),$$

или

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n), \tag{17}$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n). \tag{18}$$

Пример 1. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$ функцию

$$f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

△ Так как

$$f^{(k)}(x) = 2^k \sin\left(2x + \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)$$

и

$$f^{(k)}(0) = 2^k \sin\frac{\pi}{4}(2k+1),$$

то по формуле (6) получаем

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \sin\frac{\pi}{4}(2k+1) \cdot x^k + o(x^n). \ ▲$$

Если

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n),$$

то

$$f(bx) = \sum_{k=0}^{n} b^k a_k x^k + o(x^n).$$

Пример 2. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$ функцию $f(x)$, если:

1) $f(x) = e^{\frac{1}{2}x+2}$. 2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

3) $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$. 4) $f(x) = \ln(5-4x)$.

△ 1) Используя разложение (9) и равенство

$$e^{\frac{1}{2}x+2} = e^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x},$$

получаем

$$e^{\frac{1}{2}x+2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^2}{2^k k!} x^k + o(x^n).$$

2) Так как

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1 + (-1)x)^{-1/2},$$

то, применяя формулу (14) при $\alpha = -1/2$, находим

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_{-1/2}^k x^k + o(x^n),$$

где

$$C_{-1/2}^k = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}x^k+o(x^n). \qquad (19)$$

3) Используя равенство

$$\frac{1}{2x+3}=\frac{1}{3\left(1+\frac{2}{3}x\right)}$$

и разложение (15), получаем

$$\frac{1}{2x+3}=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{2}{3}\right)^k x^k+o(x^n),$$

т. е.

$$\frac{1}{2x+3}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^k}{3^{k+1}}x^k+o(x^n).$$

4) Из равенства

$$\ln(5-4x)=\ln 5+\ln\left(1-\frac{4}{5}x\right)$$

и формулы (18) следует, что

$$\ln(5-4x)=\ln 5-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{4}{5}\right)^k x^k+o(x^n). \ \blacktriangle$$

Если

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n), \qquad (20)$$

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n}b_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n), \qquad (21)$$

то

$$f(x)+g(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n), \qquad (22)$$

$$f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n), \qquad (23)$$

где $c_k=\sum_{p=0}^{k}a_p b_{k-p}$.

Пример 3. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$ функцию $f(x)$, если:

1) $f(x)=(x+5)e^{2x}$. 2) $f(x)=\ln\frac{3+x}{2-x}$.

3) $f(x)=e^x\ln(1+x)$, $n=4$.

△ 1) Используя равенство $f(x)=xe^{2x}+5e^{2x}$ и формулу (9), получаем

$$f(x)=x\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k x^k}{k!}+o(x^{n-1})\right)+5\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}x^k+o(x^n)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k x^{k+1}}{k!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{5\cdot 2^k}{k!}x^k+o(x^n).$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k x^{k+1}}{k!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}}{(k-1)!}x^k,$$

то

$$f(x)=5+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{5\cdot 2^k}{k!}\right)x^k+o(x^n)=$$

$$=5+\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}}{k!}(k+10)x^k+o(x^n)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k-1}}{k!}(k+10)x^k+o(x^n).$$

2) Из равенства

$$f(x)=\ln\frac{3}{2}+\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

и формул (17), (18) следует, что

$$f(x)=\ln\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^{k-1}}{3^k}\right)x^k+o(x^n).$$

3) Используя разложения (9) и (17), получаем

$$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)=$$

$$=x+\left(-\frac{1}{2}+1\right)x^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)x^3+$$

$$+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)x^4+o(x^4)=$$

$$=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^4). \ \blacktriangle$$

Пример 4. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$ функцию $f(x)=\cos x+|x|^3$. Какие значения может принимать n?

△ Пусть $g(x)=|x|^3$; тогда $g(0)=g'(0)=g''(0)=0$, а $g'''(0)$ не существует (§ 15, пример 9). Поэтому разложения $g(x)$ по формуле Маклорена до $o(x^n)$ при $n=1$ и $n=2$ имеют вид соответственно

$$g(x)=o(x) \quad \text{и} \quad g(x)=o(x^2),$$

а разложение функции $g(x)$ по формуле Маклорена до $o(x^3)$ не существует. Используя разложение функции $\cos x$ по формуле Маклорена до $o(x^n)$ при $n=1$ и $n=2$ (формула (13)), получаем разложение $f(x)$ при $n=1$ и $n=2$:

$$f(x)=1+o(x),$$
$$f(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

Разложение по формуле Маклорена функции $f(x)$ до $o(x^3)$ не существует. ▲

При разложении по формуле Тейлора рациональной дроби эту дробь обычно представляют в виде суммы многочлена и элементарных дробей.

Пример 5. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$ рациональную дробь

$$f(x)=\frac{x^2+5}{x^2+x-12}.$$

△ Так как $f(x)$ не является правильной дробью, то, разделив числитель на знаменатель, представим $f(x)$ в виде

$$f(x)=1+\frac{17-x}{(x+4)(x-3)}=1-\frac{3}{x+4}+\frac{2}{x-3}.$$

Преобразуем $f(x)$ так, чтобы можно было использовать разложения (15) и (16):

$$f(x)=1-\frac{3}{4\left(1+\frac{x}{4}\right)}-\frac{2}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)}.$$

Отсюда получаем

$$f(x)=1-\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{4^k}-\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{3^k}+o(x^n),$$

или

$$f(x)=-\frac{5}{12}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3(-1)^{k+1}}{4^{k+1}}-\frac{2}{3^{k+1}}\right)x^k+o(x^n). \ ▲$$

Пример 6. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^{2n+1})$ функцию

$$f(x)=\frac{1}{x^4-3x^2-4}.$$

△ Представим $f(x)$ в следующем виде:

$$f(x)=\frac{1}{(x^2-4)(x^2+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x^2+1}\right).$$

Заметим, что нет необходимости заменять дробь $\frac{1}{x^2-4}$ суммой элементарных дробей вида $\frac{A}{x-2}$ и $\frac{B}{x+2}$. Записав эту дробь в виде $-\frac{1}{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}$ и используя разложения (15), (16), получаем

$$f(x)=\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}-\frac{1}{1+x^2}\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^{k+1}-\frac{1}{4^{k+1}}\right)\frac{x^{2k}}{5}+o(x^{2n+1}). \ ▲$$

При разложении по формуле Маклорена произведения тригонометрических функций часто бывает полезным представить это произведение в виде суммы тригонометрических функций.

Пример 7. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^{2n+1})$ функцию $f(x)$, если:

1) $f(x)=\sin^2 x\cos^2 x$. 2) $f(x)=\cos^3 x$.

△ 1) Так как $\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{4}\sin^2 2x=\frac{1}{8}(1-\cos 4x)$,

то, применяя формулу (13), получаем

$$\sin^2 x\cos^2 x=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}2^{4k-3}}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1}).$$

2) Используя равенство $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$, получаем

$$\cos^3 x=\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x=\sum_{k=0}^{n}\frac{3(-1)^k}{4(2k)!}\left(3^{2k-1}+1\right)x^{2k}+o\left(x^{2n+1}\right). \ ▲$$

Если функция $f(x)$ представляется в виде $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ и если известны разложения функций g и h по формуле Тейлора в окрестности точки $x=x_0$ до $o((x-x_0)^n)$, т. е. известны разложения

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n}b_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),$$
$$h(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),$$

причем $c_0=h(x_0)\neq 0$, то для нахождения разложения по формуле Тейлора функции f можно применить *метод неопределенных коэффициентов*, который состоит в следующем.

Пусть
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$
— искомое разложение. Приравнивая коэффициенты при $(x-x_0)^k$, где $k=0, 1, \ldots, n$, в левой и правой частях равенства
$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)\right)\left(\sum_{k=0}^{n} c_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} b_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n),$$
получаем систему уравнений, из которой можно найти коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Пример 8. Применяя метод неопределенных коэффициентов, разложить по формуле Маклорена до $o(x^5)$ функцию $\operatorname{tg} x$.

△ Так как $\operatorname{tg} x$ — нечетная функция и $\operatorname{tg} x = x + o(x)$, то
$$\operatorname{tg} x = x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^6).$$
Используя формулу $\sin x = \operatorname{tg} x \cos x$ и разложения (12) и (13), получаем
$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) =$$
$$= (x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^6))\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right).$$
Приравнивая коэффициенты при x^3 и x^5, находим
$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + a_3, \qquad \frac{1}{5!} = \frac{1}{4!} - \frac{a_3}{2!} + a_5.$$
Из этой системы получаем $a_3 = 1/3$, $a_5 = 2/15$. Следовательно,
$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6). \tag{24}$$
Заметим, что разложение (24) можно получить и по общей формуле (6). ▲

Пусть $F(x) = f(\varphi(x))$ — сложная функция, и пусть известны разложения функций φ и f, т. е.
$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \tag{25}$$
$$f(w) = \sum_{k=0}^{n} a_k (w-w_0)^k + o((w-w_0)^n), \tag{26}$$
где $w_0 = \varphi(x_0)$. Тогда для нахождения коэффициентов b_k $(k=0, 1, \ldots, n)$ разложения
$$F(x) = f(\varphi(x)) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

нужно в формулу (26) подставить $w = \varphi(x)$, заменить функцию $\varphi(x)$ ее разложением (25), произвести соответствующие арифметические действия, сохраняя при этом только члены вида $b_k(x-x_0)^k$, где $k = 0, 1, \ldots, n$. В частности, если
$$\varphi(x) = Ax^m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad f(w) = \sum_{k=0}^{n} a_k w^k + o(w^n),$$
то
$$f(\varphi(x)) = f(Ax^m) = \sum_{k=0}^{n} A^k a_k x^{mk} + o(x^{mn}).$$
Например, из (15) и (19) следует, что
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1}), \tag{27}$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^{2k} + o(x^{2n+1}). \tag{28}$$

Пример 9. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^3)$ функцию $e^{x\cos x}$.

△ Искомое разложение должно иметь вид
$$e^{x\cos x} = \sum_{k=0}^{3} a_k x^k + o(x^3).$$
Так как $x\cos x = x + o(x)$, $(x\cos x)^k = x^k + o(x^k)$ при $k = 1, 2, \ldots$, то в формуле
$$e^w = \sum_{k=0}^{n} \frac{w^k}{k!} + o(w^n),$$
где $w = x\cos x$, нужно взять $n = 3$. При этом функции w^k $(k = 1, 2, 3)$ следует разложить по формуле Маклорена до $o(x^3)$. Используя разложение (13), получаем
$$w = x\cos x = x - \frac{x^3}{2!} + o(x^4), \quad w^2 = x^2 + o(x^3), \quad w^3 = x^3 + o(x^3).$$
Следовательно,
$$e^{x\cos x} = \sum_{k=0}^{3} \frac{w^k}{k!} + o(w^3) = 1 + x - \frac{x^3}{2!} + o(x^4) + \frac{1}{2!}(x^2 + o(x^3)) +$$
$$+ \frac{1}{3!}(x^3 + o(x^3)) + o(x^3) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3). \ ▲$$

Пример 10. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^6)$ функцию
$$f(x) = \frac{x^2}{1+\sin x}.$$

△ Искомое разложение должно иметь вид

$$f(x)=\sum_{k=0}^{6} a_k x^k + o(x^6).$$

Поэтому функцию $\frac{1}{1+\sin x}$ следует разложить по формуле Маклорена до $o(x^4)$. Так как $\sin x = x + o(x)$, то в формуле

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k z^k + o(z^n),$$

где $z=\sin x$, нужно взять $n=4$.

Применяя формулу (12), получаем

$$z=\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4),\quad z^2=x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4),$$
$$z^3=x^3+o(x^4),\quad z^4=x^4+o(x^4).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{1+\sin x}=1-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)+\left(x^2-\frac{1}{3}x^4\right)-x^3+x^4+o(x^4)=$$
$$=1-x+x^2-\frac{5}{6}x^3+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)$$

и

$$f(x)=x^2-x^3+x^4-\frac{5}{6}x^5+\frac{2}{3}x^6+o(x^6). \blacktriangle$$

Пусть известно разложение по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 до $o((x-x_0)^n)$ производной функции f, т. е. известно разложение

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n),\quad \text{где } b_k=\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}.$$

Тогда существует $f^{(n+1)}(x_0)$, и поэтому функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n+1} a_k (x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^{n+1}\right)=$$
$$=f(x_0)+\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}+o\left((x-x_0)^{n+1}\right),$$

где

$$a_{k+1}=\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}=\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}\cdot\frac{1}{k+1}=\frac{b_k}{k+1}.$$

Следовательно,

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}+o\left((x-x_0)^{n+1}\right), \qquad (29)$$

где b_k — коэффициенты ряда Тейлора функции $f'(x)$.

Пример 11. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^{2n+1})$ функции: 1) $\operatorname{arctg} x$; 2) $\arcsin x$.

△ 1) Так как

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}+o(x^{2n+1})$$

(формула (27)), то по формуле (29) получаем

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2n+2}). \qquad (30)$$

Полагая в равенстве (30) $n=2$, находим

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^6). \qquad (31)$$

2) Используя разложение (28), получаем

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}x^{2k}+o(x^{2n+1}),$$

откуда по формуле (29) находим

$$\arcsin x = x+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!\,(2k+1)}x^{2k+1}+o(x^{2n+2}). \qquad (32)$$

Из формулы (32) при $n=2$ получаем

$$\arcsin x = x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o(x^6). \blacktriangle \qquad (33)$$

Разложение функции $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 заменой $x-x_0=t$ обычно сводят к разложению функции $g(t)=f(x_0+t)$ по формуле Маклорена.

Пример 12. Разложить функцию

$$f(x)=\frac{3x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}}$$

по формуле Тейлора в окрестности точки $x=-1$ до $o((x+1)^{2n})$.

△ Пусть $x+1=t$; тогда

$$f(x)=\frac{3(x+1)}{\sqrt{4-(x+1)^2}}=\frac{3t}{\sqrt{4-t^2}}=\frac{3}{2}t\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{-1/2}=g(t).$$

Для получения разложения функции $f(x)$ нужно разложить функцию $g(t)$ по формуле Маклорена до $o(t^{2n})$.

Применяя формулу (14), находим

$$g(t)=\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}t\sum_{k=1}^{n-1}C_{-1/2}^{k}(-1)^k\frac{t^{2k}}{4^k}+o(t^{2n}),$$

4) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2-x^2}}$. 5) $\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}$.

6) $\ln\sqrt[3]{\dfrac{2+x^2}{x^4-3x^2+2}}$. 7) $\dfrac{1}{1-x+x^2-x^3}$.

18.10. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^{3n})$ функции:

1) $\dfrac{1}{2x^6-10x^3+12}$. 2) $\dfrac{5x^6-11}{x^6-x^3-2}$. 3) $\dfrac{1}{1+x+x^2}$.

18.11. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^{3n+1})$ функции:

1) $\dfrac{x}{(1+x^3)^2}$. 2) $\ln\sqrt{\dfrac{e-x^3}{1-ex^3}}$. 3) $\dfrac{5x^3+28}{14+5x^3-x^6}$.

Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 до $o((x-x_0)^n)$ функции (18.12—18.16):

18.12. 1) $1/x$, $x_0=2$. 2) $\sqrt{x}$, $x_0=1$.
3) $\sin(2x-3)$, $x_0=1$. 4) xe^{2x}, $x_0=-1$.
5) x^2e^{-2x}, $x_0=-1$. 6) $(x^2-1)e^{2x}$, $x_0=-1$.
7) $\sin(x+1)\sin(x+2)$, $x_0=-1$.

18.13. 1) $\ln(2x+1)$, $x_0=1/2$. 2) $\log_3\sqrt[3]{3x-\dfrac{1}{3}}$, $x_0=3$.
3) $\ln(2+x-x^2)$, $x_0=1$. 4) $\ln(x^2-7x+12)$, $x_0=1$.

18.14. 1) $\ln\sqrt[3]{7x-2}$, $x_0=1$.
2) $\ln\sqrt[4]{\dfrac{x-2}{5-x}}$, $x_0=3$. 3) $x\ln(2-3x+x^2)$, $x_0=-2$.
4) $\ln\dfrac{(x-1)^{x-2}}{3-x}$, $x_0=2$. 5) $\dfrac{2x+1}{x-1}\ln x$, $x_0=1$.
6) $\ln(5+14x+14x^2+6x^3+x^4)$, $x_0=-2$.

18.15. 1) $\dfrac{2x-1}{x-1}$, $x_0=2$. 2) $\dfrac{(x-2)^2}{3-x}$, $x_0=2$.
3) $\dfrac{x}{4+x}$, $x_0=10$. 4) $\dfrac{x+5}{2x-4}$, $x_0=-\dfrac{1}{10}$. 5) $\dfrac{x^2+3x}{x+1}$, $x_0=1$.
6) $\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$, $x_0=3$. 7) $\dfrac{x+7}{x(2x+7)}$, $x_0=-2$.

18.16. 1) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+10x+25}$, $x_0=-2$. 2) $\dfrac{x^2-4x+5}{x^2-5x+6}$, $x_0=1$.
3) $\dfrac{x^2-5x+7}{x^2-9x+20}$, $x_0=3$. 4) $\dfrac{2x}{1-x^2}$, $x_0=2$.
5) $\dfrac{x^3-5x^2+4x+5}{x^2-5x+6}$, $x_0=1$. 6) $x\left(\dfrac{1}{(x-1)^3}-1\right)$, $x_0=2$.

Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 до $o((x-x_0)^{2n})$ функции (18.17—18.19):

18.17. 1) e^{x^2+2x-1}, $x_0=-1$.
2) $(x+3)e^{3x^2+18x}$, $x_0=-3$.
3) $(x+2)\ln(2x^2+8x+11)$, $x_0=-2$.
4) $(x-5)\ln(26-10x+x^2)$, $x_0=5$.

18.18. 1) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$, $x_0=1$. 2) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x_0=-1$.
3) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}}$, $x_0=2$. 4) $\dfrac{x^2-2x+1}{\sqrt[3]{x(2-x)}}$, $x_0=1$.
5) $\dfrac{(x+1)^3}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x_0=-1$.

18.19. 1) $\dfrac{x-1}{x^2-2x+5}$, $x_0=1$. 2) $\dfrac{x-1}{3x^2-6x+5}$, $x_0=1$.
3) $\dfrac{x-3}{x^2-4x+8}$, $x_0=2$.

Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 до $o((x-x_0)^{2n+1})$ функции (18.20—18.23):

18.20. 1) e^{2x^2+8x+3}, $x_0=-2$. 2) e^{2x^2-12x}, $x_0=3$.
3) 2^{x-x^2}, $x_0=1/2$. 4) $(x+3)e^{2x^2+8x+5}$, $x_0=-2$.
5) $(x+1)^2 2^{x^2+2x}$, $x_0=-1$.
6) $x(x-2)2^{x^2-2x-1}$, $x_0=1$.
7) $(3x^2-6x+4)e^{2x^2-4x+5}$, $x_0=1$.

18.21. 1) $\sin^2(x-1)\cos(x-1)$, $x_0=1$.
2) $\sin\dfrac{9}{2}x\cos\dfrac{3}{2}x$, $x_0=\dfrac{\pi}{6}$.
3) $\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)(\sin x+\cos x)$, $x_0=-\dfrac{\pi}{4}$.
4) $(x^2-\pi x)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.
5) $\dfrac{x^2+x}{2x+1}\cos\pi x$, $x_0=-\dfrac{1}{2}$.

18.22. 1) $\log_2(3x^2-24x+50)$, $x_0=4$.
2) $(x+2)\ln(2-x^2-2x)$, $x_0=-1$.
3) $\log_5\sqrt[3]{\dfrac{2x-1}{3-2x}}$, $x_0=1$.
4) $(x^2+4x+2)\ln(-2x^2-8x-5)$, $x_0=-2$.

18.23. 1) $\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x^2-4x+5}}$, $x_0=2$.
2) $\dfrac{x-1}{\sqrt{1+4x-x^2}}$, $x_0=2$. 3) $\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$, $x_0=1$.
4) $\dfrac{1-4x+4x^2}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$, $x_0=\dfrac{1}{2}$. 5) $\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}$, $x_0=\dfrac{3}{2}$.
6) $\dfrac{2x^2-8x+5}{x^2-4x+3}$, $x_0=2$.
7) $\dfrac{(x+1)^2}{(2x^2+4x+1)(x^2+2x+3)}$, $x_0=-1$.

18.24. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0=1$ до $o((x-x_0)^{3n})$ функцию $2^{x^3-3x^2+3x}$.

18.25. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0=2$ до $o((x-2)^{2n+2})$ функцию

$$\sqrt{x/(4-x)}-\sqrt{(4-x)/x}.$$

18.26. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0=2$ до $o((x-2)^{3n+1})$ функцию

$$(x-2)/\sqrt[3]{(x-4)(x^2-2x+4)}.$$

18.27. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0=1$ до $o((x-1)^{4n+1})$ функцию

$$\frac{1-\sqrt{2x-x^2}}{1-\sqrt{x^2-2x+2}}.$$

18.28. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 до $o((x-x_0)^{4n})$ функции:

1) $\sin(x^2-2x+3)$, $x_0=1$. 2) $\cos(x^2-4x+3)$, $x_0=2$.
3) $\sin(3x^2+6x+4)$, $x_0=-1$.

18.29. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 до $o((x-x_0)^{4n+3})$ функции:

1) $\cos\left(\frac{8}{\pi}x^2-4x+\pi\right)$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

2) $\sin\left(\frac{4}{\pi}x^2-2x+\frac{3}{4}\pi\right)$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

3) $x\sin(x^2+2\sqrt{\pi}\,x)$, $x_0=-\sqrt{\pi}$.

4) $x\sin(x^2+2x+2)\cos(x^2+2x)$, $x_0=-1$.

18.30. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$ функции: 1) $x^3|x|+\cos^2 x$. 2) $\sin|x|^3+e^x$. 3) $|x|^{2k+1}$, $k\in\mathbb{N}$. Число n выбрать наибольшим.

18.31. Найти $f^{(k)}(0)$, если:

1) $f(x)=e^{-x^2}$, $k=6$.
2) $f(x)=1/(1+x+x^2)$, $k=32$.
3) $f(x)=1/(1-x^4)$, $k=60$.

18.32. Пусть $P_n(x)$ — многочлен степени не выше n. Доказать, что

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

18.33. Представить функцию $f(x)$ в виде многочлена по степеням $x-x_0$, если:

1) $f(x)=x^3$, $x_0=1$.
2) $f(x)=x^4+8x^3+24x^2+32x+17$, $x_0=-2$.
3) $f(x)=1+x+x^2+x^3$, $x_0=-1$. 4) $f(x)=(x^3-8)^2$, $x_0=2$.

18.34. Пусть

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n).$$

Доказать, что

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{n}ka_k(x-x_0)^{k-1}+o((x-x_0)^{n-1}).$$

18.35. Пусть

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h),$$

где $0<\theta<1$, и пусть существует $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$. Доказать, что

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

18.36. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^2)$ функции:
1) $e^{\operatorname{tg} x}$. 2) $e^{\sqrt{1+2x}}$. 2) $\operatorname{ch}(\sin x)$. 4) $\cos(\operatorname{sh}(x/\sqrt{5}))$.
5) $(1-x+x^2)^3$. 6) $\ln\cos x$.

18.37. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^3)$ функции:

1) $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$. 2) $\sqrt{1+2x-x^2}-\sqrt[3]{1-3x+x^3}$.

3) $\sqrt[3]{1-3x\cos 2x}$. 4) $\operatorname{arctg}(\sin x)$. 5) $e^{\sin x}$.

6) $\ln^3\left(1-\frac{x}{2}\right)$. 7) $(1+x)^{1/x}$.

8) $\sqrt[3]{1+3\sin x}$. 9) $\ln(1+\arcsin x)$.

18.38. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^4)$ функции:

1) $e^{x/\sin x}$. 2) $\frac{1}{\sin x+\cos x}$. 3) $\operatorname{tg}(\operatorname{sh}3x)$.

4) $\sin(\operatorname{arctg}x)$. 5) $\frac{x}{e^x-1}$. 6) $\sqrt{\cos x}$.

7) $\frac{x}{\arcsin x}$. 8) $\frac{x}{\operatorname{arctg}x}$. 9) $e^{x\sin x}$.

18.39. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^5)$ функции:

1) $(1-2x+3x^2+4x^3)^3$. 2) $\ln(1+x+x^2+x^3)$.

3) $\frac{1}{\cos x}$. 4) $e^{x/\sqrt{1+x^2}}$. 5) $\ln\frac{\sin x}{x}$.

6) $\frac{1}{1-\ln^2(1+x)}$. 7) $(1+x)^{\sin x}$.

18.40. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 до $o((x-x_0)^n)$:

1) $f(x)=\operatorname{th}x$, $x_0=0$, $n=6$.

2) $f(x)=\frac{1-2x\sqrt{e}+ex^2}{\sqrt{-\ln(2x-x^2\sqrt{e})}}$, $x_0=\frac{1}{\sqrt{e}}$, $n=9$.

3) $f(x)=(6-\sqrt{1-10x^4})^{\cos 2x^3}$, $x_0=0$, $n=9$.

4) $f(x)=(x^2-1)^{1973}$, $x_0=1$, $n=1973$.

18.41. Найти такие числа A и B, чтобы при $x\to 0$ были справедливы асимптотические равенства:

1) $Ae^x-\frac{B}{1-x}=-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{6}x^3+o(x^3)$.

2) $\sin x(A+B\cos x)=x+o(x^4)$.

3) $A\arcsin x+B\,\mathrm{arctg}\,x=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^5+o(x^6)$.

4) $\mathrm{tg}\,x=\frac{x+Ax^3}{1+Bx^2}+o(x^6)$.

18.42. С помощью формулы Тейлора (34) приближенно вычислить (с точностью до 10^{-3}):

1) $\sqrt[3]{127}$. 2) $\sqrt[4]{83}$. 3) $\sqrt[5]{250}$. 4) $\sqrt[3]{e}$. 5) $\sin 85°$.

6) $\cos 72°$. 7) $\ln 1{,}3$. 8) $\mathrm{arctg}\,0{,}8$.

18.43. Оценить с помощью формулы Тейлора (34) абсолютную погрешность приближенных формул:

1) $e^x\approx\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

2) $\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$, $|x|\leqslant 1$.

3) $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}$, $|x|\leqslant 0{,}5$.

4) $\mathrm{tg}\,x\approx x+\frac{x^3}{3}$, $|x|\leqslant 0{,}1$.

5) $\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$, $|x|\leqslant 0{,}1$.

6) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}$, $0\leqslant x\leqslant 0{,}2$.

18.44. Вычислить с помощью формулы Тейлора (34):

1) e с точностью до 10^{-7}. 2) $\sqrt{10}$ с точностью до 10^{-3}.

3) $\sin 1°$ с точностью до 10^{-6}. 4) $\cos 5°$ с точностью до 10^{-5}.

5) $\sqrt[3]{30}$ с точностью до 10^{-4}. 6) $\lg 11$ с точностью до 10^{-4}.

18.45. Доказать, что для всех $n\in\mathbb{N}$ $(n\geqslant 2)$ выполняется равенство

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta}{n!n},$$

где $0<\theta<1$.

18.46. Доказать, что e — иррациональное число.

18.74. Пусть $f(x)\in C^{(2)}[0;1]$, $f(0)=f(1)=0$, и пусть существует число M такое, что для всех $x\in(0;1)$ выполняется неравенство $|f''(x)|\leqslant M$. Доказать, что

$$|f'(x)|\leqslant M/2 \quad \text{при} \quad x\in(0;1).$$

18.48. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на $\mathbb{R}$, и пусть $M_k=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f^{(k)}(x)|<+\infty$ $(k=0,\ 1,\ 2)$. Доказать, что $M_1^2\leqslant 2M_0M_2$.

§ 19. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Пусть требуется найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)},$$

где $f(0)=g(0)=0$. Предполагая, что функции f и g можно разложить по формуле Маклорена, ограничимся первыми отличными от нуля членами в разложении этих функций:

$$f(x)=ax^n+o(x^n),\quad a\neq 0,$$
$$g(x)=bx^m+o(x^m),\quad b\neq 0.$$

Если $m=n$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^n+o(x^n)}{bx^n+o(x^n)}=\frac{a}{b} \qquad (1)$$

Если $n>m$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0; \qquad (2)$$

если же $m>n$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty. \qquad (3)$$

Пример 1. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\,\mathrm{tg}\,x}-e^x+x^2}{\arcsin x-\sin x}.$$

△ Функции, стоящие в числителе и знаменателе дроби, являются бесконечно малыми при $x\to 0$.

Так как

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),$$
$$\arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3),\qquad x\to 0,$$

то разложение знаменателя дроби по формуле Маклорена имеет вид

$$\arcsin x-\sin x=\frac{x^3}{3}+o(x^3),\qquad x\to 0.$$

Поэтому числитель дроби следует разложить по формуле Маклорена до $o(x^3)$. Используя формулы

$$\sqrt{1+t}=1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{16}t^3+o(t^3),\qquad t\to 0,$$
$$\mathrm{tg}\,x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3),\qquad x\to 0,$$

получаем

$$\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}=1+\frac{1}{2}(2\operatorname{tg}x)-\frac{1}{8}(2\operatorname{tg}x)^2+\frac{1}{16}(2\operatorname{tg}x)^3+o(\operatorname{tg}^3x)=$$
$$=1+x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)=1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{6}x^3+o(x^3).$$

Учитывая, что

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3),$$

находим разложение по формуле Маклорена числителя дроби

$$\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}-e^x+x^2=\frac{2}{3}x^3+o(x^3),\qquad x\to0.$$

Таким образом, дробь представляется в виде

$$\frac{\frac{2}{3}x^3+o(x^3)}{\frac{x^3}{3}+o(x^3)},\qquad x\to0,$$

откуда следует, что искомый предел равен 2. ▲

Пример 2. Найти

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\operatorname{arctg}x}-\frac{1}{1-x}+\frac{x^2}{2}}{\ln\frac{1+x}{1-x}-2x}.$$

△ Используя формулы

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$
$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

находим разложение знаменателя дроби

$$\ln\frac{1+x}{1-x}-2x=\frac{2}{3}x^3+o(x^3),\qquad x\to0.$$

Поэтому числитель дроби следует разложить до $o(x^3)$. Так как

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

то

$$e^{\operatorname{arctg}x}=1+\left(x-\frac{x^3}{3}\right)+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)=$$
$$=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3),\qquad x\to0.$$

Заметив, что

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o(x^3),\qquad x\to0,$$

получаем разложение числителя дроби

$$e^{\operatorname{arctg}x}-\frac{1}{1-x}+\frac{x^2}{2}=-\frac{7}{6}x^3+o(x^3),\qquad x\to0.$$

Таким образом, данную дробь можно записать в виде

$$\frac{-\frac{7}{6}x^3+o(x^3)}{\frac{2}{3}x^3+o(x^3)},\qquad x\to0,$$

откуда следует, что искомый предел равен $-7/4$. ▲

Пример 3. Найти

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos\left(\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt5}\right)-\sqrt[5]{1-\frac{x^2}{2}}}{\operatorname{ch}(\sin x)-e^{x^2/2}}.$$

△ Используя разложения

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),\qquad x\to0,$$
$$\operatorname{ch}t=1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o(t^4),\qquad t\to0,$$

получаем

$$\operatorname{ch}(\sin x)=1+\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{x^4}{3}\right)+\frac{x^4}{24}+o(x^4)=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4),$$
$$x\to0.$$

Учитывая, что

$$e^{x^2/2}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4),$$

находим разложение знаменателя дроби

$$\operatorname{ch}(\sin x)-e^{x^2/2}=-\frac{1}{4}x^4+o(x^4),\qquad x\to0.$$

Числитель дроби следует разложить по формуле Маклорена до $o(x^4)$. Так как

$$\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt5}=\frac{x}{\sqrt5}+\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{\sqrt5}\right)^3+o(x^4)=\frac{x}{\sqrt5}+\frac{x^3}{30\sqrt5}+o(x^4),\quad x\to0,$$
$$\cos t=1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}+o(t^4),\qquad t\to0,$$

то

$$\cos\left(\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt5}\right)=1-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{5}+\frac{x^4}{75}\right)+\frac{1}{4!}\frac{x^4}{25}+o(x^4)=$$
$$=1-\frac{x^2}{10}-\frac{x^4}{200}+o(x^4),\qquad x\to0.$$

Используя формулу

$$(1+t)^{1/5}=1+\frac{1}{5}t-\frac{2}{25}t^2+o(t^2),\qquad t\to0,$$

получаем

$$\sqrt[5]{1-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{10}-\frac{x^4}{50}+o(x^4),\qquad x\to0.$$

Итак,

$$\cos\left(\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{5}}\right)-\sqrt[5]{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{3}{200}x^4+o(x^4),\quad x\to 0,$$

и поэтому заданная дробь представляется в виде

$$\frac{\frac{3}{200}x^4+o(x^4)}{-\frac{x^4}{4}+o(x^4)},\qquad x\to 0,$$

откуда следует, что искомый предел равен $-3/50$. ▲

Пример 4. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x+\frac{1}{6}x^3}{x-\operatorname{th}x}.$$

△ Так как $\operatorname{th}x$ — нечетная функция и $\operatorname{th}x=x+o(x)$ при $x\to 0$, то

$$\operatorname{th}x=x+a_3x^3+o(x^4).$$

Используя разложения

$$\operatorname{sh}x=x+\frac{x^3}{6}+o(x^4),$$

$$\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

и равенство

$$\operatorname{sh}x=\operatorname{th}x\operatorname{ch}x,$$

получаем

$$x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)=(x+a_3x^3+o(x^4))\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right).$$

Приравнивая коэффициенты при x^3 в этом равенстве, находим

$$\frac{1}{6}=a_3+\frac{1}{2},$$

откуда $a_3=-1/3$ и, следовательно,

$$\operatorname{th}x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^4),\quad x-\operatorname{th}x=\frac{x^3}{3}+o(x^4).$$

Поэтому числитель дроби следует разложить до $o(x^3)$. Заметим, что

$$(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))'=1/\sqrt{1+x^2},$$

где

$$1/\sqrt{1+x^2}=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3).$$

Поэтому (§ 18, формула (29))

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)$$

и числитель дроби есть $o(x^4)$. Таким образом, дробь представляется в виде

$$\frac{o(x^4)}{\frac{x^3}{3}+o(x^4)},$$

откуда следует, что искомый предел равен нулю. ▲

Формула Тейлора часто применяется для вычисления пределов вида

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)},$$

где

$$f(x)>0,\quad \lim_{x\to x_0}f(x)=1,\quad \lim_{x\to x_0}g(x)=\infty.$$

Рассмотрим сначала случай $x_0=0$ и предположим, что функции f и g представляются в виде

$$f(x)=1+ax^k+o(x^k),$$

$$g(x)=1/(bx^k+o(x^k)),\qquad x\to 0,$$

где $a\neq 0$, $b\neq 0$, $k\in\mathbb{N}$. Так как

$$\lim_{x\to 0}(1+ax^k+o(x^k))^{1/(ax^k+o(x^k))}=e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^k+o(x^k)}{bx^k+o(x^k)}=\frac{a}{b},$$

то

$$\lim_{x\to 0}(f(x))^{g(x)}=\lim_{x\to 0}(1+ax^k+o(x^k))^{1/(bx^k+o(x^k))}=e^{a/b}.\tag{4}$$

Если

$$f(x)=\frac{1+ax^k+o(x^k)}{1+a_1x^k+o(x^k)},$$

$$g(x)=\frac{1}{bx^k+o(x^k)}\quad\text{при } x\to 0,$$

причем $a\neq 0$, $a_1\neq 0$, $b\neq 0$, $k\in\mathbb{N}$, то

$$\lim_{x\to 0}(f(x))^{g(x)}=e^{(a-a_1)/b}.\tag{5}$$

Заметим, что для вычисления предела функции $(f(x))^{g(x)}$ при $x\to 0$ можно предварительно найти предел ее логарифма, т. е.

$$\lim_{x\to 0}g(x)\ln f(x),$$

разложив функции $g(x)$ и $\ln f(x)$ по формуле Маклорена.

Пример 5. Найти

$$\lim_{x\to 0}(\cos(xe^x)-\ln(1-x)-x)^{\operatorname{ctg}x^3}.$$

△ Так как

$$\operatorname{ctg}x^3=\frac{1}{\operatorname{tg}x^3}=\frac{1}{x^3+o(x^3)},\qquad x\to 0,$$

то функцию

$$f(x)=\cos(xe^x)-\ln(1-x)-x$$

следует разложить по формуле Маклорена до $o(x^3)$. Используя разложения

$$xe^x=x+x^2+o(x^2),\qquad x\to0,$$

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2}+o(t^3),\qquad t\to0,$$

$$-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),\qquad x\to0,$$

получаем

$$f(x)=1-\frac{2}{3}x^3+o(x^3),$$

$$(f(x))^{\operatorname{ctg}x^3}=\left(1-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\right)^{1/(x^3+o(x^3))},\qquad x\to0,$$

откуда следует, что искомый предел равен $e^{-2/3}$. ▲

Пример 6. Найти

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2\operatorname{tg}x}{x+\sin x}\right)^{1/(1-\cos x)}.$$

△ Используя разложения

$$1-\cos x=\frac{x^2}{2}+o(x^2),\quad \operatorname{tg}x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),\quad x\to0,$$

получаем

$$\left(\frac{2\operatorname{tg}x}{x+\sin x}\right)^{1/(1-\cos x)}=\left(\frac{2x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)}{2x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}\right)^{1/(1-\cos x)}=$$

$$=\left(\frac{1+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}{1-\frac{x^2}{12}+o(x^2)}\right)^{\frac{1}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}},$$

откуда следует, что искомый предел равен $e^{\left(\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{12}\right)\right)2}$, т. е. равен $e^{5/6}$. ▲

Заметим, что если

$$f(x)=1+ax^n+o(x^n),\quad g(x)=\frac{1}{bx^m+o(x^m)},\quad x\to0,$$

где $a\neq0$, $b\neq0$, $m,n\in\mathbb{N}$ и $m\neq n$, то

$$\lim_{x\to0}(f(x))^{g(x)}=1\ \text{ при }\ n>m; \tag{6}$$

если $m>n$ и $m-n$ — четное число, то

$$\lim_{x\to0}(f(x))^{g(x)}=\begin{cases}+\infty, & ab>0,\\ 0, & ab<0;\end{cases} \tag{7}$$

если же $m>n$ и $m-n$ — нечетное число, то $\lim\limits_{x\to0}(f(x))^{g(x)}$ не существует.

Пример 7. Найти

$$\lim_{x\to0}\left(\cos(\sin x)+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2\right)^{1/(x^2(\sqrt{1+2x}-1))}.$$

△ Используя разложения

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}+o(t^5),\quad t\to0,$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4),\quad \arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+o(x^4),$$

$$\sqrt{1+2x}=1+x+o(x),\quad x\to0,$$

получаем

$$f(x)=\cos(\sin x)+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2=$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{x^4}{3}\right)+\frac{x^4}{4!}+\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{x^4}{3}\right)+o(x^4)=$$

$$=1+\frac{3}{8}x^4+o(x^4),$$

$$g(x)=\frac{1}{x^2(\sqrt{1+2x}-1)}=\frac{1}{x^3+o(x^3)}.$$

Следовательно, искомый предел

$$\lim_{x\to0}(f(x))^{g(x)}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{3}{8}x^4+o(x^4)\right)^{1/(x^3+o(x^3))}=1.\ ▲$$

При вычислении предела с помощью формулы Тейлора в конечной точке $x_0\neq0$ следует положить $t=x-x_0$ и свести задачу к вычислению предела в точке $t=0$. Случай $x\to\infty$ заменой $x=1/t$ сводится к случаю $t=0$.

Если имеется неопределенность одного из видов $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, ее следует привести к неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Пример 8. Найти

$$\lim_{x\to2}\left(\sqrt{3-x}+\ln(x/2)\right)^{1/\sin^2(x-2)}.$$

△ Полагая $x-2=t$, получаем

$$\lim_{x\to2}\left(\sqrt{3-x}+\ln(x/2)\right)^{1/\sin^2(x-2)}=\lim_{t\to0}\left(\sqrt{1-t}+\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)\right)^{1/\sin^2 t}.$$

Так как

$$\sin^2 t = t^2 + o(t^2), \quad \sqrt{1-t} = 1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2),$$

$$\ln\left(1 + \frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$$

при $t \to 0$, то

$$\left(\sqrt{1-t} + \ln\left(1 + \frac{t}{2}\right)\right)^{1/\sin^2 t} = \left(1 - \frac{t^2}{4} + o(t^2)\right)^{1/(t^2+o(t^2))},$$

откуда следует, что искомый предел равен $e^{-1/4}$. ▲

Пример. 9. Найти

$$\lim_{x\to+\infty} x^{7/4}\left(\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x}\right).$$

△ Используя равенство

$$\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x} = x^{1/4}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}} + \sqrt[4]{1-\frac{1}{x}} - 2\right)$$

и полагая $1/x = t$, получаем

$$\lim_{x\to+\infty} x^{7/4}\left(\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x}\right) =$$

$$= \lim_{t\to+0} \frac{(1+t)^{1/4} + (1-t)^{1/4} - 2}{t^2}.$$

Так как

$$(1+t)^{1/4} = 1 + \frac{t}{4} - \frac{3}{32}t^2 + o(t^2),$$

то

$$(1+t)^{1/4} + (1-t)^{1/4} - 2 = -\frac{3}{16}t^2 + o(t^2), \qquad t \to +0,$$

откуда следует, что искомый предел равен $-3/16$. ▲

Пример 10. Найти

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x \operatorname{arctg} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x \arcsin x}\right).$$

△ Используя разложения

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4),$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4), \quad \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4),$$

получаем

$$\frac{1}{\sin x \operatorname{arctg} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x \arcsin x} = \frac{\operatorname{tg} x \arcsin x - \sin x \operatorname{arctg} x}{\sin x \operatorname{arctg} x \operatorname{tg} x \arcsin x} =$$

$$= \frac{\left(x + \frac{x^3}{3}\right)\left(x + \frac{x^3}{6}\right) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)},$$

откуда следует, что искомый предел равен 1. ▲

Найти пределы (19.1—19.18):

19.1. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} 2x - 2\operatorname{sh} x}{x^3}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$. 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} 3x + \cos 3x - 2}{x^4}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$. 7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt[4]{1-x}}{x}$.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{x^2}$.

19.2. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x - \arcsin 2x}{x^3}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{1+2x} - 1}{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt{1-x}}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}$. 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\ln\cos x}$.

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cos x + \arcsin x - 3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)}$.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x^2} - x\operatorname{ctg} x}{x\sin x}$.

19.3. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^x - 1}{x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x} - e\left(1 - \frac{x}{2}\right)}{x^2}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin^2 x)}$.

19.4. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - \sqrt[3]{1+3x+\frac{9}{2}x^2}}{x^3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3) - 2\sin x + 2x\cos x^2}{\operatorname{arctg} x^3}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1+\sin x} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - x}{\operatorname{tg}^3 x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - x\cos x}{\ln^3(1-x)}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x \ln\cos x} - (1+4x)^{1/4} + x - \frac{3}{2}x^2}{x\sin x^2}$.

19.5. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{arctg} x} + \ln(1-x) - 1}{2 - \sqrt{4+x^3}}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}\sin x+\ln\cos x-x}{\sqrt[3]{1-x^3}-1}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}\,\mathrm{sh}\,x+\ln\cos x-x}{1-\sqrt[3]{1-x^3}}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^{2x}+\sin x)-3\arcsin x+\frac{5}{2}x^2}{\sqrt[3]{8+x^3}-2}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right)-\mathrm{tg}\,(x-2x^2)}{\sqrt{4+x^3}-2}$.

19.6. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{\sin x-x}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x^3}-\cos x^4}{\mathrm{tg}\,x-x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{1+\sin x}+\ln(1-x)}{\mathrm{tg}\,x-\sin x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}\ln(1+x)-\frac{x}{x+1}}{\mathrm{tg}\,x-\sin x}$.

19.7. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}+\ln(1-x)-1}{\arcsin x-\sin x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\,\mathrm{tg}\,x}-e^x+x^2}{\arcsin x-\sin x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)\cos x-e^{\mathrm{tg}\,x}+\sqrt{1+2x^2}}{x-\sin x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\sin x}-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)-1}{\mathrm{tg}\,x-\sin x}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\mathrm{tg}\,x}-x-\mathrm{ch}\,x}{\sin x-\mathrm{arctg}\,x}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}+\ln(1-\sin x)-1}{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{arctg}\,x}$.

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-e^{\sin x}+\frac{3}{2}x^2}{\arcsin x-\mathrm{tg}\,x}$.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}\ln(1-x)+\sin(\sin x)+\frac{3}{2}x^2}{\mathrm{tg}\,x-\arcsin x}$.

19.8. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\mathrm{tg}\,x}-\sqrt{1+2x}-x(x+x^2)}{x-\mathrm{arctg}\,x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)-\sqrt{1+\sin x}+1}{\mathrm{sh}\,x-\mathrm{arctg}\,x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\mathrm{tg}\,(x/2)}-\sqrt{1+\sin x}-\frac{x^2}{4}}{\arccos x-\mathrm{arcctg}\,x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x+x^2}+\sin\ln(1-x)-e^{-7x^2/6}}{x-\mathrm{arctg}\,x}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{sh}\,2x}-\cos x-x}{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{arctg}\sin x}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-e^{2x}}-\cos 2x+\ln(1+x)}{\sin x-\arcsin\mathrm{tg}\,x}$.

19.9. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{\mathrm{tg}\,x}-\sin^2 x-x}{x+x^3-\mathrm{tg}\,x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}-x\,\mathrm{ctg}\,x-\frac{1}{3}x^2}{x\cos x-\sin x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1-2x}-x}{x^2\,\mathrm{tg}\,x-e^{-x^3}+1}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\ln\left(\sin x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\mathrm{tg}\,x-x\cos^2 x}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{e^x-1}-\frac{1}{1-x}}{\ln\frac{1+x}{1-x}-2\sin x}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,(\sin x)-\ln\left(x+\sqrt[3]{1+x^2}\right)-\frac{x^2}{6}}{\mathrm{th}\,(x-x^3)-x}$.

19.10. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-\mathrm{ch}\,2x-2x}{\mathrm{tg}\,2x-2\sin x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x-\frac{1}{6}x^2\right)-\mathrm{sh}\,x+\frac{2}{3}x^2}{\sin 2x-2x\cos x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2e^{2x}+\ln(1-x^2)}{x\cos x-\sin x}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x+3\cos x-3\sqrt[3]{1+x}}{1+\ln(1+x)-e^x}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2e^x-\ln(1+x^2)-\arcsin x^3}{x\sin x-x^2}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{1+\mathrm{tg}\,x}-e^{\sqrt{1+2x}}}{\sin\frac{x^2}{7}-\frac{x}{3}\ln(1-x)}$.

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt{1+2x+2x^2}}{x+\mathrm{tg}\,x-\sin 2x}$. 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\sin x-x\cos x}{e^x+\ln(1-x)-1}$.

19.11. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x\sqrt{1+x}-1}{\sin x\,\mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sin x - x\cos x}$. 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x-x^3} - \ln(1+\sin x) - 1}{x\cos x^2 - \operatorname{sh} x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\ln\cos x + x\operatorname{sh} x}{\sin(x^2/2) - \operatorname{sh}(x^2/2)}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}\operatorname{tg} x - x\cos\sin x}{\ln(1+x) - x\sqrt{1-x}}$. 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x - xe^{x^2}}{x\sqrt{1-x^2} - \operatorname{tg} x}$.

19.12. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x} + e^{\operatorname{tg} x} - 2}{\dfrac{\sin x}{x} - \cos x - \dfrac{x^2}{3}}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x - x\ln(1+x)} + \dfrac{3}{4}\operatorname{tg} x^2 - 1}{xe^x - \arcsin x - x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} 2x + \ln(1-\sin x) - \sin\ln(1+x)}{(1-2x)^{-1/2} - e^x - x^2}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-2x)^{-1/2} - (1+2x)^{-1/2} - \operatorname{arctg} 2x}{e^{-x} + \ln(1+\arcsin x) - 1}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(e^{\sin x} + \ln(1-x) + \dfrac{x^3}{3}\right)}{\ln\operatorname{ch} x - \dfrac{x^2}{2}}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{e^{\operatorname{sh} x} - (1+2x)^{1/2} - x^2}$.

19.13. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2} - e^{x^2/3}}{\ln(1+3x^2) - 3x^2\cos x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) + \operatorname{tg} x}{x\left(\operatorname{ch} x - e^{x^2}\right)}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\ln(e+x)} - e^{x/(3e)} + \dfrac{x^2}{3e^2}}{x\operatorname{ch} x - \sin x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - \arcsin x}{\operatorname{sh}(x-x^2) - \ln\sqrt{1+2x}}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{2x}{2+x^4} + \cos\dfrac{2x}{2-x^4} - 2e^{x^4/2}}{\operatorname{tg}\sqrt{1+x^4} - \operatorname{tg}\sqrt{1-x^4}}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{1+\cos x} - e^{2+x^2} + \dfrac{3}{2}e^2\sin x^2}{\ln(1+x^2) - (\operatorname{arctg} x)^2}$.

19.14. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin 2x) - 2x + 2x^2}{\dfrac{x}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \arcsin x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x} - \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{8}x^2 - 1}{e^x - \sqrt{1+2x} - x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - e^{\operatorname{tg} x} + 6x^3 + x^2}{\ln(1+x) - \operatorname{arctg} x + \dfrac{x^2}{2}}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} 2x - (1+3x)^{-1/3} - x}{\dfrac{1}{2}x^2 + \ln(1+\operatorname{tg} x) - \arcsin x}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\underset{6}{e^{x/(1-x)}} - \underset{6}{\operatorname{sh}} x - \cos x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \operatorname{ch} x - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x + \sqrt[3]{1-3x} - 2\cos x + 1}$.

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x+\cos 2x} - e^{\operatorname{tg} x} + 2x^2}{2\sin x - 2\ln(1+x) - x^2}$.

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh}\sin x^3 + \sin\operatorname{sh} x^3}{\dfrac{x^2}{2}\sqrt{1-x} + \ln(1+x) - x\cos x}$.

19.15. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x^2}{e^{\arcsin x} - e^{\sin x} - \dfrac{1}{2}x^3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\dfrac{\sin x}{x} + \operatorname{ch}\dfrac{x}{\sqrt{3}} - 1}{\operatorname{sh} x - \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\operatorname{arctg}\sin x - \operatorname{tg}\operatorname{sh} 3x}{\sqrt{1+x}\sin x^3 - x^2\ln\left(1 - \dfrac{16}{9}x\right)}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\sqrt{1+x^3} - \sin 1}{\sqrt[5]{1-2x\ln\cos x} - 1}$.

19.16. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \sqrt{1+2x^2}}{\operatorname{tg}^4 x}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + \ln(1-\sin x) - 1}{\sqrt[3]{8-x^4} - 2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(\cos x + \dfrac{x^2}{2}\right)}{e^{-x^2/2} - \cos x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x/(1+x)} - \cos\left(1-e^{-x}\right) - \operatorname{arctg} x}{x^4}$.

19.17. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(xe^x) + \sin(xe^{-x}) - 2x - \dfrac{2}{3}x^3}{x^5}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x\cos x) + x\ln\left(1+\dfrac{2}{3}x^2\right) - x}{\sqrt{1+x^5} - 1}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1-\dfrac{x^2}{2}} - e^{-x^2/6}}{x^2 \ln(1+x) - (\operatorname{tg} x^3)\cos \operatorname{sh}(x/2)}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x + x\sin x) - \dfrac{x^2}{2}e^x}{\dfrac{x}{2}\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{1+\dfrac{x^2}{3}} - \sin(x/2) - 1}$.

19.18. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\cos x} - e\sqrt[3]{1-4x^2}}{\dfrac{1}{x}\arcsin 2x - 2\operatorname{ch} x^2}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sqrt{1+2x} - \operatorname{tg} x) + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2}{xe^{x^2} - \sin x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x} - e^{-x} + x^2\sqrt[3]{1+x}}{\sin^2 x - \ln \operatorname{ch}^2 x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) + \dfrac{1}{2}\operatorname{sh} x^2 - x}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}$.

19.19. Найти числа $\alpha \in \mathbb{R}$ и $n \in N$ такие, чтобы существовал конечный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x^n} - \cos x^2}{x^8}.$$

Найти пределы (19.20—19.42):

19.20. 1) $\lim\limits_{x\to 0} (\sqrt{1+x} - x)^{1/x}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ch} x)^{1/\sin^2 x}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} 3x}\right)^{1/x^2}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^{x^2}}{\operatorname{ch} 3x}\right)^{1/x^2}$. 6) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\ln(e+x) - \dfrac{x}{e}\right)^{1/\sin^3 x}$.

19.21. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\ln(\sqrt{1+x^2} + x)}{x}\right)^{1/x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{\arcsin x}\right)^{1/x^2}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{arctg} x}\right)^{1/x^2}$.

19.22. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{2(\sqrt{1+x} - 1)}\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}}{\ln \operatorname{ch} x}\right)^{1/x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}e^{x/(1+x)} - \dfrac{1}{\sin x}\right)^{1/\operatorname{arctg} x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} 3x + \cos 4x - \cos 2x}{\ln\sqrt{1+3x} - \ln\sqrt{1-3x}}\right)^{1/\sin x}$.

19.23. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + 6\dfrac{x - \sin x}{x^2}\right)^{2(\operatorname{ch} x - 1)/x^2}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^2 - (1+2x)^{1/x}}{2xe^2}\right)^{1/x}$. 3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{2\sqrt{1+2x} - 2\sqrt[3]{1+3x}}\right)^{1/x}$.

19.24. 1) $\lim\limits_{x\to 0} (\sqrt{1+\operatorname{tg} 2x} + \ln(1-x))^{1/x^2}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{tg}(x/3) + 2 - \sqrt[3]{1+x})^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^{\frac{1}{3}\sin x} + \sqrt[3]{1-\operatorname{tg} x} - 1\right)^{1/\ln(1+x^2)}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{e}(1+x)^{1/x} + \dfrac{2x}{4+5x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

19.25. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{e^x - 1 - \dfrac{x^2}{2}}\right)^{1/x^2}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x\operatorname{sh} x}{\ln(1+x^2)}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2\cos x + x}{2\sqrt{1+x}}\right)^{1/x^2}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x\sin x}{2\operatorname{ch} x - 2}\right)^{1/x^2}$.

19.26. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\operatorname{sh} x}\right)^{1/\sin^2 x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+x^2 - \sqrt{1+x^2}}{\operatorname{ch} x - 1}\right)^{1/x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{\cos x}}{e^x - \ln(1+x)}\right)^{1/x^2}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x^2}}\right)^{1/x^2}$.

19.27. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{(\arcsin x)^2 - x^2}{\sin^2(x^2/\sqrt{3})}\right)^{1/\sin^2 x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{2-x^2} - x}{x\sin(x^2/6)}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2 - (\operatorname{arctg} x)^2}{x^2\sin\dfrac{2}{3}x^2}\right)^{1/x^2}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3\arccos(1-2x^2) - 6x}{x^3}\right)^{1/x^2}$.

19.28. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2e^{x-x^2} - 2}{2x - x^2}\right)^{(\sin x)/x^3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+x} - \dfrac{1}{2}\operatorname{sh} x}\right)^{1/\arcsin x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sh}(x+\sin x)}{\sin x + \arcsin x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

19.29. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}+\dfrac{x}{\ln(e^2-xe^2)}\right)^{1/x^2}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin 5x-\arcsin 3x-\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{1/\ln\cos 3x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(2x+x^3)-\operatorname{sh}(x+2x^3)}{x}\right)^{1/(2\ln(1+x^2)-\ln^2(1+x))}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}(2x+x^3)-\operatorname{th}(x+2x^3)}{x}\right)^{1/(\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt{1+x^2})}$.

19.30. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x+\dfrac{xe^x}{1-x}-x\right)^{1/x^3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{1+2x+x^3}-\dfrac{2x}{2x+3}\right)^{1/x^3}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x}{x-2}+\ln(e+xe^{x+1})\right)^{1/x^3}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x}{2+x}+\sin\ln(1+x)\right)^{1/x^3}$.

19.31. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(x-\ln(1+x)+\cos(xe^{-x}))^{1/x^3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{\sin x}-e^{2x-x^2}+e^{\operatorname{tg} x})^{1/x^3}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\operatorname{arctg} x\right)^{1/\arcsin x^3}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-x}{\sqrt{1+x^2}-\ln(1+x^3)}\right)^{1/x^4}$.

19.32. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt[3]{8+x^3}-\cos x^2)^{1/\arcsin x^3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-x+e^{\operatorname{arctg} x}-1)^{1/\sin^3 x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{2}x^2+\sqrt[3]{1+3\sin x}+\ln(1-x)\right)^{1/\operatorname{sh}^3 x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{1-3x\cos 2x}+4x^2+\dfrac{x}{1+3x}\right)^{1/(\arcsin x)^3}$.

19.33. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{\operatorname{tg} x}+\ln(1-x))^{\operatorname{ctg} x^3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+\sin x}-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x+\dfrac{1}{8}x^2\right)^{\operatorname{ctg} x^3}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1-2x+3x^2}+x(1-\operatorname{sh} x))^{\operatorname{ctg}^3 x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\sin x}-\dfrac{x^2}{2}+\cos x-\sqrt{1+2x}\right)^{1/\operatorname{tg} x^3}$.

19.34. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(1-x)+e^{x\cos x})^{1/(x^2(\sqrt{1+3x}-1))}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x+\sin\dfrac{2x}{\pi}\right)^{1/(\sqrt{1+2x^3}-1)}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{th}(xe^x)+\dfrac{1}{2}\ln(1-2x)\right)^{1/x^3}$.

19.35. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{1-x}+\cos x+x^2\right)^{1/\sin x^3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\operatorname{arctg} x-\operatorname{sh} 2x)^{1/\ln^3(1-x)}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\sin x}-\dfrac{x^2}{2}-x\cos x\right)^{1/\ln^3\left(1-\frac{x}{2}\right)}$.

19.36. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{1+\operatorname{tg} x}-\dfrac{x}{3}e^{-x/3}\right)^{1/(x\ln\cos x)}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{-x}}{1-x}+\dfrac{1}{2}(\ln\sqrt{1+2x}-\operatorname{tg} x)\right)^{1/(x(\cos x-1))}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x-x^2}-x\sqrt[3]{1-\dfrac{3}{2}x}\right)^{1/(\operatorname{tg} x-x)}$.

19.37. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+2\operatorname{tg} x}+\dfrac{x^2}{2}-\sin x\right)^{1/(\operatorname{sh} x-\operatorname{arctg} x)}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x+\operatorname{arctg} x)^{1/(\operatorname{sh} x-\sin x)}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sqrt{1-x}\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}\right)^{1/(\operatorname{tg} x-\operatorname{sh} x)}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos(\sin x)+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2+4x^3\right)^{1/(\operatorname{tg} x-\operatorname{sh} x)}$.

19.38. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{\sin 2x}-2x-2x^2)^{1/\sin x^4}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\sin x}+\ln(1-x)+\dfrac{x^3}{3}\right)^{1/x^4}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+\sin x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\right)^{1/x^4}$.

19.39. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x\arcsin x-x^2e^{x^2})^{1/\sin^2 x^2}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x\operatorname{arctg} x-x^2\operatorname{ch}^2 x)^{1/(1-\cos x)^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{th} x\ln\dfrac{1+x}{1-x}-2x^2\cos x^2\right)^{1/x^4}$.

19.40. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{sh} x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x^2\cos x^2)^{1/x^4}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sin x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2\right)^{1/\sin x^4}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{ch} x+2\cos x}{3}+\frac{x^2}{6(1+x^2)}\right)^{1/\operatorname{arctg} x^4}$.

19.41. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\sin 2x}-\frac{2}{3}x^2\right)^{x^2/(x^2-\operatorname{arctg} x^2)}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+x^2\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)^{(x+e)/\arcsin x^3}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{1+3x}-\operatorname{tg}\sin x+x^2\right)^{1/(\operatorname{arctg} x-x\cos x)}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{(1+x^2)^{1/x^2}-e^{\cos x}}{e}\right)^{1/(\sqrt{\operatorname{ch} 2x}-e^{x^2})}$.

19.42. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos(2x+x^2)+2\arcsin(xe^x)-2x\right)^{\operatorname{ctg}^3 x+\frac{1}{3x^3}}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\arcsin x^3)^{e^x/(x\sqrt[3]{\cos x}-\sin x+\operatorname{tg}^3 x)}$.

19.43. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/x^3}(\arccos\operatorname{sh} x+x)^{\operatorname{ctg} x^3}=e^{-2/(3\pi)}.$$

Найти пределы (**19.44—19.60**):

19.44. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\ln(1+x)}{x^2}-\frac{2}{(x+1)\operatorname{sh} x}\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{6}{\ln(1+3\sin^2 x)}-\frac{4}{\ln(2-\cos 2x)}\right)^{1/x^2}$.

19.45. 1) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\operatorname{ch} x)^{x^2(\operatorname{tg}(1/x)-\operatorname{arctg}(1/x))}$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2/3}\left(\frac{x}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\right)^{x^4}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^4+x^2+1}{x^4-x^2-1}\right)^{x^4\sin^2(1/x)}$.

19.46. 1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}+\frac{1}{4}\sin\frac{2}{x}\right)^{x^2+\sin 3x}$.

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\ln(1+x)-x\ln x+\operatorname{arctg}\frac{1}{2x}\right)^{x^2\operatorname{arctg} x}$.

19.47 $\lim\limits_{x\to +0}\left(\operatorname{sh} x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)^{1/\ln x}$.

19.48. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x\right)^{\operatorname{tg} x}$.

19.49. 1) $\lim\limits_{x\to 1}(e^{x-1}-\ln x)^{1/(\sin(x-1)+\cos(x-1)-x)}$.

2) $\lim\limits_{x\to 1}(e^{\sin(x-1)}-\ln x)^{\operatorname{ctg}^2(x-1)}$.

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln x\right)^{1/(\cos^2 x\sin^2(1-x))}$.

19.50. 1) $\lim\limits_{x\to 1}(x-\ln x)^{1/(\cos^2 x\sin^2(1-x))}$.

2) $\lim\limits_{x\to 1}(2^{x-1}-x^x\ln 2)^{1/(\sin(x-1)-\cos(1-x)+x)}$.

3) $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\ln(x^2-x)-\ln(x-1)+e^{1-x}\right)^{1/\arcsin(x-1)^3}$.

19.51. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{2}{x^2-1}\right)^{1/\sin(x-1)}$.

19.52. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{(x-1)/x}-\sqrt[4]{4x-3}}{\operatorname{ch}(x-1)-\cos 2(x-1)}$.

19.53. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3\sqrt[3]{x}-\arcsin(x-1)-3\cos(x-1)}{e^{x-1}-1-\ln x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x}-\sin(x-1)-2\cos(x-1)}{\operatorname{arctg}(x-1)-\ln x}$.

19.54. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(\sin\pi x)}{\ln(1+\ln x)}$.

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-e^{\pi x-2x^2}}{\cos x}$. 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\operatorname{ctg} x+2x-\frac{\pi}{2}}{(1-\operatorname{tg} x)^3}$.

19.55. $\lim\limits_{x\to +0}\frac{x(1-x^2)^{1/2}-\cos x\ln(1+x)}{\ln\sin x-\ln x}$.

19.56. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x}-\frac{1}{\arcsin x}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\operatorname{tg} x}\right)$. 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{(x+1)\operatorname{sh} x}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$.

19.57. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left((2e)^{1/x}+e^{1/x}-2\right)$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x^2+\frac{x}{2}\right)$.

19.58. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[6]{x^6+x^5}+\sqrt[6]{x^6-x^5}-2x}{x\ln(1+x)-x\ln x-x\sin(1/x)}$.

19.59. 1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^{1/x}(x^2-x+2)-\sqrt{x^4+x^2+1}\right)$.

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}+1\right)e^{1/x}-\sqrt[4]{x^{12}-x^9+2}\right)$.

19.60. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4}\right)$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left((x^3+x)\sin\frac{1}{x}-\sqrt[3]{x^6-3x^4+1}\right)$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\frac{x}{2}-(x^3+x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$.

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x}\left(1-\frac{x^2+1}{x}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)$.

§ 20. Исследование функций

1. Условия возрастания и убывания функции. Для того чтобы дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ *строго возрастала* на этом интервале, достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была положительна всюду на $(a;b)$, т. е.

$$f'(x)>0,\quad x\in(a;\ b).$$

Для того чтобы дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ *возрастала* (*не убывала*) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была неотрицательна всюду на $(a;b)$, т. е.

$$f'(x)\geqslant 0,\qquad x\in(a;b).$$

Аналогично, достаточным условием *строгого убывания* дифференцируемой функции $f(x)$, $x\in(a;b)$, является условие

$$f'(x)<0,\quad x\in(a;b);$$

необходимым и достаточным условием *убывания* — условие

$$f'(x)\leqslant 0,\quad x\in(a;b).$$

Пример 1. Найти интервалы возрастания и убывания функции:

1) $f(x)=x^3-30x^2+225x+1$.

2) $f(x)=\begin{cases}1/e, & \text{если}\quad x<e,\\ (\ln x)/x, & \text{если}\quad x\geqslant e.\end{cases}$

3) $f(x)=\cos(\pi/x)$.

△ 1) Данная функция всюду дифференцируема, причем

$$f'(x)=3x^2-60x+225=3(x-5)(x-15).$$

Так как $f'(x)>0$ при $x\in(-\infty;5)$ и $x\in(15;+\infty)$ и $f'(x)<0$ при $x\in(5;15)$, то на интервалах $(-\infty;5)$ и $(15;+\infty)$ функция строго возрастает, а на интервале $(5;15)$ строго убывает.

2) Функция дифференцируема на всей числовой прямой, причем

$$f'(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x<e,\\ (1-\ln x)/x^2, & \text{если}\quad x\geqslant e,\end{cases}$$

Так как $f'(x)\leqslant 0$ при всех x, то данная функция является невозрастающей на всей числовой оси. На интервале $(-\infty;e)$ она постоянна, на интервале $(e;+\infty)$ строго убывает.

3) Данная функция является четной, поэтому достаточно найти интервалы монотонности при $x>0$. Решая при $x>0$ неравенство

$$f'(x)=\frac{\pi}{x^2}\sin\frac{\pi}{x}>0,$$

получаем

$$0<\pi/x<\pi\quad\text{или}\quad 2\pi k<\pi/x<\pi+2\pi k,\quad k\in\mathbb{N},$$

откуда

$$x>1\ \text{или}\ 1/(2k+1)<x<1/(2k);\qquad k\in\mathbb{N}.$$

Таким образом, на интервалах $(1;+\infty)$ и $(1/(2k+1);1/(2k))$, $k\in\mathbb{N}$, функция строго возрастает. На интервалах $(1/(2k);1/(2k-1))$, $k\in\mathbb{N}$, очевидно, справедливо неравенство $f'(x)<0$, и поэтому на этих интервалах функция строго убывает. Если $x<0$, то, используя четность функции, получаем, что на интервалах $(-1/(2k);-1/(2k-1))$, $k\in\mathbb{N}$, функция строго возрастает, а на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(-1/(2k+1);-1/(2k))$, $k\in\mathbb{N}$, строго убывает.

Следует обратить внимание на то, что данная функция не является монотонной ни в какой окрестности точки $x=0$. В любой окрестности этой точки содержится счетное множество интервалов возрастания и счетное множество интервалов убывания данной функции. ▲

2. Экстремумы функции. Точка x_0 называется *точкой локального максимума* функции $f(x)$, если существует окрестность точки x_0, для всех точек которой верно неравенство

$$f(x)\leqslant f(x_0).$$

Если для всех $x\neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 верно строгое неравенство

$$f(x)<f(x_0),$$

то точка x_0 называется *точкой строгого локального максимума* функции $f(x)$.

Аналогично, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$f(x)\geqslant f(x_0),$$

то точка x_0 называется *точкой локального минимума*; если для всех $x\neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 верно строгое неравенство

$$f(x) > f(x_0),$$

то точка x_0 называется *точкой строгого локального минимума.*

Для краткости слово «локальный» часто опускают и пишут просто «точка минимума» или «точка строгого максимума».

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*, а значения функции в этих точках — ее *экстремумами.*

Например, для функций $y = |x|$ и $y = 1 - x^2$ точка $x = 0$ является точкой строгого экстремума, причем для первой функции — точкой строгого минимума, а для второй — точкой строгого максимума. Для функции $y = \operatorname{sign} x$ каждая точка $x \neq 0$ является как точкой нестрогого максимума, так и точкой нестрогого минимума. Функция $f(x) = \cos(\pi/x)$ имеет счетное множество точек строгого экстремума $x_n = 1/n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, причем точки x_{2k}, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, являются точками максимума, а точки x_{2k+1}, $k \in \mathbb{Z}$, — точками минимума. Экстремумы этой функции равны

$$f(x_n) = f(1/n) = (-1)^n.$$

Необходимые условия экстремума. Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.

Эти условия не являются достаточными. В самом деле, для функции $f(x) = x^3$ производная в точке $x = 0$ равна нулю, а для функции

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x < 0, \\ 2x, & \text{если } x \geqslant 0, \end{cases}$$

производная в точке $x = 0$ не существует, но ни для $f(x)$, ни для $g(x)$ точка $x = 0$, очевидно, не является точкой экстремума.

Точки, в которых функция определена, а производная функции равна нулю или не существует, называют *критическими точками* функции. Экстремумы функции следует искать среди ее критических точек.

Достаточные условия строгого экстремума (с использованием первой производной). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, в которой, однако, функция $f(x)$ непрерывна. Тогда точка x_0 является точкой строгого максимума, если существует окрестность точки x_0, в которой

$$f'(x) > 0 \text{ при } x < x_0 \text{ и } f'(x) < 0 \text{ при } x > x_0. \tag{1}$$

При выполнении условий (1) принято говорить, что производная функции при переходе через точку x_0 меняет знак плюс на знак минус.

Если же

$$f'(x) < 0 \text{ при } x < x_0 \text{ и } f'(x) > 0 \text{ при } x > x_0, \tag{2}$$

т. е. если производная при переходе через точку x_0 меняет знак минус на плюс, то x_0 — точка строгого минимума.

Условия строгого экстремума (с использованием производных высших порядков). Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до порядка n $(n \in \mathbb{N})$ включительно. Тогда, если

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ а } f^{(n)}(x_0) \neq 0, \tag{3}$$

то при четном n точка x_0 является точкой строгого экстремума, причем точкой максимума, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, и точкой минимума, если $f^{(n)}(x_0) > 0$; при нечетном n экстремума в точке x_0 нет.

В частности, если

$$f'(x_0) = 0, \text{ а } f''(x_0) \neq 0,$$

то в точке x_0 строгий максимум в случае $f''(x_0) < 0$ и строгий минимум в случае $f''(x_0) > 0$.

Пример 2. Найти точки экстремума функции $f(x) = (x+1)e^{2x}$.

△ Функция имеет производную при всех $x \in \mathbb{R}$, причем

$$f'(x) = e^{2x} + (x+1)2e^{2x} = (2x+3)e^{2x}.$$

Следовательно, у функции может быть только один экстремум в точке $x = -3/2$. Так как $f'(x) < 0$ при $x < -3/2$ и $f'(x) > 0$ при $x > -3/2$, то точка $x = -3/2$ является точкой строгого минимума. ▲

Пример 3. Найти экстремумы функции

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14.$$

△ Так как

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-2)(x-3),$$

то критические точки функции $x = 2$ и $x = 3$. Экстремумы могут быть только в этих точках. Так как при переходе через точку $x = 2$ производная меняет знак плюс на знак минус, то в этой точке функция имеет максимум. При переходе через точку $x = 3$ производная меняет знак минус на плюс, поэтому в точке $x = 3$ у функции минимум.

Тот же результат можно получить, используя вторую производную. Так как $f''(x) = 12x - 30$ и $f''(2) < 0$, а $f''(3) > 0$, то в точке $x = 2$ функция имеет максимум, а в точке $x = 3$ — минимум.

Вычислив значения функции в точках $x = 2$ и $x = 3$, найдем экстремумы функции: максимум $f(2) = 14$ и минимум $f(3) = 13$. ▲

Пример 4. Исследовать на экстремум функцию:

1) $f(x) = \dfrac{(x+3)^3}{(x+1)^2}$. 2) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$.

3) $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$.

△ 1) Функция определена и дифференцируема при всех $x \in \mathbb{R}$, кроме точки $x = -1$. Вычисляем ее производную

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2\, 3(x+3)^2 - (x+3)^3\, 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+3)^2(x-3)}{(x+1)^3}$$

и находим критические точки $x = -3$ и $x = 3$. Легко видеть, что существует окрестность точки $x = -3$, в которой $f'(x) \geqslant 0$, т. е. при переходе через точку $x = -3$ знак производной не изменяется. Следовательно, эта критическая точка не является точкой экстремума. В точке $x = 3$ функция имеет строгий минимум, так как существуют левая окрестность этой точки, в которой $f'(x) < 0$, и правая окрестность этой точки, в которой $f'(x) > 0$. Вычисляя значение функции при $x = 3$, находим минимум:

$$f(3) = 6^3/4^2 = 13{,}5.$$

2) Функция определена и непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$. Вычисляем ее производную

$$f'(x) = \frac{(1-x)\,2(x-2) - (x-2)^2}{3\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)^4}} = \frac{4-3x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)}},$$

$$x \neq 1, \quad x \neq 2.$$

В точках $x = 1$, $x = 2$ производная не существует. Таким образом, функция имеет три критические точки: $x = 1$, $x = 4/3$, $x = 2$. При переходе через точку $x = 1$ производная не меняет знака, поэтому критическая точка $x = 1$ не является точкой экстремума. При переходе через точку $x = 4/3$ производная меняет знак минус на плюс, поэтому в точке $x = 4/3$ функция имеет минимум. При переходе через точку $x = 2$ производная меняет знак плюс на минус, поэтому $x = 2$ — точка максимума. Минимум функции равен $f(4/3) = -\sqrt[3]{4}/2$, а максимум равен $f(2) = 0$.

3) Функция дифференцируема при всех $x \in \mathbb{R}$. Так как $f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x$ и уравнение $\operatorname{sh} x - \sin x = 0$ имеет только одно решение, а именно $x = 0$, то экстремум может быть только в точке $x = 0$. Вычисляем вторую производную

$$f''(x) = \operatorname{ch} x - \cos x.$$

Поскольку $f''(0) = 0$, находим следующие производные в точке $x = 0$:

$$f'''(x) = \operatorname{sh} x + \sin x, \quad f'''(0) = 0,$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = \operatorname{ch} x + \cos x, \quad f^{\mathrm{IV}}(0) = 2.$$

Таким образом, первой не равной нулю оказалась производная четного порядка. Следовательно, в точке $x = 0$ функция имеет экстремум. Так как $f^{\mathrm{IV}}(0) > 0$, то при $x = 0$ у функции минимум, равный $f(0) = 2$. ▲

Пример 5. Исследовать на экстремум функцию $y = f(x)$, заданную параметрически уравнениями

$$x = \frac{t^3}{t^2+1}, \quad y = \frac{t^3 - 2t^2}{t^2+1}.$$

△ Функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы при всех значениях параметра t, причем производная

$$x'_t = \frac{(t^2+1)\,3t^2 - 2t^4}{(t^2+1)^2} = \frac{t^2(t^2+3)}{(t^2+1)^2}$$

при $t \neq 0$ положительна. Поэтому y'_x при $t \neq 0$ можно найти по формуле $y'_x = y'_t/x'_t$. Так как

$$y'_t = \frac{(t^2+1)(3t^2-4t) - 2t(t^3-2t^2)}{(t^2+1)^2} = \frac{t(t-1)(t^2+t+4)}{(t^2+1)^2},$$

то

$$y'_x = \frac{(t-1)(t^2+t+4)}{t(t^2+3)}, \qquad t \neq 0.$$

Производная y'_x равна нулю только при $t = 1$, поскольку $t^2 + t + 4 > 0$ при всех t. Следовательно, у данной функции две критические точки: $x = 1/2$ (при $t = 1$) и $x = 0$ (при $t = 0$). Если x принадлежит левой окрестности точки $x = 0$, то параметр t принадлежит левой окрестности точки $t = 0$, где $y'_x > 0$. В некоторой правой окрестности точки $x = 0$ производная $y'_x < 0$. Поэтому в точке $x = 0$ функция имеет максимум, равный $f(0) = 0$. Аналогично убеждаемся в том, что при переходе через точку $x = 1/2$, соответствующую значению $t = 1$, производная y'_x меняет знак минус на плюс. Таким образом, в точке $x = 1/2$ у функции минимум, равный $f(1/2) = y(1) = -1/2$. ▲

3. Наибольшее и наименьшее значения функции. Для функции, непрерывной на отрезке, существуют на этом отрезке точка, в которой функция принимает наибольшее значение, и точка, в которой функция принимает наименьшее значение (*теорема Вейерштрасса*).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет на нем k локальных максимумов в точках $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Тогда наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ равно наибольшему из чисел:

$$f(a),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_k),\ f(b).$$

Аналогично, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет на нем n локальных минимумов в точках $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, то ее наименьшее значение на этом отрезке равно наименьшему из чисел:

$$f(a),\ f(x'_1),\ f(x'_2),\ \ldots,\ f(x'_n),\ f(b).$$

Пример 6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=2x^3-3x^2-36x-8$$

на отрезке $[-3;\,6]$.

△ Находим экстремумы функции. Вычисляем производную

$$f'(x)=6x^2-6x-36=6(x+2)(x-3).$$

Обе критические точки $x=-2$ и $x=3$ функции $f(x)$ принадлежат отрезку $[-3;\,6]$. Находим вторую производную $f''(x)=12x-6$. Так как $f''(-2)<0$, а $f''(3)>0$, то в точке $x=-2$ максимум, а в точке $x=3$ минимум. Вычисляем значения функции в точках экстремума и в концах заданного отрезка:

$$f(-3)=19,\ f(-2)=36,\ f(3)=-89,\ f(6)=100.$$

Таким образом,

$$\max_{[-3;\,6]} f(x)=\max\{19,\ 36,\ 100\}=100,$$

$$\min_{[-3;\,6]} f(x)=\min\{19,\ -89,\ 100\}=-89. \ ▲$$

Пример 7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=(x-3)^2e^{|x|}$$

на отрезке $[-1;\,4]$.

△ Так как $f(x)\geqslant 0$ и $f(3)=0$, то наименьшее значение данной функции равно нулю. Для определения наибольшего значения найдем локальные максимумы функции на интервале $(-1;\,4)$. Вычисляем производную

$$f'(x)=\begin{cases} 2(x-3)e^{-x}-(x-3)^2e^{-x}=(x-3)(5-x)e^{-x}, & \text{если } x<0,\\ 2(x-3)e^{x}+(x-3)^2e^{x}=(x-3)(x-1)e^{x}, & \text{если } x>0.\end{cases}$$

В точке $x=0$ производная не существует. Критическими точками являются точки $x=0$, $x=1$, $x=3$. Все они принадлежат отрезку $[-1;\,4]$. При переходе через точку $x=0$ производная меняет знак минус на плюс, т. е. в этой точке минимум функции. В точке $x=3$, как уже было отмечено, функция принимает наименьшее значение. При переходе через точку $x=1$ производная меняет знак плюс на минус, т. е. в точке $x=1$ у функции максимум. Вычисляем значения функции в точке максимума и в концах заданного отрезка:

$$f(-1)=16e,\ f(1)=4e,\ f(4)=e^4.$$

Так как $e^4>16e>4e$, то наибольшее значение функции равно e^4. Итак,

$$\min_{[-1;\,4]} f(x)=f(3)=0,\quad \max_{[-1;\,4]} f(x)=f(4)=e^4. \ ▲$$

Пример 8. Доказать неравенство:

1) $e^x\geqslant 1+x$.

2) $x^\alpha\geqslant 1+\alpha\ln x$, если $x>0$, $\alpha>0$.

△ 1) Рассмотрим функцию $f(x)=e^x-1-x$. Исследуем ее на экстремумы. Уравнение $f'(x)=e^x-1=0$ имеет одно решение $x=0$. Так как $f''(x)=e^x>0$, то в точке $x=0$ минимум, который является наименьшим значением функции. Следовательно, для всех x верно неравенство $f(x)\geqslant f(0)$, но $f(0)=0$, поэтому $e^x-1-x\geqslant 0$, т. е. $e^x\geqslant 1+x$.

2) Рассмотрим функцию $f(x)=x^\alpha-1-\alpha\ln x$. Исследуем ее на экстремум. Производная

$$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}-\frac{\alpha}{x}=\frac{\alpha}{x}(x^\alpha-1)$$

равна нулю только при $x=1$. Так как $\alpha>0$, то $f'(x)<0$ при $x\in(0;\,1)$ и $f'(x)>0$ при $x\in(1;\,+\infty)$. Следовательно, в точке $x=1$ функция имеет минимум, который одновременно является наименьшим значением функции. Таким образом, при всех $x>0$ верно неравенство $f(x)\geqslant f(1)$, но $f(1)=0$, поэтому $x^\alpha-1-\alpha\ln x\geqslant 0$, т. е. $x^\alpha\geqslant 1+\alpha\ln x$. ▲

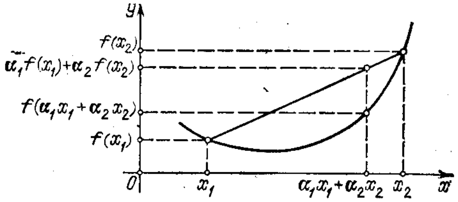


Рис. 84.

4. Условия выпуклости. Точки перегиба. Функция $f(x)$ называется *выпуклой вниз* (или *вогнутой вверх*) на интервале $(a;\,b)$, если для любых точек x_1 и x_2 этого интервала и любых чисел $\alpha_1\geqslant 0$ и $\alpha_2\geqslant 0$ таких, что $\alpha_1+\alpha_2=1$, верно неравенство

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\leqslant \alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2). \qquad (4)$$

Геометрический смысл выпуклости вниз функции $f(x)$ на интервале $(a;\,b)$ заключается в том, что точки любой дуги графика функции расположены не выше хорды, стягивающей эту дугу (рис. 84). Если функция выпукла вниз на некотором интервале, то ее график тоже называют выпуклым вниз.

Если при тех же условиях относительно x_1, x_2, α_1, α_2 выполняется неравенство

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\geqslant \alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2), \qquad (5)$$

то функция $f(x)$ называется *выпуклой вверх* (или *вогнутой вниз*).

В том случае, когда при $x_1\neq x_2$ и $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$ неравенства (4) или (5) являются строгими, функция $f(x)$ называется *строго выпуклой вниз* или соответственно *строго выпуклой вверх* на интервале $(a;\,b)$.

Например, функция $f(x)=x^2$ строго выпукла вниз на всей числовой оси.

Всякий интервал, на котором функция (строго) выпукла вниз, называется интервалом (строгой) выпуклости вниз этой функции; интервал, на котором функция (строго) выпукла вверх, — интервалом (строгой) выпуклости вверх этой функции. Например, для функции $f(x)=x^3$ интервал $(-\infty; 0)$ — интервал строгой выпуклости вверх, а интервал $(0; +\infty)$ — интервал строгой выпуклости вниз. Интервалы выпуклости вверх и интервалы выпуклости вниз называют интервалами выпуклости.

Условия выпуклости функции. Для того чтобы функция $f(x)$, дважды дифференцируемая на интервале $(a; b)$, была выпуклой вниз на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы вторая производная $f''(x)$ была неотрицательна на $(a; b)$, т. е.

$$f''(x) \geqslant 0, \quad x \in (a; b). \tag{6}$$

Условие

$$f''(x) > 0, \quad x \in (a; b), \tag{7}$$

является достаточным условием строгой выпуклости вниз функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$.

Условие (7) не является необходимым. В самом деле, функция $f(x)=x^4$ строго выпукла вниз на всей числовой прямой, однако ее вторая производная $f''(x)=12x^2$ равна нулю в точке $x=0$.

Аналогично, для функции $f(x)$, имеющей на интервале $(a; b)$ вторую производную, необходимым и достаточным условием выпуклости вверх на этом интервале является условие

$$f''(x) \leqslant 0, \quad x \in (a; b), \tag{8}$$

а достаточным условием строгой выпуклости вверх — условие

$$f''(x) < 0, \quad x \in (a; b). \tag{9}$$

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Если существуют интервалы

$$(x_0-\delta; x_0) \quad \text{и} \quad (x_0; x_0+\delta), \quad \delta > 0,$$

на одном из которых $f(x)$ строго выпукла вниз, а на другом строго выпукла вверх, то говорят, что при переходе через точку x_0 функция $f(x)$ меняет направление выпуклости.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, непрерывна в точке x_0 и имеет в этой точке конечную или бесконечную производную. Тогда, если функция $f(x)$ при переходе через точку x_0 меняет направление выпуклости, то точка x_0 называется *точкой перегиба функции* $f(x)$. В этом случае точку $(x_0; f(x_0))$ называют *точкой перегиба графика функции* $f(x)$.

Если $(x_0; f(x_0))$ — точка перегиба графика функции $f(x)$, то график функции $f(x)$ переходит с одной стороны касательной

к нему в этой точке на другую ее сторону. Заметим, что обратное утверждение неверно (см. задачу **20.62**).

На рис. 85 и 86 представлены график функции $y=x^3$ и график обратной ей функции $y=\sqrt[3]{x}$, для которых точка $(0; 0)$ является точкой перегиба. Функция $y=\sqrt[3]{x}$ в точке $x=0$ имеет бесконечную производную.

Функция (рис. 87)

$$y=\begin{cases} 1/x, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x=0, \end{cases}$$

при переходе через точку $x=0$ меняет направление выпуклости, в точке $x=0$ имеет бесконечную производную, однако точка $x=0$ не является для нее точкой перегиба, так как при $x=0$ функция разрывна. Для функции $y=\sqrt[3]{|x|}$ точка $x=0$ (рис. 88) не является точкой перегиба, поскольку при переходе через точку $x=0$ направление выпуклости

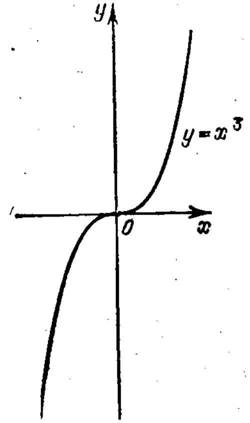


Рис. 85.

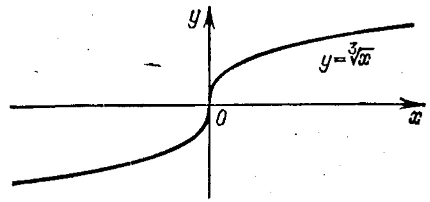


Рис. 86.

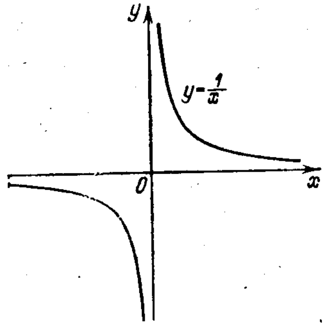


Рис. 87.

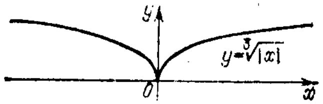


Рис. 88.

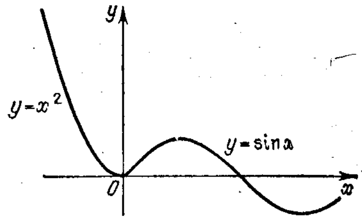


Рис. 89.

не меняется (это так называемая точка возврата). При переходе через точку $x=0$ функция

$$y=\begin{cases} \sin x, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ x^2, & \text{если} \quad x < 0, \end{cases}$$

меняет направление выпуклости, но точка $x=0$ не является для нее точкой перегиба (рис. 89), так как в этой точке у функции нет ни конечной, ни бесконечной производной (это так называемая угловая точка).

Необходимые условия существования точки перегиба. Если точка x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$, то либо $f''(x_0)=0$, либо $f''(x_0)$ не существует.

Эти условия не являются достаточными. В самом деле, для функции $f(x)=x^4$ вторая производная в точке $x=0$ равна нулю, а для функции

$$g(x)=\begin{cases} x^3, & \text{если } x\geqslant 0,\\ x^2, & \text{если } x<0,\end{cases}$$

вторая производная в точке $x=0$ не существует, но ни для $f(x)$, ни для $g(x)$ точка $x=0$ не является точкой перегиба.

Точки перегиба функции следует искать среди критических точек ее первой производной.

Достаточные условия существования точки перегиба (с использованием второй производной). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0. Тогда точка x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$, если существует окрестность точки x_0, в которой либо

$$f''(x)<0 \text{ при } x<x_0 \text{ и } f''(x)>0 \text{ при } x>x_0, \tag{10}$$

либо

$$f''(x)>0 \text{ при } x<x_0 \text{ и } f''(x)<0 \text{ при } x>x_0. \tag{11}$$

В этом случае принято говорить, что при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак.

Условия существования точки перегиба (с использованием производных высших порядков). Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до порядка $n>2$ включительно, и пусть

$$f''(x_0)=f'''(x_0)=\ \ldots\ =f^{(n-1)}(x_0)=0, \text{ а } f^{(n)}(x_0)\neq 0; \tag{12}$$

тогда, если n — нечетное число, то x_0 — точка перегиба; если же n — четное число, то x_0 не является точкой перегиба.

В частности, если

$$f''(x_0)=0, \text{ а } f'''(x_0)\neq 0, \tag{13}$$

то x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.

Пример 9. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции:

1) $f(x)=x^4-6x^2-6x+1$.

2) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^3}$. 3) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$.

△ 1) Так как $f''(x)=12x^2-12=12(x^2-1)$, то $f''(x)>0$ при $|x|>1$ и $f''(x)<0$ при $|x|<1$. Следовательно, $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ — интервалы выпуклости вниз, а $(-1;1)$ — интервал выпуклости вверх. При переходе через точки $x=\pm 1$, в которых вторая производная равна нулю, функция меняет направление выпуклости. Поэтому $x=\pm 1$ — точки перегиба функции. В том, что точки $x=\pm 1$ являются точками перегиба, можно убедиться и другим способом, используя достаточное условие (13). Действительно, $f''(\pm 1)=0$, $f'''(x)=24x$ и $f'''(\pm 1)\neq 0$, т. е. условия (13) выполнены. Следовательно, $x=\pm 1$ — точки перегиба функции.

2) Функция дифференцируема при всех $x\in\mathbb{R}$, кроме $x=1$, причем

$$f'(x)=-\frac{x(x+2)}{(x-1)^4},$$

$$f''(x)=2\frac{x^2+4x+1}{(x-1)^5}=2\frac{(x-(-2-\sqrt{3}))(x-(-2+\sqrt{3}))}{(x-1)^5}.$$

В точках $x=-2\pm\sqrt{3}$ вторая производная равна нулю, а в точке $x=1$ не существует. На интервалах

$$(-\infty;-2-\sqrt{3}),\quad (-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}),$$
$$(-2+\sqrt{3};1),\quad (1;+\infty)$$

вторая производная сохраняет знак. Следовательно, каждый из этих интервалов — интервал выпуклости. На первом и третьем интервалах $f''(x)<0$, значит, это интервалы выпуклости вверх; на втором и четвертом интервалах $f''(x)>0$, т. е. это интервалы выпуклости вниз. При переходе через точки $x=-2\pm\sqrt{3}$, $x=1$ функция меняет направление выпуклости. Но в точке $x=1$ функция не определена, поэтому $x=1$ не является точкой перегиба. Итак, функция имеет две точки перегиба: $x=-2-\sqrt{3}$ и $x=-2+\sqrt{3}$.

3) Функция определена на интервале $(0;+\infty)$ и дифференцируема в каждой его точке, кроме точки $x=1$. Вычислив вторую производную, получим

$$f''(x)=\frac{3}{4}\,\frac{5-x}{x^3\sqrt{x}},\quad x\in(0;1),$$

$$f''(x)=\frac{3}{4}\,\frac{x-5}{x^3\sqrt{x}},\quad x\in(1;+\infty).$$

Вторая производная равна нулю в точке $x=5$ и не существует в точке $x=1$. Определяем интервалы, на которых $f''(x)$ сохраняет знак:

$$f''(x)>0 \text{ при } x\in(0;1),$$
$$f''(x)<0 \text{ при } x\in(1;5),$$
$$f''(x)>0 \text{ при } x\in(5;+\infty).$$

Следовательно, на интервалах $(0; 1)$ и $(5; +\infty)$ функция выпукла вниз, а на интервале $(1; 5)$ выпукла вверх. При переходе через точки $x = 1$ и $x = 5$ функция меняет направление выпуклости. Но в точке $x = 1$ у функции нет ни конечной, ни бесконечной производной. Поэтому точка $x = 1$ не является точкой перегиба. Точка $x = 5$ является точкой перегиба, так как в ней функция имеет конечную производную. ▲

Пример 10. Найти точки перегиба графика функции $y = e^{\sqrt[3]{x}}$ и угловые коэффициенты касательных к графику функции в его точках перегиба.

△ Вычислим первую и вторую производные функции:

$$y'(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad y''(x) = \frac{\sqrt[3]{x}\,(\sqrt[3]{x} - 2)}{9x^2} e^{\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0.$$

В точке $x = 0$ функция непрерывна и имеет бесконечную производную. Вторая производная не существует при $x = 0$ и равна нулю при $x = 8$. Следовательно, точки перегиба функции могут быть только в точках $x = 0$ и $x = 8$. При переходе через эти точки $y''(x)$ меняет знак, и, следовательно, $y(x)$ в этих точках меняет направление выпуклости. Поэтому точки $x = 0$, $x = 8$ являются точками перегиба функции, а точки $(0; 1)$ и $(8; e^2)$ — точками перегиба графика функции. Касательная к графику функции в точке $(0; 1)$ вертикальна, так как $y'(0) = +\infty$. В точке перегиба $(8; e^2)$ угловой коэффициент касательной равен $y'(8) = e^2/12$. ▲

Пример 11. Определить, является ли точка $x = 0$ точкой перегиба функции

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - \operatorname{tg} x + \sin x.$$

△ Найдем вид главного члена разложения функции по формуле Маклорена (6) § 18. Так как согласно формулам (12) и (24) § 18

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), \quad \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6),$$

то

$$f(x) = c_5 x^5 + o(x^6), \quad c_5 \neq 0.$$

Отсюда следует, что

$$f''(0) = f'''(0) = f^{\mathrm{IV}}(0) = 0, \text{ а } f^{\mathrm{V}}(0) \neq 0.$$

Таким образом, условия (12) выполнены, причем $n = 5$ — нечетное число. Следовательно, $x = 0$ — точка перегиба функции. ▲

Пример 12. Найти точки перегиба графика функции $y = f(x)$, заданной параметрически уравнениями

$$x = 1 + \operatorname{ctg} t, \quad y = \frac{\cos 2t}{\sin t}, \quad 0 < t < \pi. \qquad (14)$$

△ Функции $x(t)$ и $y(t)$ при $t \in (0; \pi)$ дважды дифференцируемы, причем производная $x'_t = -1/\sin^2 t$ отрицательна. Поэтому уравнениями (14) определяется дважды дифференцируемая функция $y = f(x)$, производные которой можно найти по формулам

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t}.$$

Так как

$$y'_t = -\frac{\cos t\,(2\sin^2 t + 1)}{\sin^2 t},$$

то

$$y'_x = \cos t\,(2\sin^2 t + 1).$$

Вычисляем вторую производную функции $y = f(x)$. Так как $(y'_x)'_t = 3\cos 2t \cdot \sin t$, то

$$y''_{xx} = -3\sin^3 t \cos 2t.$$

Вторая производная y''_{xx} равна нулю при $t = \pi/4$ и $t = 3\pi/4$. При переходе через эти точки y''_{xx} меняет знак. Следовательно, при этих значениях параметра t график функции $y = f(x)$ имеет точки перегиба. Значениям параметров $t = \pi/4$ и $t = 3\pi/4$ соответствуют точки $(2; 0)$ и $(0; 0)$ графика функции. Таким образом, график функции имеет две точки перегиба $(0; 0)$ и $(2; 0)$. ▲

Пример 13. Доказать неравенство

$$e^{(x+y)/2} \leqslant \frac{e^x + e^y}{2}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

△ Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. Так как $f''(x) = e^x > 0$, то $f(x)$ на всей числовой прямой выпукла вниз. По определению всюду выпуклой вниз функции для любых точек x_1 и x_2 числовой прямой и любых чисел $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, верно неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Если $f(x) = e^x$, то это неравенство имеет вид

$$e^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} \leqslant \alpha_1 e^{x_1} + \alpha_2 e^{x_2}.$$

Положив $x_1 = x$, $x_2 = y$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$, получаем

$$e^{(x+y)/2} \leqslant \frac{e^x + e^y}{2}.$$

Так как $f''(x) = e^x$ строго больше нуля, то функция $f(x) = e^x$ строго выпукла вниз. Поэтому при $x \neq y$ получаем строгое неравенство

$$e^{(x+y)/2} < \frac{e^x + e^y}{2}. \quad ▲$$

Найти интервалы возрастания и убывания функции (20.1—20.5):

20.1. 1) $f=4x^3-21x^2+18x+7$. 2) $f=8x^3-x^4$. 3) $f=x^5-5x^4+5x^3-1$. 4) $f=(x-1)^3(2x+3)^2$.

20.2. 1) $f=xe^{-3x}$. 2) $f=e^x/x$. 3) $f=x^2e^{-x^2}$. 4) $f=x^\alpha e^{-x}$, $x>0$, $\alpha>0$. 5) $f=x^2-10\ln x$. 6) $f=x^2\ln x$. 7) $f=x/\ln x$. 8) $f=3^{1/(x-3)}$. 9) $f=\operatorname{arctg}x-\ln x$. 10) $f=e^{\pi x}\cos\pi x$.

20.3. 1) $f=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$. 2) $f=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{x^2-1}$. 3) $f=\dfrac{x^3}{3-x^2}$. 4) $f=\dfrac{(3-x)^3}{(x-2)^2}$.

20.4. 1) $f=\sqrt[3]{x}/(x+50)$. 2) $f=\sqrt{8x^2-x^4}$. 3) $f=\sqrt{2x^3+9x^2}$. 4) $f=x\sqrt{(x+1)^3}$. 5) $f=x/\sqrt[3]{x^2-1}$. 6) $f=(x+1)\sqrt{x^2-1}$. 7) $f=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

20.5. 1) $f=\dfrac{\sqrt{1+|x+2|}}{1+|x|}$. 2) $f=\dfrac{\sin x+\cos x}{1+|\cos x|}$.

20.6. Найти интервалы возрастания и убывания для функции $y=f(x)$, заданной неявно уравнением:

1) $x^2y^2+y=1$, $y>0$. 2) $x^3y^3=x-y$, $x>0$.

20.7. Найти интервалы возрастания и убывания для функции $y=f(x)$, заданной параметрически уравнениями

$$x=\frac{e^{-t}}{1-t},\quad y=\frac{e^t}{1-t},\qquad t>1.$$

20.8. При каких значениях параметра a функция $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой:

1) $f(x)=x^3-ax$. 2) $f(x)=\dfrac{a^2-1}{3}x^3+(a-1)x^2+2x$. 3) $f(x)=ax-\sin x$. 4) $f(x)=ax+3\sin x+4\cos x$. 5) $f(x)=(8a-7)x-a\sin 6x-\sin 5x$. 6) $f(x)=4x+\dfrac{a+1}{2}\ln(x^2-x+1)+\dfrac{a-5}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt3}$?

20.9. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a;b)$ и $f'(x)>0$ всюду на $(a;b)$, кроме конечного числа точек, то $f(x)$ строго возрастает на $(a;b)$.

20.10. Доказать, что для строгого возрастания функции $f(x)$ на некотором интервале необходимо и достаточно, чтобы для

любых точек x_1 и x_2 ($x_1<x_2$) этого интервала существовала точка $\xi\in(x_1;x_2)$ такая, что $f'(\xi)>0$.

20.11. Пусть функция $f(x)$ возрастает на интервале $(a;b)$. Следует ли из этого, что производная $f'(x)$ также возрастает на интервале $(a;b)$?

20.12. Функция $f(x)$ называется возрастающей в точке x_0, если существует такое число $\delta>0$, что $f(x)<f(x_0)$, если $x\in(x_0-\delta;x_0)$, и $f(x)>f(x_0)$, если $x\in(x_0;x_0+\delta)$.

Доказать, что: 1) из возрастания функции $f(x)$ в каждой точке некоторого интервала следует возрастание $f(x)$ на этом интервале; 2) функция

$$f(x)=\begin{cases}x+x^2\sin(2/x), & x\ne0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

возрастает в точке $x=0$, но не является возрастающей ни в каком интервале, содержащем эту точку.

20.13. Найти точки максимума и минимума функции:

1) $y=x^3-4x^2$. 2) $y=x(x-3)^2(x+1)^3$. 3) $y=2\sin x+\cos 2x$. 4) $y=\dfrac{1}{x^3-2x^2-x+2}$. 5) $y=(x-5)e^x$. 6) $y=x^2e^{1/x}$. 7) $y=(2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}$. 8) $y=\dfrac{\sqrt[3]{1+|x|}}{1+|4x+5|}$.

20.14. Найти точку минимума функции

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}(x-x_k)^2,\quad x_k\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N}.$$

20.15. Найти многочлен наименьшей степени, имеющий локальный максимум, равный 6, при $x=1$ и локальный минимум, равный 2, при $x=3$.

Найти максимумы и мимимумы функции (20.16—20.25):

20.16. 1) $y=x^4-8x^2+12$. 2) $y=\begin{cases}x^2+1, & x\ne0,\\ 2, & x=0.\end{cases}$ 3) $y=\dfrac{x^4}{4}-2x^3+\dfrac{11}{2}x^2-6x+3$. 4) $y=x^4-4x^3+6x^2-4x+5$. 5) $y=(x^3-10)(x+5)^2$. 6) $y=(x+2)^2(x-3)^3$.

20.17. 1) $y=\dfrac{1}{x^2-x}$. 2) $y=\dfrac{x}{x^2+4}$. 3) $y=\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$. 4) $y=\dfrac{(2-x)^3}{(3-x)^2}$. 5) $y=\dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$. 6) $y=\dfrac{x^4}{(x+1)^3}$.

20.18. 1) $y=\sin x+\dfrac12\sin 2x$. 2) $y=\sin^3x+\cos^3x$.

3) $y=\frac{\sin x}{2+\cos x}$. 4) $y=x+\sin x$. 5) $y=x-2\sin^2 x$.

6) $y=x-2\operatorname{arctg} x$. 7) $y=(x-2)\cos\pi x-\frac{1}{\pi}\sin\pi x$.

8) $y=(x^2+1)\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{4}x^2-x$.

20.19. 1) $y=(x-1)e^{3x}$. 2) $y=(3-x^2)e^x$. 3) $y=(x^2-8)e^{-x}$.

4) $y=x^3e^{-4x}$. 5) $y=x^4e^{-x^2}$. 6) $y=(x+1)^5e^{-x}$.

7) $y=(x^3+3x^2+6x+6)e^{-x}$. 8) $y=(x+2)e^{1/x}$.

20.20. $y=\sqrt{x}\ln x$. 2) $y=\frac{\ln^2 x}{x}$.

3) $y=\frac{1}{\ln(x^4+4x^3+30)}$. 4) $y=x^2-4x-1-\ln(x^2-4x+4)$.

5) $y=\ln\cos x-\cos x$. 6) $y=\ln(x^2+1)-2\operatorname{arctg} x$.

20.21. 1) $y=x+\sqrt{3-x}$. 2) $y=\sqrt[3]{x^3-2x^2+x}$.

3) $y=\sqrt[3]{x^2}-x$. 4) $y=x\sqrt[3]{x-1}$. 5) $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2-1}$.

6) $y=x/\sqrt[3]{x^2-4}$. 7) $y=\sqrt[3]{(x-2)^2(x-4)^2}$.

8) $y=\sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$. 9) $y=\sqrt[3]{(3x-2)^2/(x-1)}$.

10) $y=1-\sqrt[3]{(x+1)^2/(x+2)^2}$.

20.22. 1) $y=x^x$. 2) $y=x^{1/x}$.

20.23. 1) $y=|x-5|(x-3)^3$. 2) $y=\max\{7x-6x^2, |x^3|\}$.

3) $y=\sqrt{1+2|x-1|}/(6+|3x-2|)$. 4) $y=\sqrt[3]{x^2|2-x|}$.

5) $y=|x-1|\sqrt[3]{x+2}$. 6) $y=|x^2-1|e^{|x|}$.

7) $y=|x^2-4|e^{-|x|}$. 8) $y=e^{-|x-1|}/(x+1)$.

20.24. 1) $y=\sin(x+1)-|\cos x|$, $x\in(0;\pi)$.

2) $y=\sin|x-3|+\cos x$, $x\in(0;\pi)$.

3) $y=\frac{1+|\cos x|}{2+\cos x+\sqrt{3}\sin x}$, $x\in(0;\pi)$.

20.25. 1) $y(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0,\\ x\ln x, & x>0.\end{cases}$

2) $y(x)=\begin{cases} 1+x, & x\leqslant 0,\\ (x)^{x^3}, & x>0.\end{cases}$ 3) $y(x)=\begin{cases} 1+x, & x\leqslant 0,\\ x^{x^2\ln x}, & x>0.\end{cases}$

20.26. Исследовать на экстремум функцию:

1) $y=(x+1)^ne^{-x}$, $n\in\mathbb{N}$.

2) $y=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$, $n\in\mathbb{N}$.

3) $y=x^k(1-x)^n$, $k,n\in\mathbb{N}$.

4) $y=ae^{px}+be^{-px}$, $a, b, p\in\mathbb{R}$.

20.27. Исследовать на экстремум в точке $x=a$ функцию

$$y=(x-a)^n\varphi(x),\quad n\in\mathbb{N};$$

$\varphi(x)$ непрерывна в точке $x=a$, и $\varphi(a)\neq 0$.

20.28. Исследовать на экстремум функцию $y=f(x)$, заданную неявно уравнением:

1) $x^3+y^3=3x^2$. 2) $x+y=xy(y-x)$, $|y|<|x|$.

3) $x^4-y^4=x^2-2y^2$, $y>|x|$.

4) $(x^2-y^2)(x-y)=1$, $y>|x|$.

20.29. Исследовать на экстремум функцию $y=f(x)$, заданную параметрически уравнениями:

1) $x=\frac{1}{t(t+1)}$, $y=\frac{(t+1)^2}{t}$, $t>0$,

2) $x=\ln\sin(t/2)$, $y=\ln\sin t$.

20.30. Доказать, что если в точке минимума существует правая производная, то она неотрицательна, а если существует левая производная, то она неположительна.

20.31. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a;b)$ и непрерывна в точке $x_0\in(a;b)$. Доказать, что если $f(x)$ возрастает на интервале $(a;x_0)$ и убывает на интервале $(x_0;b)$, то x_0 является точкой максимума; если же $f(x)$ убывает на интервале $(a;x_0)$ и возрастает на интервале $(x_0;b)$, то x_0 — точка минимума.

20.32. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin^2(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

в точке $x=0$ имеет нестрогий минимум.

20.33. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2(2+\cos(1/x)), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

имеет строгий минимум в точке $x=0$, но ни в каком интервале $(-\delta;0)$, $\delta>0$, не является убывающей и ни в каком интервале $(0;\delta)$, $\delta>0$, не является возрастающей.

20.34. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} |x|(2+\cos(1/x)), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} e^{-1/|x|}\left(\frac{6}{5}+\cos\frac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Доказать:

1) $f'(0)$ не существует, $g^{(n)}(0)=0$, $n\in\mathbb{N}$.

2) $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x=0$ имеют строгий минимум.

3) $f(x)$ и $g(x)$ ни в каком интервале $(-\delta;0)$, $\delta>0$, не являются убывающими и ни в каком интервале $(0;\delta)$, $\delta>0$, не являются возрастающими.

20.35. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Доказать:

1) $f^{(n)}(0)=g^{(n)}(0)=0$.

2) $f(x)$ в точке $x=0$ имеет строгий минимум, $g(x)$ в точке $x=0$ не имеет экстремума.

20.36. Пусть $f(x)$ — четная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем $f''(0)\neq 0$. Доказать, что точка $x=0$ является точкой экстремума этой функции.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции (**20.37—20.40**):

20.37. 1) $y=x^3-6x^2+9$, $x\in[-1;2]$.

2) $y=\frac{1}{2}x^3-9x^2+48x$, $x\in[0;9]$.

3) $y=2x^3+3x^2-120x+100$, $x\in(-4;5]$.

4) $y=x^4-8x^2+3$, $x\in[-1;2]$.

5) $y=x^5-5x^4+5x^3+1$, $x\in[-1;2]$.

20.38. 1) $y=\frac{9}{x}+\frac{25}{1-x}$, $x\in(0;1)$.

2) $y=\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $x\in[0;1]$. 3) $y=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

4) $y=\frac{x^4+1}{x^2+1}$, $x\in[-1;1]$.

20.39. 1) $y=x-2\sqrt{x}$, $x\in[0;5]$.

2) $y=x-2\ln x$, $x\in[3/2;e]$. 3) $y=x\ln(x/5)$, $x\in[1;5]$.

4) $y=|x^2+2x-3|+1{,}5\cdot\ln x$, $x\in[1/2;2]$.

5) $y=(x-3)e^{|x+1|}$, $x\in[-2;4]$. 6) $y=x^x$, $x\in(0;1]$.

20.40. 1) $y=2\sin x+\sin 2x$, $x\in[0;3\pi/2]$.

2) $y=\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

3) $y=4x+\frac{9\pi^2}{x}+\sin x$, $x\in[\pi;2\pi]$.

4) $y=2\operatorname{arctg} x+\arcsin\frac{2x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Найти экстремумы функции $y=f(x)$ на интервале $(a;b)$, а также ее наименьшее значение m и наибольшее значение M на отрезке $[a;b]$ (**20.41—20.43**):

20.41. 1) $y=(x-3)^2e^{|x|}$, $a=-1$, $b=4$.

2) $y=(x-3)^3e^{|x+1|}$, $a=-2$, $b=4$.

3) $y=e^{\sqrt{x^2|x+1|}}$, $a=-2$, $b=1$.

4) $y=\ln\left(1+\sqrt{|x|(x+1)^2}\right)$, $a=-2$, $b=1$.

5) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{|x|(x-1)^2}$, $a=-1$, $b=2$.

6) $y=\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2|1-x|}$, $a=-1$, $b=2$.

20.42. 1) $y=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ 2ex\ln x, & x>0,\end{cases}$ $a=-1$, $b=2$.

2) $y=\begin{cases}1+3x, & x\leqslant 0,\\ (x)^{x^2}, & x>0,\end{cases}$ $a=-1$, $b=2$.

3) $y=\frac{E(x)}{x}+\frac{x}{3}$, $a=1$, $b=3$.

20.43. 1) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\operatorname{sign} x\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, $a=-\pi$, $b=\pi$.

2) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\operatorname{sign} x\right)$, $a=-\pi$, $b=\pi$.

3) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\operatorname{sign} x\right)$, $a=-\pi$, $b=\pi$.

20.44. Найти номер n наибольшего члена последовательности:

1) $\{105n+3n^2-n^3\}$. 2) $\left\{\frac{\sqrt{n}}{n+1985}\right\}$. 3) $\left\{\frac{\sqrt[3]{n}}{n+19}\right\}$.

4) $\left\{\frac{n^2}{n^3+200}\right\}$. 5) $\left\{\frac{n^{12}}{e^n}\right\}$. 6) $\left\{\frac{n^{10}}{2^n}\right\}$.

Найти $\inf f$ и $\sup f$ (**20.45—20.47**):

20.45. $f=\frac{1}{x}+x^2$, $x\in(0;1]$. 2) $f=\ln x-x$, $x\in(0;+\infty)$.

3) $f=2\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x$, $x\in(-\pi/2;\pi/2)$.

4) $f=\operatorname{tg} x-3x$, $x\in[-\pi/4;\pi/2)$.

20.46. 1) $f=(x^2+4)e^{-x}$, $x\in(0,+\infty)$.

2) $f=e^{-x^2}\cos x^2$, $x\in\mathbb{R}$. 3) $f=\frac{1}{x}e^{-1/x}$, $x\in(0;+\infty)$.

4) $f=x^x$, $x\in(0;1/2]$.

20.47. 1) $f=x+\left(\frac{2}{x-2}\right)^2$, $x\in(3/2;5)$.

2) $f=(x+1)\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2$, $x\in(3/2;6)$. 3) $f=\frac{\sqrt{1+|x-2|}}{1+|x|}$, $x\in\mathbb{R}$.

4) $f=\frac{x^2+1}{x^2+3}$, $x\in(a;\ +\infty)$, $a\in\mathbb{R}$.

20.48. Найти интервалы выпуклости функции:

1) $f=x^\alpha$, $\alpha>1$, $x>0$. 2) $f=x^\alpha$, $0<\alpha<1$, $x>0$.

3) $f=e^x$. 4) $f=\ln x$. 5) $f=x\ln x$. 6) $f=\operatorname{arctg} x$.

Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции (**20.49—20.50**):

20.49. 1) $f=2x^4-3x^2+x-1$. 2) $f=x^5-10x^2+3x$.

3) $f=\frac{1}{1-x^2}$. 4) $f=\frac{x^3}{12+x^2}$. 5) $f=\sqrt[3]{x+3}$.

6) $f=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$. 7) $f=\sqrt[3]{4x^3-12x}$. 8) $f=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

20.50. 1) $f=\cos x$. 2) $f=x+\sin x$. 3) $f=e^{-x^2}$.

4) $f=e^{1/x}$. 5) $f=\frac{10}{x}\ln\frac{x}{10}$. 6) $f=x\sin\ln x$.

7) $f=\operatorname{arctg}(1/x)$. 8) $f=e^{\operatorname{arctg} x}$.

Найти точки перегиба функции (**20.51—20.53**):

20.51. 1) $f=x^4-6x^2+5x$. 2) $f=x^4-12x^3+48x^2$.

3) $f=2x^4+2x^3+3x^2+3x+1$. 4) $f=(x^2-1)^3$.

20.52. 1) $f=4x^2+\frac{1}{x}$. 2) $f=\frac{x^2}{(x-1)^3}$. 3) $f=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2-4}$.

4) $f=\sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$. 5) $f=\frac{|x-1|}{x^2}$.

20.53. 1) $f=(x^2+1)e^x$. 2) $f=x^3e^{-4x}$. 3) $f=x^2\ln x$.

4) $f=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. 5) $f=e^{\cos x}$.

Найти точки перегиба графика функции (**20.54—20.56**):

20.54. 1) $f=36x(x-1)^3$. 2) $f=x+36x^2-2x^3-x^4$.

3) $f=1+x^2-\frac{x^4}{2}$. 4) $f=\frac{x^5}{20}-x^4+8x^3-32x^2$.

5) $f=\frac{2x^2-x-4}{x^2-4x+4}$. 6) $f=\frac{x^4}{(x+1)^3}$.

20.55. 1) $f=\sqrt[3]{1-x^3}$. 2) $f=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1}$.

3) $f=5+\sqrt[3]{(x-5)^5}$. 4) $f=\sqrt{\frac{8-x^3}{3x}}$.

20.56. 1) $f=e^{2x-x^2}$. 2) $f=xe^{-(x/2)^2}$.

3) $f=2x^2+\ln x$. 4) $f=e^{-2x}\sin^2 x$.

20.57. Найти точки перегиба функции f:

1) $f=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\sigma^2}$, $\sigma>0$.

2) $f=\frac{ax}{x^2+b^2}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

20.58. Исследовать на точки перегиба многочлены:

1) $P_3(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a\neq 0$.

2) $P_4(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, $a\neq 0$.

20.59. При каких значениях параметра a функция $f=e^x+ax^3$ имеет точки перегиба?

20.60. Доказать, что график функции

$$y(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$$

имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

20.61. Доказать, что точки перегиба графика функции $y(x)=x\sin x$ лежат на кривой

$$y^2(4+x^2)=4x^2.$$

20.62. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} x^3(2+\cos(1/x^2)), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Доказать, что:

1) График функции $f(x)$ в точке $(0;0)$ имеет касательную.

2) График функции $f(x)$ переходит с одной стороны касательной к нему в точке $(0;0)$ на другую ее сторону.

3) Точка $(0;0)$ не является точкой перегиба графика функции $f(x)$.

20.63. 1) Может ли точка перегиба функции быть ее точкой экстремума?

2) Может ли всюду выпуклая вниз (вверх) функция иметь более одного экстремума?

20.64. Доказать, что у любой дважды дифференцируемой функции:

1) Между двумя точками экстремума лежит хотя бы одна точка перегиба.

2) Между точками перегиба функции может и не быть точек экстремума.

20.65. Доказать, что:

1) Каждый многочлен нечетной степени, отличный от линейного, имеет хотя бы одну точку перегиба.

2) Каждый четный многочлен с положительными коэффициентами не имеет точек перегиба.

20.66. Пусть $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция, и пусть для любых точек x_1, x_2 этого интервала существует единственная точка c такая, что

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c).$$

Доказать, что $f(x)$ не имеет точек перегиба.

20.67. Найти точки перегиба графика функции $y=f(x)$, заданной параметрически уравнениями:

1) $x=te^t$, $y=te^{-t}$, $t>0$.

2) $x=\dfrac{t^2}{t-1}$, $y=\dfrac{t^3}{t-1}$, $t>2$.

3) $x=\dfrac{2t^2+2}{t}$, $y=\dfrac{t^3+3t+1}{t^2}$, $0<t<1$.

4) $x=\dfrac{t^2-2t-5}{t^2+10t+25}$, $y=\dfrac{t^2-4t+5}{t^2+4t-5}$, $t>1$.

20.68. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям $f^{(k)}(x_0)=g^{(k)}(x_0)$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ и $f^{(n)}(x)>g^{(n)}(x)$, $x>x_0$, то $f(x)>g(x)$ при $x>x_0$.

Доказать неравенства (20.69—20.71):

20.69. 1) $e^x\geqslant ex$, $x\in\mathbb{R}$.

2) $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$, $x>0$.

3) $\ln(1+x)>\dfrac{x}{x+1}$, $x>0$.

4) $1-2\ln x\leqslant\dfrac{1}{x^2}$, $x>0$. 5) $e^x>1+\ln(1+x)$.

6) $\dfrac{\ln x}{x-1}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x>0$, $x\neq1$.

20.70. 1) $\cos x\geqslant1-\dfrac{x^2}{2}$, $x\in\mathbb{R}$. 2) $\operatorname{ch}x\geqslant1+\dfrac{x^2}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

3) $\operatorname{tg}x>x+\dfrac{x^3}{3}$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. 4) $\operatorname{arctg}x\leqslant x$, $x\geqslant0$.

5) $\sin x\geqslant\dfrac{2}{\pi}x$, $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

6) $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$.

7) $\sin x+\operatorname{tg}x>2x$, $0<x<\pi/2$.

8) $x-\dfrac{x^3}{3}<\operatorname{arctg}x<x-\dfrac{x^3}{6}$, $0<x\leqslant1$.

9) $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3\geqslant\cos x$, $0<|x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

20.71 1) $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}\leqslant\sqrt[n]{x-y}$, $x\geqslant y\geqslant0$.

2) $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n\leqslant\dfrac{x^n+y^n}{2}$, $x\geqslant0$, $y\geqslant0$, $n\in\mathbb{N}$.

3) $(x^\alpha+y^\alpha)^{1/\alpha}>(x^\beta+y^\beta)^{1/\beta}$, $x>0$, $y>0$, $0<\alpha<\beta$.

4) $\dfrac{x-y}{x}<\ln\dfrac{x}{y}<\dfrac{x-y}{y}$, $x>y>0$.

5) $\dfrac{x\ln x+y\ln y}{x+y}>\ln\dfrac{x+y}{2}$, $x>0$, $y>0$.

20.72. Доказать неравенство

$$x^\alpha-1\leqslant\alpha(x-1),\quad x>0,\quad 0<\alpha<1.$$

20.73. Доказать неравенство Юнга: если $a>0$, $b>0$, $p>1$ и $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, то

$$a^{1/p}b^{1/q}\leqslant\frac{a}{p}+\frac{b}{q},$$

причем знак равенства имеет место только при $a=b$.

20.74. Доказать неравенство Гёльдера: если $x_i\geqslant0$, $y_i\geqslant0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $p>1$ и $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, то

$$\sum_{i=1}^n x_iy_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}.$$

20.75. Доказать неравенство Минковского: если $x_i\geqslant0$, $y_i\geqslant0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $p>1$, то

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{1/p}.$$

§ 21. Построение графиков

При построении графика функции можно придерживаться, например, следующей схемы:

1. Найти область определения функции. Проверить, является ли функция четной, нечетной, периодической.

Найти точки пересечения графика с осями координат, промежутки, где значения функции положительны, отрицательны.

Найти точки разрыва функции.

2. Найти асимптоты графика (§ 11).

Найти односторонние пределы функции в граничных точках области определения и в точках разрыва.

3. Сделать набросок графика, отразив на нем полученные результаты.

4. Вычислить первую производную функции, найти экстремумы и промежутки ее возрастания и убывания.

5. Вычислить вторую производную, найти точки перегиба графика, промежутки выпуклости вверх или вниз.

6. Нарисовать график функции.

При решении конкретной задачи отдельные этапы этой схемы могут быть расширены, другие же могут оказаться излишними или невыполнимыми. Например, если точки графика монотонно приближаются к асимптоте, то следует попытаться выяснить, с какой стороны от этой асимптоты они расположены. Это можно сделать методом выделения главной части или по известному направлению выпуклости кривой. Метод выделения главной части можно использовать и для уточнения рисунка вблизи отдельных точек или при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$. Часто бывает нетрудно найти и нарисовать касательную к графику в точках перегиба, в угловых точках и т. д.

Пример 1. Построить график функции

$$y = \frac{1}{4}(x^3 + 3x^2 - 9x - 3).$$

△ Данная функция определена и бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, асимптот не имеет,

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty.$$

График пересекает ось ординат в точке $(0; -3/4)$.

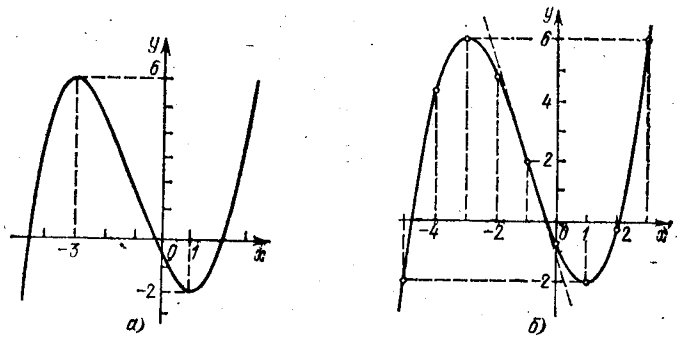


Рис. 90.

Найдем экстремумы функции. Вычисляем производную

$$y' = \frac{3}{4}(x^2 + 2x - 3)$$

и находим, что $y' > 0$ при $x < -3$, $y' < 0$ при $-3 < x < 1$, $y' > 0$ при $x > 1$. Значит, $x = -3$ — точка максимума, $y(-3) = 6$, а $x = 1$ — точка минимума, $y(1) = -2$.

Отметим найденные три точки графика и сделаем его набросок (рис. 90, *а*)).

Вычислив вторую производную

$$y'' = \frac{3}{2}(x + 1),$$

найдем, что функция выпукла вверх при $x < -1$ $(y'' < 0)$ и выпукла вниз при $x > -1$ $(y'' > 0)$. В точке перегиба $x = -1$ вычисляем $y(-1) = 2$, $y'(-1) = -3$. Для более точного изображения графика находим еще несколько значений функции (табл. 1). Наносим полученные точки на чертеж, проводим касательную к графику в точке $(-1; 2)$ с угловым коэффициентом, равным -3, и рисуем график (рис. 90, *б*)). Из табл. 1 и графика видно, что корни данного многочлена нецелые, поэтому

Таблица 1

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y(x)$	-2	17/4	6	19/4	2	$-3/4$	-2	1/4	6

начинать исследование функции с нахождения корней было бы нецелесообразно. ▲

Пример 2. Построить график функции

$$y = \frac{x^3}{4(2-x)^2}.$$

△ Функция определена при всех $x \in \mathbb{R}$, кроме $x = 2$. График ее пересекает оси координат в одной точке $(0; 0)$. Функ-

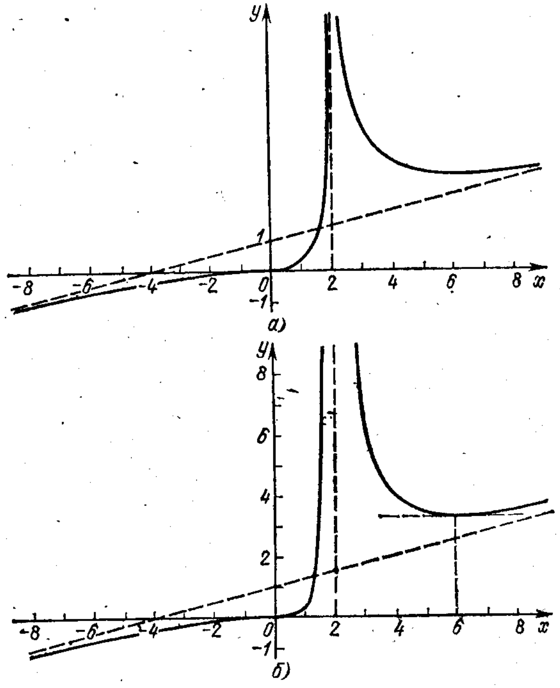


Рис. 91.

ция положительна при $x > 0$, $x \neq 2$, и отрицательна при $x < 0$. Функция разрывна в точке $x = 2$, и поскольку $\lim_{x \to 2} y(x) = +\infty$, прямая $x = 2$ — вертикальная асимптота графика. Из того, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\frac{1}{4},\quad \lim_{x\to\infty}\left(y(x)-\frac{1}{4}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x-1)}{(x-2)^2}=1,$$

следует, что при $x\to\infty$ график имеет наклонную асимптоту

$$y=\frac{1}{4}x+1.$$

Отметив еще, что $y\sim\frac{1}{16}x^3$ при $x\to 0$, делаем предварительный рисунок графика (рис. 91, a)).

Вычисляем первую производную

$$y'(x)=\frac{x^2(x-6)}{4(x-2)^3}$$

и находим единственную точку экстремума $x=6$, которая является точкой минимума, $y(6)=27/8$. На интервалах $(-\infty;2)$ и $(6;+\infty)$ функция возрастает, на интервале $(2;6)$ убывает. В точке $x=0$ касательная к графику горизонтальна, как и было указано на рис. 91, a). Вычисляем вторую производную

$$y''(x)=\frac{6x}{(x-2)^4}.$$

Отсюда следует, что имеется только одна точка перегиба функции $x=0$, причем $y(0)=0$ и $y'(0)=0$. При $x<0$ функция выпукла вверх, поэтому ее график при $x\to-\infty$ приближается к асимптоте снизу. При $0<x<2$ и при $x>2$ функция выпукла вниз. Отсюда следует, что при $x\to+\infty$ график приближается к асимптоте сверху. Вычислив еще несколько точек графика, на основе проведенного исследования делаем более точный рисунок (рис. 91, $б$)). ▲

Пример 3. Построить график функции

$$y=x\sqrt[3]{(x+1)^2}.$$

△ Функция определена и непрерывна на $\mathbb{R}$. График пересекает оси координат в точках $(0;0)$ и $(-1;0)$. Функция положительна при $x>0$ и отрицательна при $x<0$, $x\neq-1$. Так как $y(-1)=0$, то $x=-1$ — точка максимума функции. Очевидно,

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=+\infty,\quad y(x)\sim x^{5/3}\ \text{при}\ x\to+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}y(x)=-\infty,\quad y(x)\sim x^{5/3}\ \text{при}\ x\to-\infty.$$

Легко также видеть, что

$$y(x)\sim x \quad \text{при}\ x\to 0,$$

$$y(x)\sim-(x+1)^{2/3}\quad \text{при}\ x\to-1.$$

Делаем набросок графика: при «больших» значениях $|x|$ он «похож» на график степенной функции $y=x^{5/3}$, в окрестности

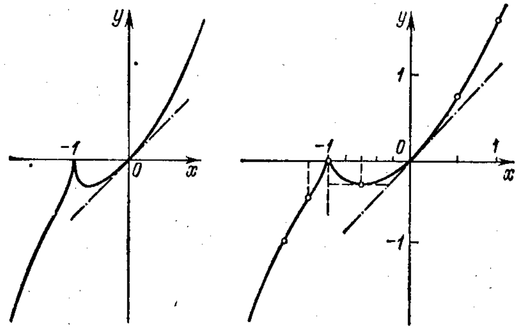
точки $x=-1$ — на график функции $y=-(x+1)^{2/3}$, а в окрестности точки $x=0$ сближается с прямой $y=x$ (рис. 92, a)).

Для уточнения рисунка найдем и исследуем производные

$$y'(x)=\frac{5(x+3/5)}{3(x+1)^{1/3}}, \tag{1}$$

$$y''(x)=\frac{10(x+6/5)}{9(x+1)^{4/3}}. \tag{2}$$

Из (1) следует, что функция возрастает на интервалах $(-\infty;-1)$, $(-3/5;+\infty)$ и убывает на интервале $(-1;-3/5)$.



а) б)

Рис. 92.

В точке $x=-1$ функция имеет максимум $(y(-1)=0)$, что было отмечено выше, а в точке $x=-3/5$ — минимум, $y(-3/5)=$ $=-\frac{3}{25}\sqrt[3]{20}\approx-0{,}3$. В точке $x=0$ график касается прямой $y=x$, а в точке $x=-1$ касательная к графику вертикальна, поскольку

$$\lim_{x\to-1-0}y'(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to-1+0}y'(x)=-\infty.$$

Из (2) следует, что на интервале $(-\infty;-6/5)$ функция выпукла вверх, а на интервалах $(-6/5;-1)$ и $(-1;+\infty)$ выпукла вниз. Точка $x=-6/5$ — точка перегиба функции,

$$y\left(-\frac{6}{5}\right)=-\frac{6}{25}\sqrt[3]{5}\approx-0{,}4,\quad y'\left(-\frac{6}{5}\right)=\sqrt[3]{5}\approx1{,}7.$$

Используя эти результаты и вычислив еще несколько точек графика, делаем более точный рисунок (рис. 92, $б$)). ▲

Пример 4. Построить график функции

$$y(x)=\sqrt{\frac{x^3-2x^2}{x-3}}.$$

△ Преобразуем формулу к виду

$$y(x)=|x|\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}.$$

Данная функция определена при $x \leqslant 2$ и при $x > 3$, положительна при $x \neq 0$ и $x \neq 2$, $y(0) = y(2) = 0$. Так как

$$\lim_{x \to 3+0} y(x) = +\infty,$$

то $x = 3$ — вертикальная асимптота. При $x \to \infty$ имеем

$$y(x) = |x| \left(\frac{1 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{3}{x}} \right)^{1/2} = |x| \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{-1/2} =$$

$$= |x| \left(1 - \frac{1}{x} + o(1/x)\right) \left(1 + \frac{3}{2x} + o(1/x)\right) =$$

$$= |x| \left(1 + \frac{1}{2x} + o(1/x)\right);$$

отсюда при $x \to +\infty$ получаем

$$y(x) = x + \frac{1}{2} + o(1),$$

а при $x \to -\infty$

$$y(x) = -x - \frac{1}{2} + o(1).$$

Значит, $y = x + \frac{1}{2}$ — асимптота при $x \to +\infty$, а $y = -x - \frac{1}{2}$ — асимптота при $x \to -\infty$.

Отметим еще, что $y(x) \sim 2\sqrt{2-x}$ при $x \to 2-0$ и $y(x) \sim \sim \sqrt{2/3}\,|x|$ при $x \to 0$ $(\sqrt{2/3} \approx 0{,}8)$.

Первый эскиз графика дан на рис. 93, *а*).

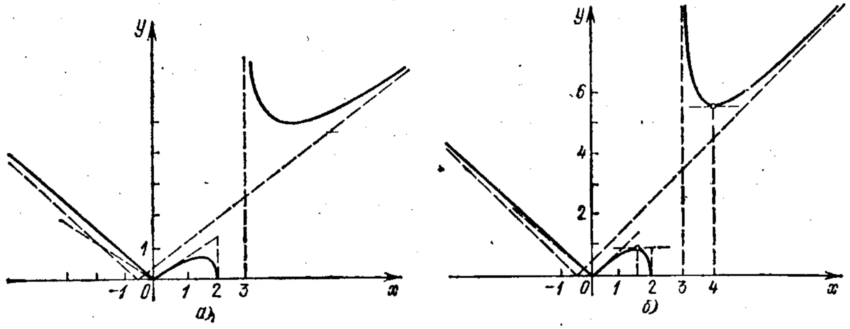


Рис. 93

Данная функция на своей области определения бесконечно дифференцируема всюду, кроме $x = 0$ и $x = 2$. Вычисляем производные

$$y'(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-3}} \, \frac{2x^2 - 11x + 12}{2(x-2)(x-3)} \operatorname{sign} x, \tag{3}$$

$$y''(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-3}} \, \frac{11x - 24}{4(x-2)^2(x-3)^2} \operatorname{sign} x. \tag{4}$$

Из (3) находим, что при $x = 3/2$ функция имеет максимум, равный $y(3/2) = \sqrt{3}/2 \approx 0{,}9$, а при $x = 4$ — минимум, $y(4) = 4\sqrt{2} \approx 5{,}7$. При $x \to 2-0$ касательная к графику становится вертикальной, так как

$$\lim_{x \to 2-0} y'(x) = +\infty.$$

Отметим еще, что

$$\lim_{x \to -0} y'(x) = -\sqrt{2/3}, \quad \lim_{x \to +0} y'(x) = \sqrt{2/3} \approx 0{,}8.$$

Из (4) следует, что при $x > 3$ и при $x < 0$ функция выпукла вниз, в частности, это означает, что график приближается к асимптоте сверху и при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. При $0 < x < 2$ функция выпукла вверх. График функции изображен на рис. 93, *б*). ▲

Пример 5. Построить график функции

$$y(x) = \frac{x^2 - 4}{x} e^{-5/(3x)}.$$

△ Функция определена при всех $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. График ее пересекает ось абсцисс в точках $(2; 0)$, $(-2; 0)$. Функция положительна на интервалах $(-2; 0)$, $(2; +\infty)$ и отрицательна на интервалах $(-\infty; -2)$, $(0; 2)$.

В точке $x = 0$ функция разрывна, и

$$\lim_{x \to -0} y(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +0} y(x) = -0.$$

Отсюда следует, что $x = 0$ — вертикальная асимптота графика при $x \to -0$; при этом $y(x) \to +\infty$.

Применяя формулу Тейлора для экспоненты, находим, что

$$y(x) = \left(x - \frac{4}{x}\right)\left(1 - \frac{5}{3x} + \frac{25}{18x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= x - \frac{5}{3} - \frac{47}{18x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to \infty.$$

Отсюда следует, что график имеет наклонную асимптоту $y = x - \frac{5}{3}$ и приближается к ней снизу при $x \to +\infty$, а при $x \to -\infty$ — сверху. Предварительный эскиз графика показан на рис. 94, *а*).

Вычисляем производные

$$y'(x) = \frac{(x-1)(3x^2 + 8x + 20)}{3x^3} e^{-5/3x}, \tag{5}$$

$$y''(x) = -\frac{47x^2 - 240x + 100}{9x^5} e^{-5/3x}. \tag{6}$$

Из (5) находим, что на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(1; +\infty)$ данная функция возрастает, а на интервале $(0; 1)$ убывает. При $x = 1$ функция имеет минимум, $y(1) = -3e^{-5/3} \approx -0{,}6$. Находим еще, что

$$\lim_{x \to +0} y'(x) = -\frac{20}{3} \lim_{x \to +0} \frac{1}{x^3} e^{-5/3x} = 0,$$

т. е. при $x \to +0$ касательная к графику становится горизонтальной.

Из (6) находим точки перегиба функции

$$x_1 = 10\frac{12-\sqrt{97}}{47} \approx 0{,}5, \quad x_2 = 10\frac{12+\sqrt{97}}{47} \approx 4{,}6$$

и вычисляем

$$y(x_1) \approx 0{,}2, \quad y(x_2) \approx 2{,}8.$$

На интервалах $(-\infty; 0)$ и $(x_1; x_2)$ функция выпукла вниз, а на интервалах $(0; x_1)$, $(x_2; +\infty)$ выпукла вверх.

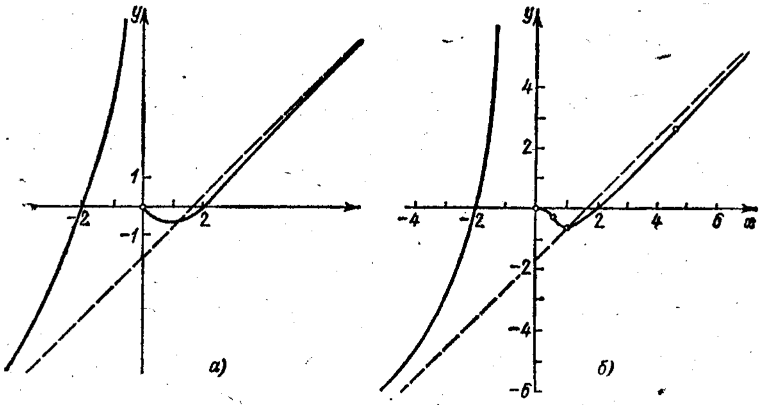


Рис. 94.

Вычислив, как и обычно, еще несколько точек графика, рисуем его (рис. 94, *б*)). ▲

При построении кривой, заданной параметрически, полезно предварительно построить графики функций $x(t)$ и $y(t)$. Удобно бывает разбить ось t на интервалы, на каждом из которых обе функции $x(t)$ и $y(t)$ монотонны. На каждом таком интервале эта пара функций определяет функцию $y(x)$ или $x(y)$, и здесь можно использовать все ранее указанные приемы исследования и построения графиков.

Пример 6. Построить кривую

$$x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}, \quad y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}.$$

△ Строим графики функций $x(t)$ и $y(t)$ (рис. 95, *а*), *б*)). Укажем некоторые результаты исследования этих функций: $x = -(t+1)/4$ и $t = 1$ — асимптоты графика $x(t)$, $t = 1$ — асимптота графика $y(t)$,

$$x'_t = \frac{t(2-t)}{4(1-t)^2}, \quad y'_t = \frac{t^2(2t-3)}{8(t-1)^2},$$

$t = 0$ — точка минимума функции $x(t)$, $x(0) = 0$,

$t = 2$ — точка максимума функции $x(t)$, $x(2) = -1$,

$t = 3/2$ — точка минимума функции $y(t)$, $y(3/2) = 27/32$.

Отметим дополнительно, что:

а) $x \sim -\frac{1}{4}(t+1)$, $y \sim \frac{1}{8}(t^2+t+1)$ при $t \to -\infty$ и при $t \to +\infty$; отсюда следует, что $y \sim \frac{1}{8}(16x^2+4x+1)$ при $t \to -\infty$ и при $t \to +\infty$.

б) $x \sim t^2/4$, $y \sim -t^3/8$ при $t \to 0$, откуда следует, что $x \sim y^{2/3}$ при $t \to 0$.

в) $x \sim \frac{1}{4(1-t)}$, $y \sim \frac{1}{8(t-1)}$ при $t \to 1$, откуда вытекает, что $y \sim -x/2$ при $t \to 1$.

Рассмотрим пять интервалов: $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 3/2)$, $(3/2; 2)$, $(2; +\infty)$. На первом интервале значения x и y убывают от $+\infty$ до 0. Из а) следует, что

$$y \sim \frac{1}{8}(16x^2 + 4x + 1)$$

при $x \to +\infty$

(это здесь соответствует тому, что $t \to -\infty$), а из б) следует, что

$$x \sim y^{2/3}, \text{ или } y \sim x^{3/2}$$

при $x \to +0$

(это соответствует тому, что $t \to -0$). По этим данным и делаем набросок первой части кривой (рис. 96).

На втором интервале значения x возрастают от 0 до $+\infty$, а значения y убывают от 0 до $-\infty$. При этом из б) и в) следует, что

$$x \sim y^{2/3}, \text{ а } y \sim -x^{3/2}$$

при $x \to +0$,

и

$$y \sim -x/2 \text{ при } x \to +\infty$$

(здесь это соответствует тому, что $t \to 1-0$). Выясним, имеет ли эта часть (говорят также — ветвь) кривой асимптоту при $x \to +\infty$. Находим, что

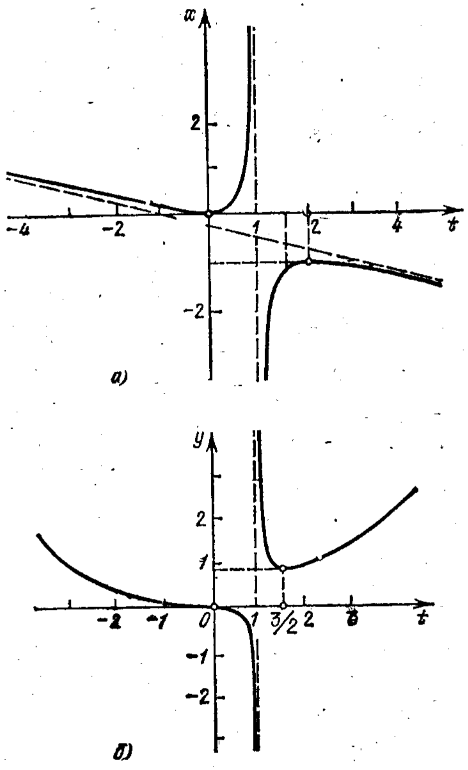


Рис. 95.

$$\lim_{t\to 1-0} \frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{t\to 1-0}\left(y(t) + \frac{1}{2}x(t)\right) = \frac{1}{8}.$$

Следовательно, прямая

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$$

— наклонная асимптота кривой. В соответствии с этими результатами изображена вторая часть кривой.

На интервале $(1; 3/2)$ значения x возрастают от $-\infty$ до $x(3/2)=-9/8$, а значения y убывают от $+\infty$ до $27/32$. Из в) следует, что $y\sim -x/2$ при $x\to-\infty$ (это соответствует тому, что $t\to 1+0$). Как и в предыдущем случае, устанавливаем, что

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$$

— асимптота этой части кривой при $x\to-\infty$ (рис. 96).

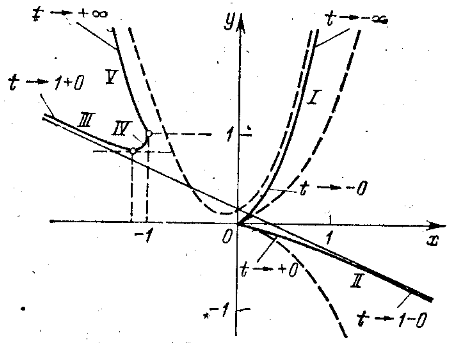


Рис. 96.

На интервале $(3/2; 2)$ значения x возрастают от $-9/8$ до -1, а значения y возрастают от $27/32$ до $y(2)=1$.

На интервале $(2; +\infty)$ значения x убывают от -1 до $-\infty$, а значения y возрастают от 1 до $+\infty$, причем согласно а) $y\sim\frac{1}{8}(16x^2+4x+1)$ при $x\to-\infty$.

На рис. 96 указано, каким значениям t соответствует та или иная часть кривой.

На каждом из рассмотренных интервалов функции $x(t)$ и $y(t)$ определяют функцию $y(x)$ (и функцию $x(y)$). Для уточнения рисунка кривой обратимся к производным этой функции. Находим

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=-\frac{t\left(t-\frac{3}{2}\right)}{t-2},$$

$$y''_{xx}=\frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3}$$

при $t\neq1$, $t\neq0$, $t\neq2$. Рассматривая эти производные на введенных интервалах, устанавливаем, что I часть кривой является графиком возрастающей, выпуклой вниз функции ($y'_x>0$, $y''_{xx}>0$), II часть — график убывающей, выпуклой вверх функции ($y'_x<0$, $y''_{xx}<0$), III часть — график убывающей, выпуклой вниз функции ($y'_x<0$, $y''_{xx}>0$), IV часть — график возрастающей, выпуклой вниз функции ($y'_x>0$, $y''_{xx}>0$), V часть — график убывающей функции ($y'_x<0$). В последнем случае кривая имеет точку перегиба при $t=3$, $x=x(3)=-9/8$, $y=y(3)=27/16$. Кривая выпукла вверх при $x\in(-9/8; -1)$ и выпукла вниз при $x\in(-\infty; -9/8)$.

Отметим еще, что $\lim\limits_{x\to+0}y'_x=0$ и для первой и для второй частей кривой (соответственно $t\to-0$, $t\to+0$), кроме того, $y'_x\big|_{x=-9/8}=y'_x\big|_{t=3/2}=0$, т. е. касательные к кривой в начале координат и в точке $(-9/8; 27/32)$ горизонтальны. В точке $(-1; 1)$ касательная к кривой вертикальна, так как $\lim\limits_{x\to-1}y'_x=\lim\limits_{t\to2}y'_x=\infty$.

С учетом этих новых сведений делаем более точный рисунок кривой (рис. 97).

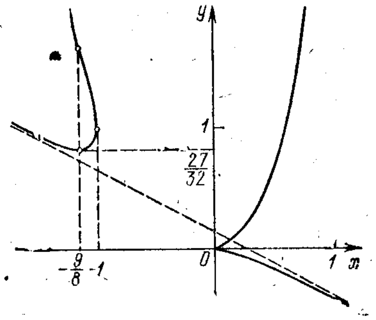


Рис. 97.

Пример 7. Построить график уравнения

$$x^3+y^3=3xy \quad (\textit{декартов лист}). \tag{7}$$

△ В примере 5 § 11 (рис. 73—75) уже было проведено предварительное исследование этой кривой, являющейся в полярных координатах ($x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$) графиком функции

$$r=\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}. \tag{8}$$

Дополним это исследование, определив экстремумы и направления выпуклости и дав тем самым обоснование рис. 75.

Если $\cos\varphi=0$, то из (8) следует, что и $r=0$, т. е. получаем точку $x=y=0$. При $\cos\varphi\neq0$, полагая $t=\operatorname{tg}\varphi$, придем к параметрическому заданию кривой

$$x=\frac{3t}{t^3+1},\quad y=\frac{3t^2}{t^3+1}. \tag{9}$$

Из (9) и из того, что

$$x'_t=\frac{3(1-2t^3)}{(t^3+1)^2}, \tag{10}$$

следует, что функция $x(t)$ строго возрастает на $(-\infty; -1)$ от 0 до $+\infty$ и на $\left(-1; 1/\sqrt[3]{2}\right)$ от $-\infty$ до $\sqrt[3]{4}$ и строго убывает на $\left(1/\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$ от $\sqrt[3]{4}$ до 0 (рис. 98). На каждом из этих интервалов функция $x(t)$ имеет обратную, и, следовательно, функции $x(t)$ и $y(t)$ определяют функцию $y(x)$ при $x\in(0; +\infty)$ (I часть кривой, рис. 99), при $x\in\left(-\infty; \sqrt[3]{4}\right)$ (II часть кривой) и при $x\in\left(0; \sqrt[3]{4}\right)$ (III часть). Находим

$$y'_t=\frac{3t(2-t^3)}{(t^3+1)^2}$$

и

$$y'_x=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}. \tag{11}$$

а также

$$y''_{xx} = \frac{2(1+t^3)^4}{3(1-2t^3)^3}. \qquad (12)$$

Из (11) и (12) следует, что $y'_x<0$ при $t\in(-\infty;-1)$, т. е. $y(x)$ убывает при возрастании x от 0 до $+\infty$ (I часть кривой), а так как $y''_{xx}>0$, то кривая выпукла вниз и, следовательно, подходит к асимптоте сверху. При $t\in(-1;\ 1/\sqrt[3]{2})$ функция

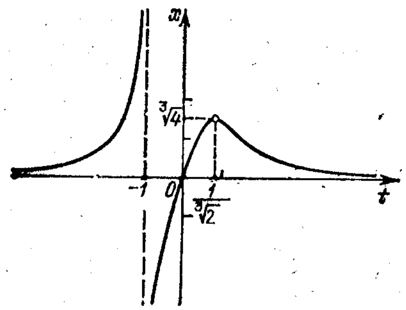


Рис. 98.

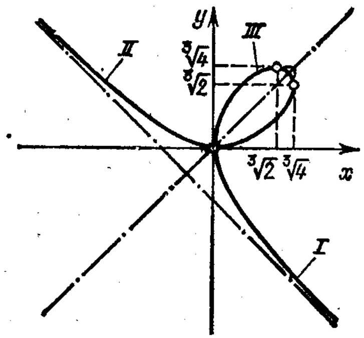


Рис. 99.

$y(x)$ имеет минимум при $t=0$, т. е. $x=0$; при возрастании x от $-\infty$ до $x|_{t=1/\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{4}$ значения $y(x)$ сначала убывают от $+\infty$ до 0 (при $x=0$), а затем возрастают от 0 до $y|_{t=1/\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{2}$. При этом $y''_{xx}>0$, кривая выпукла вниз и при $x\to-\infty$ подходит к асимптоте сверху. Поскольку $\lim\limits_{t\to\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-0} y'_x=+\infty$ и $\lim\limits_{t\to\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+0} y'_x=-\infty$, касательная к кривой в точке $x=\sqrt[3]{4}$, $y=\sqrt[3]{2}$ (соответствует $t=1/\sqrt[3]{2}$) вертикальна.

На третьем интервале $t\in(1/\sqrt[3]{2};\ +\infty)$ функция $y(x)$ имеет максимум при $t=\sqrt[3]{2}$, а $x|_{t=\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{2}$. Этот максимум равен $y|_{t=\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{4}$. Поскольку $y''_{xx}<0$, кривая выпукла вверх. Если $x\to+0$, что соответствует тому, что $t\to+\infty$, то $y'_x\to+\infty$, т. е. в точку $(0;0)$ кривая «входит» с вертикальной касательной.

Таким образом, получено полное обоснование рис. 99 и найдены две дополнительные точки $(\sqrt[3]{4};\ \sqrt[3]{2})$ и $(\sqrt[3]{2};\ \sqrt[3]{4})$ с вертикальной и горизонтальной касательными. ▲

21.1. Привести пример такой дифференцируемой функции $y=f(x)$, $x\in(0;+\infty)$, что:

1) Ее график имеет асимптоту при $x\to+\infty$, но $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ не существует.

2) Ее график не имеет асимптоты при $x\to+\infty$, но $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ существует.

21.2. График функции $y=f(x)$ имеет наклонную асимптоту при $x\to+\infty$. Доказать, что если $f''(x)>0$ при $x\geqslant x_0$, то график приближается к этой асимптоте сверху, а если $f''(x)<0$, то график приближается к асимптоте снизу.

Построить график функции (21.3—21.20):

21.3. 1) $y=x^3-3x^2+4$. 2) $y=-x^3+4x-3$. 3) $y=(x-1)^2(x+2)$. 4) $y=\frac{x^3}{4}-3x+4$. 5) $y=x(x-1)^3$. 6) $y=(x+2)^2(x-1)^2$. 7) $y=(x-1)^3(x+1)^2$. 8) $y=32x^2(x^2-1)^3$.

21.4. 1) $y=\frac{x^2+x-1}{x^2-2x+1}$. 2) $y=\frac{4+x-2x^2}{(x-2)^2}$. 3) $y=\frac{20x^2}{(x-1)^3}$. 4) $y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$. 5) $y=\frac{x^3}{x-1}$. 6) $y=\frac{x^3-2x^2-x+2}{x}$. 7) $y=\frac{1+x^2}{1+(x-2)^2}$. 8) $y=\frac{5x^2+42x+77}{x^2+7x+14}$.

21.5. 1) $y=\frac{x^3}{x^2-1}$. 2) $y=\frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$. 3) $y=\frac{(x-5)^3}{(x-7)^2}$. 4) $y=\frac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$. 5) $y=x+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}$. 6) $y=(x+1)\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2$.

21.6. 1) $y=\frac{x^4}{x^3+2}$. 2) $y=\frac{x^4}{(x+1)^3}$. 3) $y=3x+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^3}$. 4) $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4$. 5) $y=\frac{x^5}{(x^2-1)^2}$. 6) $y=\frac{(x-1)^5}{(x-2)^4}$. 7) $y=\frac{x^5-8}{x^4}$. 8) $y=\frac{x^5}{x^4-1}$.

21.7. 1) $y=x+\sqrt{x^2-1}$. 2) $y=x-\sqrt{x^2-2x}$. 3) $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$. 4) $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}$. 5) $y=\sqrt{x^2+1}-2\sqrt{x+1}$. 6) $y=\frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}+4\sqrt{x}$.

21.8. 1) $y=\sqrt{2x^3+9x^2}$. 2) $y=\sqrt{x^2-x^3}$. 3) $y=\sqrt{x^3-3x}$. 4) $y=x^2\sqrt{x+1}$. 5) $y=x(x+1)^{3/2}$. 6) $y=\sqrt[4]{x^4-4x^3}$.

21.9. 1) $y=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$. 2) $y=\frac{x+8}{\sqrt{x^2+4x+16}}$. 3) $y=\frac{8x}{\sqrt{x^2-4}}$. 4) $y=\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}$. 5) $y=\frac{\sqrt{x^2-4x}}{2-x}$. 6) $y=\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.

7) $y=\frac{3x-2}{\sqrt{x^2-1}}$. 8) $y=\sqrt{\frac{(x+6)^2}{x^2-4}}$. 9) $y=4\sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^3}}$.

10) $y=\sqrt{\frac{3x^2-4}{x^3}}$. 11) $y=\sqrt{\frac{x^2}{3}-\frac{2}{3x}}$.

12) $y=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$. 13) $y=\frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x}{2}$.

21.10. 1) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$. 2) $y=\sqrt[3]{x^2(3-x)}$.

3) $y=\sqrt[3]{x(x-1)^2}$. 4) $y=\sqrt[3]{x^3-4x}$.

5) $y=x\sqrt[3]{(x-5)^2}$. 6) $y=(x+1)^3\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

7) $y=(1+x)x^{2/3}$. 8) $y=x^3(x-1)^{2/3}$.

9) $y=(x^2-4)^{2/3}$. 10) $y=(x^2+8x+12)^{2/3}$.

11) $y=\sqrt[3]{x(3-x)^2}-x$. 12) $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2-4}$.

21.11. 1) $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$. 2) $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$. 3) $y=\frac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

4) $y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{1+x}}$. 5) $y=\sqrt[3]{\frac{(3x-2)^2}{x-1}}$. 6) $y=\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2}$.

7) $y=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}$. 8) $y=\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x^2}$.

21.12. 1) $y=|x|\sqrt{1-x^2}$. 2) $y=x\sqrt{|x^2-1|}$.

3) $y=4\frac{\sqrt{|x-1|}}{x-2}$. 4) $y=\sqrt{|3x^2-x^3|}$.

5) $y=(x+1)\sqrt{|x^2-1|}$. 6) $y=\frac{\sqrt{1+|x-2|}}{1+|x|}$.

7) $y=(x^2-1)\sqrt{x+1}$. 8) $y=\frac{\sqrt{|x|-1}}{x-2}$.

9) $y=|x|\sqrt[3]{1+3x}$. 10) $y=\sqrt[3]{x^2|2-x|}$.

21.13. 1) $y=e^x-x$. 2) $y=xe^{-2x}$. 3) $y=x^2e^{-x}$.

4) $y=x^3e^{-x}$. 5) $y=(x^2-2)e^{-2x}$.

6) $y=(1-x)e^{3x+1}$. 7) $y=e^{1-x^2}$.

8) $y=e^{4x-x^2}$. 9) $y=xe^{-x^2/2}$.

10) $y=(x^2+2)e^{-x^2}$. 11) $y=\frac{e^{-x}}{1-x}$.

21.14. 1) $y=e^{(1-x)/(1+x)}$. 2) $y=x^2e^{1/x}$.

3) $y=(x-2)e^{-1/x}$. 4) $y=\frac{x^2+2x-3}{x}e^{1/x}$. 5) $y=xe^{1/x^2}$.

21.15. 1) $y=\ln x-x+1$. 2) $y=\frac{\ln x}{x}$. 3) $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

4) $y=x^2\ln x$. 5) $y=x\ln^2 x$. 6) $y=\frac{\ln^2 x}{x}$.

7) $y=\frac{x}{\ln x}$. 8) $y=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{6}{x+1}$. 9) $y=x^2-2\ln x$.

21.16. 1) $y=\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x$. 2) $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$.

3) $y=\sin x-\sin^2 x$. 4) $y=\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x$.

5) $y=\cos 3x+3\cos x$.

21.17. 1) $y=\sin x\sin 3x$. 2) $y=\cos x\cos 2x$.

3) $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$.

21.18. 1) $y=\frac{\cos 2x}{\cos x}$. 2) $y=\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$. 3) $y=2x-\operatorname{tg} x$.

21.19. 1) $y=\frac{x}{2}-\operatorname{arctg} x$. 2) $y=\frac{1}{\operatorname{arcctg} x}$.

3) $y=x\operatorname{arctg} x$. 4) $y=\frac{x}{2}+2\operatorname{arcctg} x$.

5) $y=\frac{3}{2}x-\arccos\frac{1}{x}$. 6) $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

7) $y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$. 8) $y=\frac{x}{2}-\arccos\frac{2x}{1+x^2}$.

21.20. 1) $y=e^{\cos x}$. 2) $y=e^{-\operatorname{arctg} x}$. 3) $y=\sin x-\ln\sin x$.

4) $y=x^x$. 5) $y=(1+x)^{1/x}$. 6) $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

21.21. Построить графики функций без исследования выпуклости:

1) $y=x^{1/x}$. 2) $y=x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $x>0$. 3) $y=\cos^3 x+\sin^3 x$.

4) $y=\sin 5x-5\sin x$. 5) $y=\frac{\sin^2 x}{2-\sin x}$.

6) $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x$. 7) $y=2\ln x-5\operatorname{arctg} x$.

8) $y=\frac{1}{1+x^2}e^{1/(1-x^2)}$. 9) $y=\frac{x^2}{x^2-4}e^{1/x}$.

21.22. Построить графики функций $y=f(x)$, заданных параметрически уравнениями:

1) $x=t^3+3t+1$, $y=t^3-3t+1$.

2) $x=t^3-3\pi$, $y=t^3-6\operatorname{arctg} t$.

3) $x=\frac{t^3}{1+t^2}$, $y=\frac{t^3-2t^2}{1+t^2}$.

4) $x=\ln\sin(t/2)$, $y=\ln\sin t$.

5) $x=t-\sin t,\quad y=1-\cos t$ (*циклоида*).

6) $x=\cos t+\ln \operatorname{tg}(t/2),\quad y=\sin t$ (*трактриса*).

Построить кривые (21.23—21.25):

21.23. 1) $x=t^3+2t^2+t,\quad y=-2+3t-t^3$.

2) $x=(t-1)^2(t-2),\quad y=(t-1)^2(t-3)$.

3) $x=\dfrac{1}{t(t+1)},\quad y=\dfrac{(t+1)^2}{t}$. 4) $x=\dfrac{t^2}{t-1},\quad y=\dfrac{t^2-1}{t}$.

5) $x=\dfrac{(t+1)^2}{t},\quad y=\dfrac{t+1}{t+2}$. 6) $x=\dfrac{t^2}{t^2-1},\quad y=\dfrac{t^2+1}{t+2}$.

7) $x=\dfrac{t^2+1}{t},\quad y=\dfrac{t^3+1}{t^2}$.

21.24. 1) $x=\dfrac{t^2+6t+5}{3},\quad y=\dfrac{t^3-54}{2t}$.

2) $x=\dfrac{t^2}{1-2t},\quad y=\dfrac{t^3}{1-2t}$. 3) $x=\dfrac{t^2}{1+t^3},\quad y=\dfrac{t^3}{1+t^3}$.

4) $x=t^3-3t,\quad y=\left(\dfrac{t-1}{t}\right)^2$. 5) $x=\dfrac{1}{t-t^2},\quad y=\dfrac{1}{t-t^3}$.

6) $x=\dfrac{1}{t^3-t^2},\quad y=\dfrac{1}{t^2-t}$. 7) $x=\dfrac{1}{t-t^5},\quad y=\dfrac{t^4}{1-t^4}$.

8) $x=\sqrt{2}\,\dfrac{t+t^3}{1+t^4},\quad y=\sqrt{2}\,\dfrac{t-t^3}{1+t^4}$.

21.25. 1) $x=e^t-t,\quad y=e^{2t}-2t$. 2) $x=te^t,\quad y=te^{-t}$.

3) $x=(t^3-2t^2+3t-4)\,e^t,\quad y=(t^3-2t^2+4t-4)\,e^t$.

4) $x=\dfrac{e^t}{t},\quad y=(t-1)^2e^t$. 5) $x=\dfrac{e^t}{t+1},\quad y=\dfrac{e^{-t}}{t+1}$.

6) $x=2t+\ln|t-1|,\quad y=t+\ln|t-1|$.

7) $x=t\ln t,\quad y=\dfrac{\ln t}{t}$.

8) $x=2t^2,\quad y=\dfrac{t^2}{2}-3\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|$.

9) $x=\dfrac{\sin t+\cos t}{\sin t},\quad y=\dfrac{\cos 2t}{\sin t}$.

10) $x=\operatorname{ctg}2t,\quad y=\dfrac{2\cos 2t-1}{2\cos t}$.

11) $x=2\cos t-\cos 2t,\quad y=2\sin t-\sin 2t$.

12) $x=2\cos 2t,\quad y=2\cos 3t$.

13) $x=\sin 2t,\quad y=\sin 3t$.

14) $x=\cos t+t\sin t,\quad y=\sin t-t\cos t,\quad t\geqslant 0$.

15) $x=e^t\cos t,\quad y=e^t\sin t$.

Построить кривую (21.26—21.27):

21.26. 1) $x^3-y^3=1$. 2) $x^4+y^4=1$.

3) $y^2(1-x)=x^2(1+x)$. 4) $3y^2x=x^3-2$.

5) $y^2=2x^3-x^4$. 6) $y^2=9(x^4-x^6)$.

7) $y^2x^2=4(x-1)$. 8) $y^2(2-x)=x^3$.

9) $y^2x^4=(x^2-1)^3$. 10) $y^2(x^2-1)=x^4-4x^2$.

11) $(x-1)\left(y^2-\dfrac{x^2}{3}\right)=\dfrac{4}{3}x^2$.

21.27. 1) $(x-y+1)(x+y-1)=1$.

2) $(x-2y)^2+(4x+2y)^2=4$. 3) $x^2y^2+y=1$.

4) $xy^2+x^2y=1$. 5) $xy(x-y)+x+y=0$.

6) $x^3+y^3=6x^2$.

21.28. Кривую, данную как график уравнения, задать параметрически и построить ее:

1) $x^4-y^4=4x^2y$. 2) $(x+y)^3=xy$.

3) $(x+y)^4=x^2+y^2$. 4) $x^4-2x^2y^2+y^3=0$.

5) $x^3-y^3+2x-y=0$. 6) $(x^2-y^2)(x-y)=1$.

7) $x^{2/3}+y^{2/3}=1$. 8) $x^{4/3}-y^{4/3}=1$.

21.29. Построить кривую, перейдя к полярным координатам:

1) $(x^2+y^2)\,x=y$. 2) $(x^2+y^2)^2=xy$. 3) $x^4+y^4=x^2+y^2$.

4) $x^4+y^4=2xy$. 5) $x^4-y^4=xy$. 6) $x^4-y^4=x^2-2y^2$.

7) $(x^2+y^2-2x)^2=x^2+y^2$. 8) $(x^2+y^2-x)^2=4(x^2+y^2)$.

21.30. Построить кривую:

1) $x^4+y^4-6y^3+8x^2y=0$.

2) $(x^2+y^2)^3=27x^2y^2$. 3) $x^4+2y^3=4x^2y$.

4) $(x^2-y^2)(x-y)=4x^2$. 5) $x^2y^2+y^4=4x^2$.

6) $x^3+y^3=x^2+y^2$. 7) $x^2y^2=x^3-y^3$. 8) $x^y=y^x$.

21.31. Построить график функции в полярных координатах:

1) $r=|\sin 2\varphi|$. 2) $r=\cos 3\varphi$. 3) $r=\operatorname{tg}2\varphi$. 4) $r=\dfrac{1}{\sqrt{\sin 3\varphi}}$.

5) $r=2+\cos\varphi$. 6) $r=1+\cos\varphi$. 7) $r=1+2\cos\varphi$.

8) $r=1-2\cos\varphi$. 9) $r=\dfrac{2}{\cos\varphi}-1$. 10) $r=1+\operatorname{tg}\varphi$.

§ 22. Задачи на нахождение наибольших и наименьших значений

В прикладных задачах при нахождении наибольшего или наименьшего значения дифференцируемой функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ или на интервале $(a; b)$ уравнение $f'(x) = 0$ обычно имеет единственное решение $x_0 \in (a; b)$, причем производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак на интервале $(a; x_0)$ и противоположный знак на интервале $(x_0; b)$. В этом случае число $f(x_0)$ является не только локальным экстремумом функции f, но и ее наибольшим значением на интервале $(a; b)$ или отрезке $[a; b]$, если производная при переходе через точку x_0 меняет знак плюс на минус, и наименьшим значением, если производная при переходе через точку x_0 меняет знак минус на плюс.

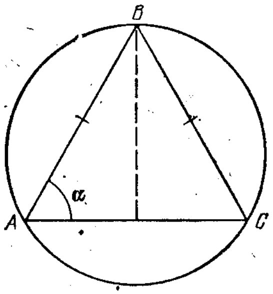


Рис. 100.

Пример 1. Среди всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, найти треугольник с наибольшим периметром.

△ Пусть треугольник ABC вписан в круг радиуса R, причем $AB = BC$ (рис. 100). Обозначим $\angle BAC = \alpha$. По теореме синусов $AB = BC = 2R \sin \alpha$, $AC = 2R \sin(\pi - 2\alpha) = 2R \sin 2\alpha$, поэтому периметр треугольника ABC равен

$$P(\alpha) = 2R(2\sin\alpha + \sin 2\alpha),$$

где $0 < \alpha < \pi/2$, откуда находим

$$P'(\alpha) = 4R(\cos 2\alpha + \cos\alpha) = 4R(2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1) =$$
$$= 4R(2\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1).$$

Уравнение $P'(\alpha) = 0$ имеет на интервале $(0; \pi/2)$ единственное решение $\alpha = \pi/3$, причем $P'(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0; \pi/3)$ и $P'(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/3; \pi/2)$. Следовательно, число $P(\pi/3)$ является наибольшим значением функции $P(\alpha)$ на интервале $(0; \pi/2)$. Но если $\angle BAC = \alpha = \pi/3$, то $\angle BCA = \pi/3$ и, значит, $\angle ABC = \pi/3$, т. е. ABC — равносторонний треугольник. Итак, среди всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, наибольший периметр имеет равносторонний треугольник. ▲

Пример 2. Определить размеры закрытой коробки объема v с квадратным основанием, на изготовление которой расходуется наименьшее количество материала.

△ Пусть x — сторона основания коробки, h — высота коробки, S — ее полная поверхность. Тогда

$$S = 2x^2 + 4xh, \quad v = x^2 h,$$

откуда

$$S(x) = 2x^2 + \frac{4v}{x}$$

и, следовательно,

$$S'(x) = 4\left(x - \frac{v}{x^2}\right).$$

Уравнение $S'(x) = 0$ при $x > 0$ имеет единственное решение $x_0 = \sqrt[3]{v}$, причем при переходе через точку x_0 функция $S'(x)$ меняет знак минус на плюс. Следовательно, x_0 — точка минимума функции $S(x)$, а число $S(x_0)$ является наименьшим значением этой функции при $x > 0$. Из формулы $v = x^2 h$ следует, что если $x = \sqrt[3]{v}$, то $h = \sqrt[3]{v}$. Таким образом, высота коробки должна быть равна стороне основания, т. е. коробка должна быть кубом с ребром $\sqrt[3]{v}$. ▲

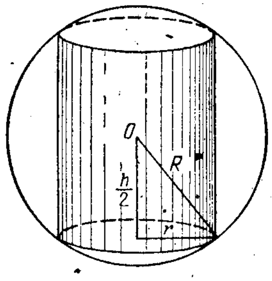


Рис. 101.

Пример 3. Найти радиус основания цилиндра наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

△ Пусть r и h — радиус основания и высота цилиндра, вписанного в шар радиуса R, v — объем цилиндра (рис. 101). Тогда

$$v = \pi r^2 h, \quad (h/2)^2 + r^2 = R^2,$$

откуда

$$v = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}, \quad \text{где} \quad 0 < r < R.$$

Обозначим $t = r^2$, тогда

$$v = 2\pi t \sqrt{R^2 - t}, \qquad 0 < t < R^2.$$

Рассмотрим функцию

$$v^2 = 4\pi^2 t^2 (R^2 - t).$$

Так как $v \geqslant 0$, то функция $v(t)$ имеет на интервале $(0; R^2)$ те же точки экстремума, что и функция

$$v^2/4\pi^2 = t^2(R^2 - t) = f(t).$$

Найдем критические точки функции $f(t)$, решая уравнение

$$f'(t) = 2tR^2 - 3t^2 = 0.$$

Это уравнение имеет на интервале $(0; R^2)$ единственное решение $t_0 = 2R^2/3$, причем точка t_0 является точкой максимума функции, а число $f(t_0)$ — наибольшим значением функции $f(t)$ на интервале $(0; R^2)$. Следовательно, при $r = \sqrt{t_0} = R\sqrt{2/3}$ функция v принимает наибольшее значение, т. е. радиус основания цилиндра, вписанного в шар радиуса R и имеющего наибольший объем, равен $R\sqrt{2/3}$. ▲

22.1. Среди всех прямоугольников, имеющих данную площадь S, найти прямоугольник: 1) с наименьшим периметром; 2) с наименьшей диагональю.

22.2. Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг радиуса R.

22.3. Найти на гиперболе $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ точку, ближайшую к точке $(3; 0)$.

22.4. Найти на параболе $y = x^2$ точку, ближайшую к точке $A(2; 1/2)$.

22.5. Найти наибольшую площадь прямоугольника, две вершины которого лежат на осях Ox и Oy прямоугольной системы координат, третья — в точке $(0; 0)$, а четвертая — на параболе $y = 3 - x^2$.

22.6. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точку $A(1; 2)$ и отсекающей от первого координатного угла треугольник наименьшей площади.

22.7. Найти длину боковой стороны трапеции, имеющей наименьший периметр среди всех равнобедренных трапеций с заданной площадью S и углом α между боковой стороной и нижним основанием.

22.8. Через точку $A(2; 1/4)$ проводятся прямые, пересекающие положительные полуоси в точках B и C. Найти уравнение той прямой, для которой отрезок BC имеет наименьшую длину.

22.9. Найти острые углы прямоугольного треугольника, имеющего наибольшую площадь среди всех треугольников, у которых сумма длин одного из катетов и гипотенузы постоянна.

22.10. Найти наименьшую длину отрезка, который делит равносторонний треугольник со стороной a на две равновеликие фигуры.

22.11. Определить углы треугольника ABC с наибольшей площадью, если задана длина его основания BC и известно, что угол BAC равен α.

22.12. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

так, что стороны прямоугольника параллельны осям эллипса.

22.13. Вычислить наибольшую площадь трапеции, вписанной в полукруг радиуса R так, что нижним основанием трапеции служит диаметр полукруга.

22.14. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Определить радиус полукруга, при котором площадь сечения будет наибольшей, если периметр сечения равен p.

22.15. Через какую точку эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

следует провести касательную, чтобы площадь треугольника, образованного этой касательной и положительными полуосями Ox и Oy, была наименьшей?

22.16. Лист картона имеет форму прямоугольника со сторонами a и b. Вырезая по углам этого прямоугольника квадраты и сгибая выступающие части крестообразной фигуры, получим открытую сверху коробку, высота которой равна стороне квадрата. Какой должна быть сторона квадрата, чтобы объем коробки был наибольшим?

22.17. Из трех досок одинаковой ширины нужно сколотить желоб. При каком угле наклона боковых стенок площадь поперечного сечения желоба будет наибольшей?

22.18. Найти высоту правильной треугольной призмы наибольшего объема, вписанной в шар радиуса R.

22.19. Круг радиуса R разделен на два сегмента прямой l, отстоящей от центра круга на расстояние h. Среди всех прямоугольников, вписанных в меньший из этих сегментов, найти прямоугольник с наибольшей площадью.

22.20. Найти наибольший объем цилиндра, периметр осевого сечения которого равен a.

22.21. Вычислить наибольший объем цилиндра, полная поверхность которого равна S.

22.22. Консервная банка имеет цилиндрическую форму. Найти наиболее выгодные размеры банки, т. е. определить отношение диаметра основания к высоте цилиндра, имеющего при заданной полной поверхности наибольший объем.

22.23. Каким должен быть котел, состоящий из цилиндра, завершенного полусферами, со стенками заданной толщины, чтобы при данной вместимости v на него пошло наименьшее количество материала?

22.24. Определить отношение радиуса основания к высоте цилиндра, имеющего при данном объеме наименьшую полную поверхность.

22.25. Найти наибольшую полную поверхность цилиндра, вписанного в шар радиуса R.

22.26. Из всех цилиндров, вписанных в куб с ребром a так, что ось каждого цилиндра совпадает с диагональю куба, а окружности оснований касаются граней куба, найти цилиндр наибольшего объема.

22.27. Найти высоту конуса наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

22.28. Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

22.29. В конус, радиус основания которого равен R, а высота H, вписан цилиндр наибольшего объема. Найти радиус основания и высоту этого цилиндра.

22.30. Из круглого листа жести вырезают сектор и свертывают его в коническую воронку. Каким должен быть угол сектора, чтобы воронка имела наибольший объем?

22.31. Найти наименьшую боковую поверхность конуса, имеющего объем v.

22.32. Найти наибольший объем конуса с данной образующей l.

22.33. Найти наименьший объем конуса, описанного около полушара радиуса r (предполагается, что основания полушара и конуса лежат в одной плоскости и концентричны).

22.34. Рассмотрим пучок прямых, проходящих через точку $M(a; b)$, где $a > 0$, $b > 0$, и пересекающих положительные полуоси Ox и Oy. Найти наименьшую длину отрезка PQ, где P и Q — точки пересечения прямой пучка с положительными полуосями.

22.35. Камень брошен с заданной начальной скоростью под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, при каком α дальность полета камня будет наибольшей.

22.36. Внутреннее сопротивление гальванического элемента равно r. При каком внешнем сопротивлении мощность тока, получаемого от этого элемента во внешней цепи, будет наибольшей?

22.37. В чашку, которая имеет форму полушара радиуса R, опущен однородный стержень длиной l, где $2R < l \leqslant 4R$. Найти положение равновесия стержня.

22.38. К реке, ширина которой равна a, под прямым углом построен канал шириной b. Найти наибольшую длину бревна, которое можно провести из реки в этот канал.

22.39. Чтобы уменьшить трение жидкости о стенки канала, площадь, смачиваемая водой, должна быть возможно меньшей. Показать, что лучшей формой открытого прямоугольного канала с заданной площадью поперечного сечения является такая, при которой ширина канала в 2 раза больше его высоты.

22.40. Из круглого бревна вытесывается балка с прямоугольным поперечным сечением. Считая, что прочность балки пропорциональна ah^2, где a — основание, h — высота прямоугольника, найти такое отношение h/a, при котором балка будет иметь наибольшую прочность.

22.41. Сосуд с вертикальной стенкой высоты h стоит на горизонтальной плоскости. Из отверстия в стенке сосуда бьет струя. Определить положение отверстия, при котором дальность струи будет наибольшей, если скорость вытекающей жидкости равна $\sqrt{2gx}$, где x — глубина отверстия (закон Торричелли).

22.42. Завод A нужно соединить шоссейной дорогой с прямолинейной железной дорогой, на которой расположен поселок B. Расстояние AC от завода до железной дороги равно a, а расстояние BC по железной дороге равно b. Стоимость перевозок грузов по шоссе в k раз $(k > 1)$ выше стоимости перевозок по железной дороге. В какую точку D отрезка BC нужно провести шоссе от завода, чтобы стоимость перевозок грузов от завода A к поселку B была наименьшей?

22.43. На какой высоте над центром круглого стола радиуса R следует поместить электрическую лампочку, чтобы освещенность края стола была наибольшей?

22.44. Светящаяся точка расположена на линии центров двух шаров и лежит вне этих шаров. При каком положении светящейся точки сумма площадей освещенных частей поверхностей шаров будет наибольшей?

22.45. Груз, лежащий на горизонтальной плоскости P, нужно сдвинуть с места силой, приложенной к этому грузу. Определить угол, образуемый этой силой с плоскостью P, при котором величина силы будет наименьшей, если коэффициент трения груза равен k.

22.46. Наблюдатель находится напротив картины, закрепленной на вертикальной стене. Нижний край картины расположен выше уровня глаз наблюдателя на a, верхний край — на b. На каком расстоянии от стены должен стоять наблюдатель, чтобы угол, под которым он видит картину, оказался наибольшим?

22.47. Точка $A(x_0; y_0)$ расположена внутри параболы $y^2 = 2px$, $p > 0$, точка B — на самой параболе, F — ее фокус. Доказать, что длина ломаной ABF будет наименьшей, если отрезок AB параллелен оси параболы, а угол FBA делится нормалью к параболе в точке B пополам (принцип параболического зеркала).

22.48. Точки A и B расположены соответственно в верхней и нижней полуплоскостях прямоугольной системы xOy. Частица движется по ломаной AMB, где M — точка оси Ox. Скорости движения частицы в верхней и нижней полуплоскостях соответственно равны v_1 и v_2. Доказать, что время движения частицы будет наименьшим, если $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}$, где α, β — углы, образуемые отрезками AM и BM с нормалью к оси Ox (в оптике эти углы называют соответственно углом падения и углом отражения).

§ 23. Численное решение уравнений

Интервал, содержащий только один корень*) (одно решение) уравнения

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

называют *интервалом изоляции* этого корня. *Отделить корни* уравнения — значит указать для каждого из них интервал изоляции. Для отделения корней обычно используют следующие утверждения.

Пусть функция f имеет значения разных знаков на концах отрезка $[a; b]$, т. е. $f(a)f(b) < 0$. Тогда:

*) В этом параграфе всюду, если не оговорено иное, речь идет только о действительных корнях уравнения.

1) Если f непрерывна на $[a; b]$, то уравнение (1) имеет на интервале $(a; b)$ по крайней мере один корень.

2) Если f непрерывна и строго монотонна на $[a; b]$, то уравнение (1) имеет на интервале $(a; b)$ один и только один корень.

Пример 1. Определить число корней уравнения и отделить эти корни:

1) $2x^3-8x+1=0$. 2) $e^{x-2}-x=0$.

△ 1) Обозначим $f(x)=2x^3-8x+1$. Так как

$f(-3)=-29<0$, $f(0)=1>0$, $f(1)=-5<0$, $f(2)=1>0$,

то данное уравнение имеет корень на каждом из интервалов $(-3; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$. Многочлен третьей степени имеет не более трех корней, поэтому каждый из указанных интервалов содержит только один корень, т. е. является интервалом изоляции.

2) Рассмотрим функцию $f(x)=e^{x-2}-x$. Данное уравнение не имеет решений при $x\leqslant 0$, так как $f(x)>0$ при $x\leqslant 0$.

Наименьшее значение функция f принимает при $x=2$ и $f(2)=-1<0$. Поскольку $f(0)=e^{-2}>0$ и поскольку функция f строго убывает на $[0; 2]$ (так как $f'(x)=e^{x-2}-1<0$ при $0\leqslant x<2$), данное уравнение имеет и притом только один корень на $(0; 2)$. За интервал изоляции для этого корня можно принять меньший интервал $(0; 1)$, так как $f(1)=e^{-1}-1<0$. При $x>2$ функция f строго возрастает, так как $f'(x)>0$ и, кроме того, $f(3)=e-3<0$, а $f(4)=e^2-4>0$. Отсюда следует, что данное уравнение имеет корень на интервале $(3; 4)$ и притом только один. Итак, данное уравнение имеет два корня, $(0; 1)$ и $(3; 4)$ — интервалы изоляции этих корней. ▲

По известному графику функции $y=f(x)$ можно с той или иной точностью указать его точки пересечения с осью абсцисс, т. е. найти приближенные значения корней уравнения $f(x)=0$, как говорят, решить уравнение графически.

Иногда бывает возможно представить уравнение $f(x)=0$ в таком виде $g(x)=h(x)$, где графики функций g и h построить проще, чем график f. В этом случае приближенные значения корней уравнения $f(x)=0$ находят как абсциссы точек пересечения графиков функций g и h.

Пример 2. Найти графически приближенное значение наименьшего корня уравнения:

1) $2x^3-8x+1=0$. 2) $e^{x-2}-x=0$.

△ 1) Пользоваться графиком функции $2x^3-8x+1$ неудобно, так как уже при $x=-3$ она имеет значение -29, и пришлось бы брать слишком мелкий масштаб. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{4}(2x^3-8x+1)$. Ее график изображен на рис. 102 $\Big($при $x=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$ и $x=\frac{2}{3}\sqrt{3}\approx 1{,}15$ функция имеет

соответственно максимум и минимум), а в таблице приведено

x	$-5/2$	-2	-1
$f(x)$	$-41/16$	$1/4$	$7/4$

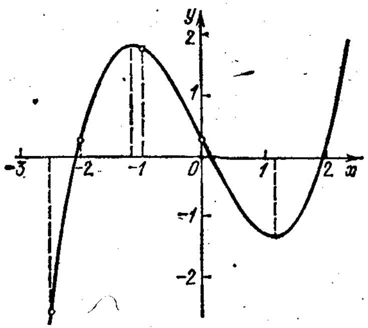


Рис. 102.

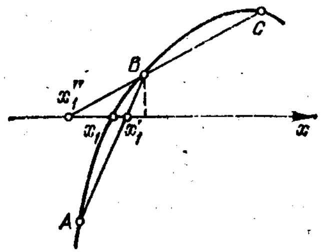


Рис. 103.

несколько значений функции. Из рассмотрения рис. 102 видно, что уравнение $f(x)=0$ (равносильное данному) имеет три корня: $x_1\approx -2$, $x_2\approx 0$, $x_3\approx 2$. Таким образом, наименьшим является корень x_1, приближенным значением для него можно взять $x_1^*=-2{,}1$ (см. рис. 102).

Используя свойства графика функции f, с помощью несложных вычислений найдем погрешность взятого приближенного значения. В таблице содержатся координаты трех точек A, B, C графика (рис. 103). При $x<0$ функция $y=f(x)$ выпукла вверх, поэтому часть AB ее графика расположена левее отрезка AB (рис. 103). Отсюда следует, что если x_1' — абсцисса точки пересечения отрезка AB с осью Ox, то $x_1'>x_1$. Уравнение прямой AB имеет вид

$$\frac{y+\frac{41}{16}}{\frac{1}{4}+\frac{41}{16}}=\frac{x+\frac{5}{2}}{-2+\frac{5}{2}}.$$

Подставляя сюда $y=0$, находим $x_1'=-92/45$.

Из выпуклости вверх функции при $x<0$ следует также, что корень x_1 лежит правее точки пересечения прямой BC с осью Ox, т. е. если x_1'' — абсцисса этой точки, то $x_1''<x_1$. Составляем уравнение прямой BC:

$$\frac{y-\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}-\frac{1}{4}}=\frac{x+2}{-1+2}$$

и, полагая $y=0$, находим $x_1''=-13/6$. Итак,

$$-13/6\leq x_1\leq -92/45.$$

Приближенное значение $x_1^* = -2{,}1$ также удовлетворяет этим неравенствам, поэтому

$$|x_1^* - x_1| < \max\{x_1' - x_1^*,\ x_1^* - x_1''\} = 1/15.$$

2) Запишем уравнение в виде $x = e^{x-2}$. Графики функций $y = x$ и $y = e^{x-2}$ изображены на рис. 104. Видно, что уравнение имеет два корня, за приближенное значение меньшего корня x_1 возьмем 0,2.

Пользуясь тем, что функция e^{x-2} возрастает и выпукла вниз, можно легко оценить погрешность этого приближения.

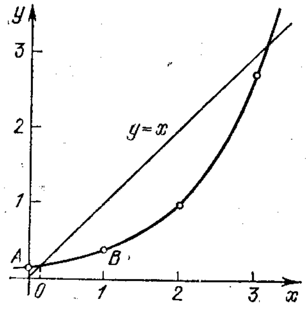


Рис. 104.

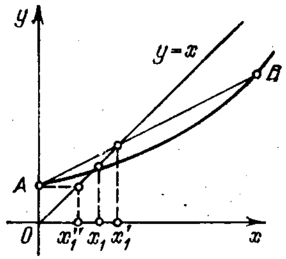


Рис. 105.

Возьмем на графике точки $A(0; e^{-2})$ и $B(1; e^{-1})$. Отрезок AB пересекает прямую $y = x$ в точке, абсцисса x_1' которой больше, чем корень x_1 (рис. 105). В уравнение прямой AB:

$$\frac{y - e^{-2}}{e^{-1} - e^{-2}} = x$$

подставляем $y = x$ и находим

$$x_1' = \frac{1}{e^2 - e + 1} < 0{,}177.$$

Прямая, проведенная через точку A параллельно оси абсцисс, пересекает прямую $y = x$ в точке, абсцисса $x_1'' = e^{-2}$ которой меньше корня x_1 (рис. 105). Таким образом,

$$0{,}135 < \frac{1}{e^2} < x_1 < \frac{1}{e^2 - e + 1} < 0{,}177.$$

Оценим погрешность приближенного значения $x_1 \approx 0{,}2$:

$$0{,}2 - x_1 < 0{,}2 - 0{,}135 = 0{,}065.$$

Проведенные вычисления позволяют указать значительно лучшее приближенное значение

$$x_1^* = \frac{1}{2}(x_1' + x_1'') = \frac{2e^2 - e + 1}{2e^2(e^2 - e + 1)} \approx 0{,}156$$

с погрешностью

$$|x_1^* - x_1| \leqslant \frac{1}{2}(x_1' - x_1'') = \frac{e - 1}{2e^2(e^2 - e + 1)} < 0{,}021.$$

Округляя вычисления, возьмем окончательно $x_1^* = 0{,}156$ с погрешностью округления $5 \cdot 10^{-4}$ и с общей погрешностью

$$|x_1 - 0{,}156| < 0{,}021 + 0{,}0005 < 0{,}022. \blacktriangle$$

Метод *деления пополам* (*«половинного деления»*, *«взятия в вилку»*) используют для нахождения первого (часто говорят — нулевого) приближения к корню уравнения, а также для улучшения границ корня, т. е. для нахождения достаточно малого интервала изоляции.

Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, $(a; b)$ — интервал изоляции корня ξ уравнения $f(x) = 0$. Определим знак $f(c)$ в середине c отрезка $[a; b]$ (если $f(c) = 0$, то корень $\xi = c$ найден), и пусть $[a_1; b_1]$ тот из отрезков $[a; c]$, $[c; b]$, на концах которого функция $f(x)$ имеет значения разных знаков. Аналогично выберем отрезок $[a_2; b_2]$, вдвое меньший чем $[a_1; b_1]$, и т. д. В результате получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n; b_n]\}$, длина n-го отрезка равна $(b - a)/2^n$, или на каком-то шаге найдем корень ξ. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$$

и

$$0 \leqslant \xi - a_n \leqslant (b - a)/2^n, \quad 0 \leqslant b_n - \xi \leqslant (b - a)/2^n. \qquad (2)$$

По этим формулам можно определить число шагов, достаточное для достижения заданной точности.

Метод *итераций* (метод *последовательных приближений*) используют для нахождения приближенных значений корней уравнения с большой точностью.

Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на $[a; b]$ единственный корень ξ. Для этого уравнения подбирают равносильное ему на $[a; b]$ уравнение вида

$$x = \varphi(x) \qquad (3)$$

и значение $x_0 \in [a; b]$ так, чтобы была определена последовательность

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (4)$$

и чтобы эта последовательность сходилась к корню ξ.

Достаточные условия сходимости процесса итераций таковы.

Пусть функция φ дифференцируема на $[a; b]$ и

$$|\varphi'(x)| \leqslant k < 1, \quad x \in [a; b]. \qquad (5)$$

Пусть $x_0 \in [a; b]$ и $x_n = \varphi(x_{n-1}) \in [a; b]$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда уравнение (3) имеет на $[a; b]$ единственный корень ξ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi.$$

Для существования последовательности (4) при условии (5) достаточно выбрать

$$x_0 \in \left[a + \frac{d}{3};\ b - \frac{d}{3}\right], \quad \text{где} \quad d = b - a.$$

Для оценки погрешности метода итераций используют неравенства

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{k}{1-k} |x_n - x_{n-1}|, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

здесь и ниже k берется из условия (5). Для оценки числа n итераций при заданной погрешности можно использовать формулу

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

При заданной погрешности Δ процесс итераций продолжают до получения оценки

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{1-k}{k} \Delta, \tag{8}$$

тогда заведомо $|\xi - x_n| \leqslant \Delta$.

Вычисление приближений x_n обычно происходит с округлением, и погрешность округления следует учитывать при нахождении погрешности приближения.

В сходящемся итерационном процессе последовательность $|\xi - x_n|$ монотонно стремится к нулю.

Пусть функция φ удовлетворяет условию (5) и $\varphi'(x) \geqslant 0$ на $[a; b]$; тогда последовательность (4) монотонно сходится к корню ξ. Если же $\varphi'(x) \leqslant 0$ на $[a; b]$, то одна из последовательностей $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$ возрастает, а другая убывает. В этом случае корень ξ лежит между двумя соседними членами последовательности x_n и x_{n+1} для каждого $n \in \mathbb{N}$, следовательно, установившиеся десятичные знаки приближения x_n принадлежат и корню ξ.

При выборе уравнения (3) следует учитывать, что чем меньше величина k из условия (5), тем меньше итераций требуется для достижения заданной точности (как говорят, тем быстрее сходится процесс итераций).

Пример 3. 1) Указать сходящийся итерационный процесс для вычисления наименьшего корня уравнения

$$2x^3 - 8x + 1 = 0.$$

2) Найти с помощью итераций приближенное значение наименьшего корня уравнения

$$x - \ln x - 2 = 0$$

с погрешностью не более чем $5 \cdot 10^{-5}$.

$\triangle$ 1) В примере 2 был найден интервал $(-13/6; -92/45)$ изоляции наименьшего корня ξ данного уравнения. На этом интервале уравнение равносильно каждому из следующих

уравнений:

$$x = \frac{2x^3+1}{8} = \varphi_1(x),$$

$$x = \frac{8x-1}{2x^2} = \varphi_2(x),$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{8x-1}{2}} = \varphi_3(x).$$

Для производных $\varphi_k'(x)$ $(k = 1, 2, 3)$ на отрезке $\left[-\frac{13}{6}; -\frac{92}{45}\right]$ имеем оценки

$$|\varphi_1'(x)| = \frac{3}{4} x^2 > \frac{3}{4} \cdot 4 = 3 > 1,$$

$$|\varphi_2'(x)| = \left|\frac{1-4x}{x^3}\right| \geqslant \frac{1 + 4 \cdot \frac{13}{6}}{\left(\frac{13}{6}\right)^3} > 0{,}95,$$

$$|\varphi_3'(x)| = \frac{4}{3} \left(\frac{2}{8x-1}\right)^{2/3} \leqslant 0{,}32.$$

Ясно, что для построения итерационного процесса следует выбрать третье уравнение $x = \sqrt[3]{\frac{8x-1}{2}}$. Правая часть этого уравнения удовлетворяет условию (5) с $k = 0{,}32$. Если в качестве нулевого приближения взять полученное в примере 2 значение $x_0 = -2{,}1$, то последовательность (4) будет определена и будет сходиться к корню ξ.

2) Левая часть данного уравнения положительна при $x = 1/e^2$ и отрицательна при $x = 1$. Производная левой части отрицательна при $0 < x < 1$, поэтому на интервале $(0; 1)$ уравнение имеет и притом только один корень ξ, он и является наименьшим. Данное уравнение, записанное в виде $x = \ln x + 2$, непригодно для построения итерационного процесса, так как $(\ln x + 2)' = 1/x > 1$ при $x \in (0; 1)$. Преобразуем уравнение к виду

$$x = e^{x-2}. \tag{9}$$

Здесь $(e^{x-2})' = e^{x-2} \leqslant e^{-1} < 1$ при $x \in [0; 1]$, и, значит, для уравнения (9) итерационный процесс будет сходиться. В примере 2 были найдены приближенное значение наименьшего корня $x_0 = 0{,}156$ и его интервал изоляции $(0{,}135; 0{,}177)$. На этом интервале

$$(e^{x-2})' \leqslant e^{-1{,}823} < 0{,}162 = k$$

(для вычислений в данном примере использована мини-ЭВМ из серии «Электроника»). Вычисляем первое приближение

$$x_1 = e^{x_0 - 2} = 0{,}1581834\ldots$$

Видно, что $x_0 < \xi$. Итерационная последовательность $x_n = e^{x_{n-1}-2}$, $n \in \mathbb{N}$, является возрастающей. Округляя с недостатком, примем $x_1 = 0{,}158183$ и найдем согласно (7) число итераций, требуемое для достижения заданной точности:

$$\frac{0{,}162^n}{1-0{,}162}\cdot(0{,}158183-0{,}156)\leqslant 5\cdot 10^{-5},$$

$$0{,}162^n \leqslant 1{,}919\cdot 10^{-2},\qquad 1{,}62^n\cdot 10^{-n}\leqslant 1{,}919\cdot 10^{-2};$$

проверяя $n=2$ и $n=3$, находим, что $n=3$. При этом n будем иметь оценку согласно (7):

$$0<\xi - x_3 < 1{,}11\cdot 10^{-5}. \tag{10}$$

Результаты вычислений приведены в таблице

n	x_n	e^{x_n-2}
0	0,156	0,158183
1	0,158183	0,158529
2	0,158529	0,158584
3	0,158584	

Округляя еще раз по недостатку, можно взять $x^* = 0{,}15858$ с погрешностью, заведомо не превышающей $2\cdot 10^{-5}$. Можно также заметить, что из (10) следуют неравенства

$$0{,}158584 < \xi < 0{,}158596$$

(с учетом погрешности округления), поэтому выбор приближенного значения $x^* = 0{,}15859$ дает большую точность. ▲

Ряд итерационных формул для решения уравнения $f(x)=0$ получают из формулы Тейлора для функции f или функции, обратной f.

Пусть функция f дифференцируема на $[a;b]$ и

$$0<m_1\leqslant |f'(x)|\leqslant M_1,\quad x\in[a;b]. \tag{11}$$

Пусть ξ — корень уравнения $f(x)=0$ на $(a;b)$ (единственный в силу (11)); тогда при $x\in[a;b]$ имеем $f(x)=f(\xi)+f'(\theta(x))(x-\xi)$, откуда

$$\xi = x-\frac{f(x)}{f'(\theta(x))}, \tag{12}$$

где $\theta(x)$ лежит между ξ и x. Выбрав $x_0\in[a;b]$ и подставив в (12) x_{n-1} вместо x, x_n вместо ξ и какое-либо приближенное выражение вместо $f'(\theta(x))$, получим итерационную формулу вида (4).

Пусть в дополнение к указанному функция f дважды дифференцируема на $[a;b]$ и

$$0<m_2\leqslant |f''(x)|\leqslant M_2,\quad x\in[a;b], \tag{13}$$

и пусть x_0 выбрано так, что

$$f(x_0)f''(x_0)>0. \tag{14}$$

Подставляя в (12) $f'(x)$ вместо $f'(\theta(x))$, приходим к формуле

$$x_n = x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{15}$$

определяющей последовательность $\{x_n\}$, которая монотонно сходится к корню ξ. Формула (15) описывает *метод Ньютона* (*метод касательных*).

Для оценки погрешности (без учета погрешности округления) в методе Ньютона используют формулы

$$|\xi - x_n|\leqslant \frac{|f(x_n)|}{m_1},\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{16}$$

$$|\xi - x_n|\leqslant \frac{M_2}{2m_1}(x_n-x_{n-1})^2,\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{17}$$

где m_1 удовлетворяет условию (11), а M_2 — условию (13).

Если x_0 выбрано так, что

$$\frac{M_2}{2m_1}|\xi - x_0|<1, \tag{18}$$

то процесс итераций сходится быстро, а если $M_2/2m_1\leqslant 1$, то число верных десятичных знаков на каждом шаге удваивается.

Заменяя в (12) $f'(\theta(x))$ на $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, придем к формуле

$$x_n = x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1})-f(x_0)}(x_{n-1}-x_0),\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{19}$$

или, что то же,

$$x_n = x_0-\frac{f(x_0)}{f(x_{n-1})-f(x_0)}(x_{n-1}-x_0),\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{20}$$

для построения последовательности, монотонно сходящейся к корню ξ. Формулы (19), (20) описывают *метод хорд* (*метод ложного положения*). Оценку погрешности приближения по методу хорд можно получить по формуле (16), а также по формуле

$$|\xi - x_n|\leqslant \frac{M_1-m_1}{m_1}|x_n-x_{n-1}|,\qquad n\in\mathbb{N}. \tag{21}$$

Упрощенный метод Ньютона применяют, когда производная $f'(x)$ мало изменяется на отрезке $[a;b]$. В этом случае в (12) заменяют $f'(\theta(x))$ на $f'(x_0)$, тогда формула

$$x_n = x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_0)},\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{22}$$

задает последовательность, сходящуюся к корню ξ. Погрешность приближений можно определять по формулам (16), (21).

Комбинированный метод получается объединением метода хорд и метода касательных. В силу (11) и (13) производные $f'(x)$ и $f''(x)$ не меняют знаков на отрезке $[a;b]$; пусть для определенности

$$f'(x)>0,\quad f''(x)>0. \tag{23}$$

Выберем x_0' и x_0'' из $[a;\,b]$ так, что $f(x_0'')<0$, а $f(x_0')>0$ (рис 106), тогда $x_0''<\xi<x_0'$. Последовательность $\{x_n'\}$ зададим по методу касательных, а последовательность $\{x_n''\}$ — по методу хорд:

$$x_n'=x_{n-1}'-\frac{f(x_{n-1}')}{f'(x_{n-1}')},\qquad n\in\mathbb{N},\tag{24}$$

$$x_n''=x_{n-1}''-\frac{f(x_{n-1}'')}{f(x_{n-1}'')-f(x_{n-1}')}(x_{n-1}''-x_{n-1}'),\qquad n\in\mathbb{N}.\tag{25}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}x_n'=\lim_{n\to\infty}x_n''=\xi\quad\text{и}\quad x_n''<\xi<x_n',\tag{26}$$

$$0<\xi-x_n''<x_n'-x_n'',\qquad n\in\mathbb{N}.\tag{27}$$

При вычислениях значения x_n'' можно округлять с недостатком, а значения x_n' — с избытком. Процесс прекращают, когда правая часть в (21) будет меньше заданной погрешности. За приближенное значение корня часто принимают $(x_n'+x_n'')/2$.

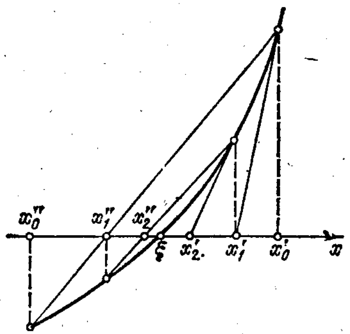


Рис. 106.

Аналогично строится последовательность и при других сочетаниях знаков $f'(x)$ и $f''(x)$. В каждом случае последовательность $\{x_n'\}$ по методу касательных строят от начального значения x_0', удовлетворяющего условию (14).

Указанные итерационные последовательности, построенные на основе формулы (12), сходятся быстро, если производная $f'(x)$ достаточно велика (см. (16), (17), (21)).

Отправляясь от формулы Тейлора с остаточным членом более высокого порядка, чем первый, можно получать итерационные последовательности, сходящиеся более быстро, чем указанные.

Порядком метода итераций называют число τ такое, что для итерационной последовательности, сходящейся к корню ξ, верна оценка

$$|\xi-x_{n+1}|\leqslant C|\xi-x_n|^{\tau},\quad n\in\mathbb{N}.\tag{28}$$

Метод Ньютона имеет порядок $\tau=2$.

Пример 4. Найти наименьший корень уравнения $2x^3-8x+1=0$ с погрешностью, меньшей чем $5\cdot10^{-5}$.

△ В примере 2 был найден интервал $(-13/6;\ -92/45)$ изоляции наименьшего корня ξ. Для уменьшения этого интервала воспользуемся комбинированным методом. Поскольку

$$f'(x)=6x^2-8\geq16\geq0,\quad\text{а}\quad f''(x)=12x\leq-24\leq0,$$

итерационную последовательность по методу касательных построим от начального приближения $x_0'=-13/6$:

$$x_n'=x_{n-1}'-\frac{f(x_{n-1}')}{f'(x_{n-1}')},\qquad n\in\mathbb{N},\tag{29}$$

а для последовательности по методу хорд возьмем за начальное приближение $x_0''=-92/45$, остальные члены последовательности вычисляем, используя (20), по формуле

$$x_n''=x_{n-1}'-\frac{f(x_{n-1}')}{f(x_{n-1}'')-f(x_{n-1}')}\times(x_{n-1}''-x_{n-1}'),\qquad n\in\mathbb{N},\tag{30}$$

подставляя в (20) на каждом этапе вместо x_0 значение x_{n-1}' (рис. 107). Вычисления проводим, например, по схеме, указанной в таблице

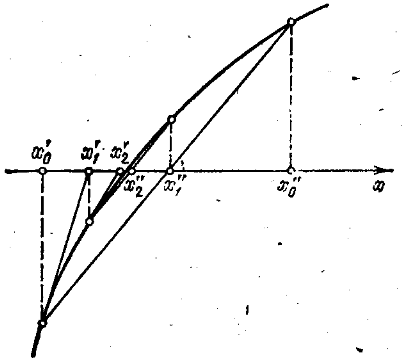


Рис. 107.

n	0	1	2
x_n'	$-\frac{13}{6}$	$-2{,}067034$	$-2{,}059829$
x_n''	$-\frac{92}{45}$	$-2{,}058686$	$-2{,}059786$
$f(x_n')$	$-\frac{217}{108}$	$-0{,}127069$	
$f'(x_n')$	$\frac{121}{6}$	$17{,}635777$	
$f(x_n'')$	$0{,}265011$	$0{,}019292$	
p_n	$-\frac{217}{2178}$	$-0{,}007205$	
q_n	$-0{,}664269$	$-0{,}868189$	
$x_n''-x_n'$	$0{,}122222$	$0{,}008348$	

Здесь

$$p_n=\frac{f(x_n')}{f'(x_n')},\qquad q_n=\frac{f(x_n')}{f(x_n'')-f(x_n')}.\tag{31}$$

Уже после второго этапа вычислений получаем, что

$$-2{,}05983 \leqslant \xi < -2{,}05978,$$

поэтому, полагая

$$x^* = -\frac{1}{2}(2{,}05983 + 2{,}05978) \approx -2{,}05980,$$

получаем приближенное значение корня с погрешностью не более чем $2{,}5\cdot 10^{-5}$. ▲

23.1. Решить графически уравнение, указав для каждого корня интервал изоляции, длина которого не превосходит 0,5:

1) $x^3 - 6x + 2 = 0$. 2) $x^4 - 4x - 1 = 0$. 3) $x^3 + 2x + 7{,}8 = 0$.

4) $x^3 - 1{,}75x + 0{,}75 = 0$. 5) $2x^3 - x^2 - x - 3 = 0$.

6) $x^3 + x^2 - 5x - 12 = 0$. 7) $x^3 - 0{,}2x^2 - 0{,}2x - 1{,}2 = 0$.

8) $0{,}3x^4 - 0{,}7x^3 - 0{,}3x^2 - 2 = 0$.

23.2. Решить графически уравнение, указав для каждого корня интервал изоляции, длина которого не превосходит 0,1:

1) $2x^3 + x + 1 = 0$. 2) $x^4 - x - 1 = 0$. 3) $x + e^x = 0$.

4) $x - \sin x - 1 = 0$. 5) $x = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$.

6) $x^2 - \cos x = 0$. 7) $4x - 5\ln x = 5$. 8) $x^x = 10$.

23.3. Доказать, что с помощью сдвига вдоль оси Ox или сжатия (растяжения) вдоль оси Ox уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0,$$

можно привести к виду

$$b_0t^n + b_2t^{n-2} + \ldots + b_{n-1}t + b_n = 0$$

или к виду

$$c_0z^n + c_1z^{n-1} + \ldots + c_n = 0,$$

где $|c_0| = |c_n|$.

23.4. Пусть коэффициенты многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

удовлетворяют равенствам $a_i = a_{n-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Доказать, что:

1) Если n нечетно, то $x = -1$ — корень многочлена и коэффициенты частного

$$Q_{n-1} = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

от деления $P_n(x)$ на $x+1$ удовлетворяют равенствам $b_i = b_{n-1-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

2) Если n четно, то замена $z = x + \frac{1}{x}$ приводит уравнение $P_n(x) = 0$ к уравнению степени $n/2$ и к $n/2$ квадратным уравнениям.

3) Если n четно, то замена

$$z = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

также приводит уравнение $P_n(x) = 0$ к уравнению степени $n/2$ и к $n/2$ квадратным уравнениям.

23.5. Пусть коэффициенты многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

удовлетворяют равенствам $a_i = -a_{n-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Доказать, что:

1) Если n нечетно, то $x = 1$ — корень многочлена, а если n четно, то $x = 1$ и $x = -1$ — корни многочлена.

2) Коэффициенты частного

$$Q_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

от деления $P_n(x)$ на $x-1$ удовлетворяют равенствам $b_i = b_{n-1-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

23.6. Пусть функция f определена, дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$ и f'' не меняет знака на $\mathbb{R}$. Доказать, что:

1) Уравнение $f(x) = 0$ не может иметь более двух действительных корней.

2) Если $f(x_0)f'(x_0) < 0$, $f(x_0)f''(x_0) < 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень в интервале $\left(x_0;\ x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)$.

3) Если $f'(x_0) = 0$, $f(x_0)f''(x_0) < 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет по одному корню в интервалах $(-\infty; x_0)$, $(x_0; +\infty)$.

23.7. 1) Пусть функция f непрерывна на $[a; +\infty)$, дифференцируема на $(a; +\infty)$, $f(a) < 0$, $f'(x) \geqslant m > 0$ на $(a; +\infty)$. Доказать, что уравнение $f(x) = 0$ имеет, притом только один, действительный корень на $(a; +\infty)$.

2) Привести пример, который показывал бы, что условие «$f'(x) \geqslant m > 0$ на $(a; +\infty)$» нельзя заменить условием «$f'(x) > 0$».

3) Доказать, что при условиях 1) корень уравнения принадлежит промежутку $\left(a;\ a - \frac{f(a)}{m}\right]$.

23.8. Корень ξ уравнения $f(x) = 0$ называют *p-кратным* $(p \in \mathbb{N})$, если $f(x) = (x-\xi)^p\varphi(x)$, где $\varphi(\xi) \neq 0$. Однократный корень называют *простым*.

1) Доказать, что если f дифференцируема в окрестности p-кратного $(p \geqslant 2)$ корня ξ уравнения $f(x) = 0$, то ξ является $(p-1)$-кратным корнем уравнения $f'(x) = 0$.

2) Доказать, что если $a^2 - 3b < 0$, то уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

имеет один простой действительный корень.

23.9. Доказать, что уравнение

$$x^{2k+1}+a_1x^{2k-1}+a_2x^{2k-3}+\ \dots\ +a_kx+a_{k+1}=0,$$

где $a_i\geqslant 0$ $(i=1,\ 2,\ \dots,\ k-1)$, $a_k>0$, имеет единственный, причем простой, действительный корень.

23.10. Пусть $R(x)$ — наибольший общий делитель многочлена $P_n(x)$ и его производной $P'_n(x)$ $(n\in\mathbb{N})$. Доказать, что все корни частного от деления $P_n(x)$ на $R(x)$ простые и совпадают с корнями многочлена $P_n(x)$.

23.11. Доказать, что если все корни многочлена

$$x^n+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\ \dots\ +a_{n-1}x+a_n$$

действительны, то $a_2\leqslant 0$.

23.12. Доказать, что многочлен

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ \dots\ +a_{n-1}x-a_n,$$

где $a_i\geqslant 0$ $(i=1,\ 2,\ \dots,\ n-1)$, $a_n>0$, имеет только один положительный корень, причем этот корень простой и не превосходит $\sqrt[n]{a_n}$.

23.13. Доказать, что все корни производной многочлена

$$P_4(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$$

действительны, и найти их интервалы изоляции, длина которых не более чем 0,5.

23.14. Доказать, что многочлен

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots\ +a_{n-1}x+a_n,\qquad a_0\neq 0,$$

имеет по крайней мере один корень на интервале $(0;1)$, если

$$\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\ \dots\ +\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0.$$

23.15. Расположим по возрастанию номеров коэффициенты многочлена

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots\ +a_{n-1}x+a_n,$$

$a_0,\ \dots,$ пропуская коэффициенты, равные нулю. *Числом перемен* знака получившегося упорядоченного набора называют число пар соседних элементов, имеющих разные знаки.

Доказать, что число положительных корней многочлена не больше числа перемен знака в наборе его коэффициентов, не равных нулю.

23.16. Доказать, что многочлен:

1) $x^5-2x^4-x^2-5=0$ имеет и притом единственный действительный корень; указать для этого корня интервал изоляции, длина которого не более чем 0,1.

2) $x^6+2x^4+x-3=0$ имеет и притом только два действительных корня; указать для этих корней интервалы изоляции, длина которых не более чем 0,1.

23.17. Доказать, что все корни уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots\ +a_{n-1}x+a_n=0,\quad a_0\neq 0,$$

1) удовлетворяют неравенству

$$|\xi|<1+\frac{M_1}{|a_0|},$$

где

$$M_1=\max\{|a_1|,\ |a_2|,\ \dots,\ |a_n|\};$$

2) при $a_n\neq 0$ удовлетворяют неравенству

$$|\xi|>\left(1+\frac{M_2}{|a_n|}\right)^{-1},$$

где

$$M_2=\max\{|a_0|,\ |a_1|,\ \dots,\ |a_{n-1}|\}.$$

23.18. Пусть в уравнении

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots\ +a_{n-1}x+a_n=0$$

$a_0>0$, a_k $(k\geqslant 1)$ — отрицательный коэффициент с наименьшим номером, A — наибольшая из абсолютных величин отрицательных коэффициентов. Доказать, что все действительные корни этого уравнения удовлетворяют неравенству

$$\xi<1+\sqrt[k]{\frac{A}{a_0}}$$

(*теорема Лагранжа*).

23.19. Пусть для многочлена

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots\ +a_{n-1}x+a_n$$

существует такое число $c>0$, что

$$P_n^{(k)}(c)\geqslant 0\qquad (k=0,1,\ \dots,\ n),$$

и пусть $a_0>0$. Доказать, что все действительные корни этого многочлена удовлетворяют неравенству $\xi\leqslant c$ (*теорема Ньютона*).

23.20. Пусть многочлен $P_n(x)$ представлен в виде

$$P_n(x)=Q(x)+R(x),$$

где $Q(x)$ содержит старший по степени член многочлена $P_n(x)$ с положительным коэффициентом и все члены с отрицательными коэффициентами, а $R(x)$ содержит все остальные члены $P_n(x)$. Доказать, что если $Q(c)>0$ при некотором $c>0$, то все действительные корни $P_n(x)$ меньше c.

23.21. Доказать, что уравнение $P(x)=0$ не имеет отрицательных корней, и, пользуясь результатами задач **23.17—23.20**, указать отрезок $[a;b]$, $0<a<b$, содержащий все положительные корни, если:

1) $P(x)=2x^5-100x^2+2x-1$.

2) $P(x)=x^4-35x^3+380x^2-1350x+1000$.

23.22. Указать отрезки $[a_1; b_1]$, $a_1 < b_1 < 0$, и $[a_2; b_2]$, $0 < a_2 < b_2$, содержащие соответственно все отрицательные и все положительные корни уравнения

$$3x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Для положительных корней указать интервалы изоляции, длины которых не превосходят 0,5.

23.23. Доказать, что уравнение

$$x^5 + x^4 + x^2 + 10x - 5 = 0$$

имеет единственный корень, и указать интервал его изоляции, длина которого не превосходит 0,1.

23.24. 1) Доказать, что если $4p^3 + 27q^2 > 0$, то уравнение $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, имеет один действительный корень, а если $4p^3 + 27q^2 < 0$, то это уравнение имеет три действительных корня.

2) При каком условии на a, b, c все корни уравнения

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

действительны?

23.25. При каком условии на p и q все корни уравнения

$$x^5 - 5px^2 + 5p^2x + 2q = 0$$

действительны?

23.26. При каком условии на p и q все корни уравнения

$$x^m + px^n + q = 0,$$

где $m > n > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, $p \neq 0$, действительны?

23.27. 1) Доказать, что уравнение

$$x^{2n+1} + a_1x^{2n-1} + \ldots + a_nx = a_0, \qquad (32)$$

где $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, имеет хотя бы один корень в интервале $(-2; 2)$, если $|a_0| < 2$.

2) Доказать, что уравнение (32) имеет корень в интервале $(-2l; 2l)$, где $l = (|a_0|/2)^{1/(2n+1)}$ (*теорема Чебышёва*).

23.28. Указать в зависимости от значений $a \in \mathbb{R}$ количество действительных корней уравнения:

1) $x^4 - 4ax^3 - 2 = 0$. 2) $2x^3 - 3ax^2 + 1 = 0$.

23.29 Найти все значения $a \in \mathbb{R}$, при которых уравнение имеет указанное число действительных корней:

1) $2x^3 + 13x^2 - 20x + a = 0$, один корень.

2) $3x^3 + 1{,}5x^2 - 12x + a = 0$, один двукратный корень и один простой.

3) $3x^4 + 8x^3 + a = 0$, два простых корня.

4) $9x^4 + 14x^3 - 15x^2 + a = 0$, четыре различных корня.

23.30. Доказать, что уравнение

$$2e^x + x^2 + 18x - 6 = 0$$

имеет единственный положительный корень; указать его интервал изоляции, длина которого не превосходит 0,2.

23.31. Указать в зависимости от значений a число корней уравнений:

1) $\ln x + ax = 0$. 2) $x \ln x = a$. 3) $e^x = ax^2$.

4) $\operatorname{ch} x = ax$. 5) $\cos^3 x \sin x = a$, $x \in [0; \pi]$.

23.32. Указать все значения $a \in \mathbb{R}$, при которых уравнение имеет указанное число действительных корней:

1) $e^x = a + x - x^2$, два различных корня.

2) $x^2 + x - \ln x + a = 0$, один двукратный корень.

3) $x^2 = a \ln x$, два различных корня.

4) $6 \operatorname{arctg} x - x^3 + a = 0$, три различных корня.

23.33. Дано уравнение

$$\ln x - a - bx = 0.$$

1) Доказать, что это уравнение не может иметь более двух корней.

2) Указать на координатной плоскости множества точек $(a; b)$, для которых число корней данного уравнения равно 0, 1, 2.

23.34. Дано уравнение

$$e^x - a - bx^3 = 0.$$

1) Доказать, что это уравнение не может иметь более четырех корней.

2) Указать на координатной плоскости множества точек $(a; b)$, для которых число корней уравнения равно 0, 1, 2, 3, 4.

23.35. Пусть $a > 1$. Доказать, что уравнение

$$a^x = bx$$

1) имеет два действительных корня при $b > e \ln a$;

2) имеет один двукратный действительный корень при $b = e \ln a$;

3) не имеет действительных корней при $0 \leqslant b < e \ln a$;

4) имеет один простой корень при $b < 0$.

23.36. Указать количество корней уравнения

$$x^n = ae^x, \quad n \in \mathbb{N},$$

в зависимости от $a \in \mathbb{R}$.

23.37. Отделить действительные корни уравнения, указав интервалы изоляции, длины которых не превосходят единицы:

1) $x^3 + 2x - 7 = 0$. 2) $x^3 - 27x - 17 = 0$.

3) $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$. 4) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 2 = 0$.

5) $x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0$. 6) $x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 1 = 0$.

7) $x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0$. 8) $x^5 + 5x^3 - 7x + 2 = 0$.

9) $x^5+7x^3-5x+11=0$.

10) $x^5-2x^4-5x^3+19x^2-17x+1=0$.

23.38. Отделить корни уравнения

$$\frac{p^2}{a^2+x}+\frac{q^2}{b^2+x}+\frac{r^2}{c^2+x}=1,$$

где $p, q, r, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2>b^2>c^2$, $pqr\neq 0$.

23.39. Отделить действительные корни уравнения, указав для каждого корня интервал изоляции, длина которого не превосходит 0,1:

1) $x-\sin 2x=0$. 2) $x=4\cos x$. 3) $e^x-x-\frac{5}{4}=0$.

4) $2x^2-e^{x+1}=0$. 5) $x+\ln(x+2)=0$.

23.40. Методом деления пополам решить уравнение с указанной погрешностью Δ:

1) $x^4+x-10=0$, $\Delta=10^{-2}$.

2) $x^3-12x-8=0$, $\Delta=10^{-2}$.

3) $x^3+x^2-5x-12=0$, $\Delta=10^{-2}$.

4) $x^4+2x^3+6x^2-1=0$, $\Delta=10^{-3}$.

5) $x^4-2x^3+x-1=0$, $\Delta=10^{-3}$.

6) $(x-1)^2-2\sin x=0$, $\Delta=10^{-2}$.

7) $e^x=2(1-x)^2$, $\Delta=10^{-2}$.

8) $10(x-1)=\sin x$, $\Delta=10^{-3}$.

9) $10\ln x=x^3-3$, $\Delta=10^{-3}$.

10) $xe^x=1$, $\Delta=10^{-3}$.

23.41. Шар радиуса 1 м с удельной плотностью 0,75 плавает в воде. Вычислить высоту выступающей из воды части шара с погрешностью 0,05 мм.

23.42. Используя графики гипербол

$$xy=y+1 \quad \text{и} \quad x^2-y^2=1$$

и метод деления пополам, вычислить с погрешностью 0,01 координаты точек пересечения этих гипербол.

23.43. 1) Привести пример уравнения $f(x)=0$ с корнем ξ и его приближенным значением x^* так, чтобы были выполнены неравенства $f'(x)>0$ и

$$|x^*-\xi|\geqslant 10^3, \quad |f(x^*)|\leqslant 10^{-3},$$

т. е. удостовериться в том, что из «близости» $f(x^*)$ к нулю *не следует* «близость» x^* к корню ξ.

2) Привести пример уравнения $f(x)=0$ с корнем ξ и его приближенным значением x^* так, чтобы выполнялись неравенства $f'(x)>0$ и

$$|x^*-\xi|\leqslant 10^{-3}, \quad |f(x^*)|\geqslant 10^3,$$

т. е. удостовериться в том, что из «близости» приближенного значения x^* к корню ξ *не следует* «близость» $f(x^*)$ к нулю.

23.44. Уравнение

$$3x^4-16x^3+192=0 \qquad (33)$$

при $x>0$ равносильно каждому из следующих уравнений:

а) $x=2\sqrt[4]{\frac{x^3-12}{3}}$; б) $x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}(x^4+64)}$;

в) $x=\frac{16}{3}\left(1-\frac{12}{x^3}\right)$; г) $x=\frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{8}+\frac{8}{x^2}\right)$.

1) Доказать, что уравнение (33) имеет два положительных корня, и отделить их.

2) Указать из уравнений а)—г) то, для которого итерации наиболее быстро сходятся к меньшему положительному корню уравнения (33).

Вычислить этот корень с точностью до 10^{-3}.

3) Выполнить для большего корня уравнения (33) задание, аналогичное 2).

23.45. Методом итераций найти действительные корни уравнений с указанной погрешностью Δ:

1) $x^3+x=1000$, $\Delta=10^{-4}$.

2) $x^3-3x^2+8x+10=0$, $\Delta=10^{-5}$.

3) $x^5+5x+1=0$, $\Delta=10^{-5}$.

4) $10x=e^{-x}$, $\Delta=5\cdot 10^{-4}$.

5) $4^x=8x$, $\Delta=10^{-5}$.

6) $4e^x=5(x+1)$, $\Delta=10^{-4}$.

7) $x^3-2x-5=0$, $\Delta=10^{-10}$.

8) $\sin x=2x-0{,}5$, $\Delta=5\cdot 10^{-5}$.

9) $x-\sin x=0{,}25$, $\Delta=10^{-3}$.

23.46. 1) При каких $a>0$ уравнение

$$x=a^x$$

имеет решение?

2) При каких a сходится итерационная последовательность

$$x_0=a, \quad x_n=a^{x_{n-1}}, \qquad n\in\mathbb{N}?$$

23.47. Найти с четырьмя верными знаками после запятой:

1) Наименьший положительный корень уравнения

$$x\sin x+1=0.$$

2) Два положительных корня — наименьший и ближайший к нему — уравнения

$$\cos x \operatorname{ch} x=1.$$

23.48. Решить с погрешностью не более чем 10^{-4} уравнение

$$4x-5\ln x=5,$$

выбрав для каждого корня сходящийся итерационный процесс.

23.49. Решить методом хорд уравнение с указанной погрешностью Δ:

1) $x^3-4x+2=0, \quad \Delta=10^{-3}$.

2) $x^4+x-1=0, \quad \Delta=10^{-3}$.

3) $x^3-3{,}2x^2+3{,}1x-2{,}2=0, \quad \Delta=10^{-3}$.

4) $0{,}1\sin x=x+2, \quad \Delta=10^{-3}$.

5) $\cos x=x^2, \quad \Delta=10^{-3}$.

6) $x^3-5x+1=0, \quad \Delta=10^{-5}$.

23.50. Методом хорд и методом касательных решить уравнение с указанной погрешностью Δ:

1) $x^2=13, \quad \Delta=10^{-8}$.

2) $2x^3+2x^2-11x+3=0, \quad \Delta=10^{-6}$.

3) $x^3+x^2+2x-3=0, \quad \Delta=5\cdot 10^{-5}$.

23.51. Методом касательных решить уравнение с указанной погрешностью Δ:

1) $x^3-2x-2=0, \quad \Delta=5\cdot 10^{-5}$.

2) $x^3+x-3=0, \quad \Delta=5\cdot 10^{-5}$.

3) $2x^3-7x^2+x+9=0, \quad \Delta=10^{-3}$.

4) $x^2+\frac{1}{x^2}=10x, \quad \Delta=10^{-3}$. 5) $x=\cos x, \quad \Delta=10^{-6}$.

6) $x\lg x=1, \quad \Delta=10^{-4}$. 7) $x+e^x=1, \quad \Delta=10^{-5}$.

8) $x \operatorname{th} x=1, \quad \Delta=10^{-6}$.

9) $\operatorname{tg} x=x, \quad \Delta=5\cdot 10^{-5}$ (наименьший положительный корень).

10) $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{x}-\frac{x}{2}, \quad \Delta=10^{-3}$ (найти только два положительных корня — наименьший и ближайший к нему).

23.52. Методом касательных вычислить отрицательный корень уравнения

$$x^4-3x^2+75x-10\,000=0$$

с тремя верными знаками после запятой.

23.53. Найти с четырьмя верными знаками чисто мнимые корни уравнения

$$z\sin z+1=0.$$

23.54. Решить уравнение

$$x^3+1{,}1x^2+0{,}9x-1{,}4=0$$

1) методом деления пополам с точностью $5\cdot 10^{-3}$; 2) методом хорд с точностью $5\cdot 10^{-4}$; 3) методом касательных с точностью $5\cdot 10^{-4}$.

23.55. К какому из корней уравнения $x^3-x=0$ сходится последовательность, построенная по методу касательных, в зависимости от выбора начального приближения $x_0\in\mathbb{R}$?

23.56. Доказать, что для уравнения $\sqrt{|x|}\operatorname{sign} x=0$ метод касательных не сходится.

23.57. Проверить, что для функции

$$f(x)=\frac{\ln 2}{\pi}\sin\left(2\pi\frac{\ln x}{\ln 2}\right)+1$$

последовательность, построенная по методу касательных, начиная с $x_0=1$, сходится к числу, не являющемуся корнем уравнения $f(x)=0$.

23.58. Используя метод касательных, построить итерационный процесс 2-го порядка для вычисления $\sqrt{a}$.

23.59. Доказать, что если $x_0>0$, $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$, то

$$x_{n+1}-\frac{1}{8m}\left(x_n-\frac{a}{x_n}\right)^2\leqslant\sqrt{a}\leqslant x_{n+1}, \tag{34}$$

где $m=\min\{x_n,\ a/x_n\}$.

23.60. Доказать, что если ξ — двукратный корень уравнения $f(x)=0$, то для его нахождения можно использовать итерационный процесс

$$x_{n+1}=x_n-2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{35}$$

(модифицированный метод Ньютона). Указать достаточные условия сходимости последовательности $\{x_n\}$ к корню ξ.

23.61. Какую точность дает двукратное применение комбинированного метода при вычислении корня уравнения

$$x^4-x-1=0,$$

начиная с интервала (1,22; 1,23)?

23.62. Решить уравнение

$$x^3-4{,}1x^2+6{,}1x-1{,}6=0$$

1) методом деления пополам с точностью $5\cdot10^{-3}$; 2) методом хорд с точностью $5\cdot10^{-4}$; 3) методом касательных с точностью $5\cdot10^{-4}$; 4) комбинированным методом с точностью $5\cdot10^{-4}$.

23.63. Вычислить комбинированным методом наибольший корень уравнения $x^5-x-0{,}2=0$ с точностью 10^{-4}.

23.64. Вычислить комбинированным методом корни уравнения

$$x^4-3x^2+75x-10\,000=0$$

из интервалов $(-11;-10)$ и $(9;10)$ с точностью 10^{-4}.

23.65. Вычислить наименьший положительный корень уравнения

$$x\sin x=0{,}5$$

с точностью 10^{-6}.

23.66. Решить комбинированным методом с указанной погрешностью Δ уравнение:

1) $2x^2-e^{1-x}=0,\quad \Delta=10^{-5}$.

2) $2-x-\lg x=0,\quad \Delta=10^{-6}$.

23.67. Доказать, что метод Ньютона (метод касательных) имеет второй порядок.

23.68. Доказать, что итерационная формула

$$x_{n+1}=\frac{x_n^3+2ax_n}{3x_n^2+a}$$

для решения уравнения $x^2=a$, $a>0$, имеет третий порядок.

23.69. Используя разложение функции по формуле Тейлора до 2-го порядка, получить итерационную формулу для решения уравнения $f(x)=0$ и доказать, что она имеет третий порядок:

$$1)\quad x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)f'(x_n)}{(f'(x_n))^2-\frac{1}{2}f(x_n)f''(x_n)}. \tag{36}$$

$$2)\quad x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\frac{f^2(x_n)f''(x_n)}{2(f'(x_n))^3} \tag{37}$$

(*формула Чебышёва*).

23.70. Доказать, что наименьший положительный корень ξ уравнения

$$\operatorname{ctg}x=\lambda-x,\quad \lambda>2,$$

удовлетворяет неравенству

$$\xi<\frac{2}{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}.$$

23.71. Пусть $\{x_n\}$ — возрастающая последовательность положительных корней уравнения $x\sin x=1$. Доказать, что при $n\to\infty$:

1) $x_n=\pi n+o(1)$. 2) $x_n=\pi n+\dfrac{(-1)^n}{\pi n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

3) $x_n=\pi n+\dfrac{(-1)^n}{\pi n}-\dfrac{1}{\pi^3n^3}\left(1-\dfrac{(-1)^n}{6}\right)+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

23.72. Пусть $\{x_n\}$ — возрастающая последовательность положительных корней уравнения

$$\operatorname{tg}x=\frac{1}{1+x^2}.$$

Доказать, что при $n\to\infty$

$$x_n=\pi n+\frac{1}{(\pi n)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

23.73. Пусть $\{x_n\}$ — возрастающая последовательность положительных корней уравнения

$$\operatorname{tg}x=x.$$

Доказать, что при $n\to\infty$:

1) $x_n=\dfrac{\pi}{2}+\pi n+o(1)$. 2) $x_n=\dfrac{\pi}{2}+\pi n-\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+\pi n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

3) $x_n=\dfrac{\pi}{2}+\pi n-\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+\pi n}-\dfrac{2}{3\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)^3}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

§ 24. Вектор-функции. Кривые

1. Вектор-функции скалярного аргумента. Если X — подмножество множества действительных чисел ($X\subset\mathbb{R}$) и каждому значению $t\in X$ поставлен в соответствие вектор $\mathbf{r}(t)$ трехмерного пространства R^3, то говорят, что на множестве X задана *вектор-функция* (или *векторная функция*) $\mathbf{r}(t)$ *скалярного аргумента* t.

Если в пространстве R^3 фиксирована декартова система координат x, y, z, то задание вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, $t\in X$, равносильно заданию трех скалярных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — координат вектора $\mathbf{r}(t)$ (эти функции называются координатными функциями вектор-функции $\mathbf{r}(t)$):

$$\mathbf{r}(t)=(x(t);\ \ y(t);\ \ z(t)).$$

Если $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — координатные орты, то

$$\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}. \tag{1}$$

Если начало всех векторов $\mathbf{r}(t)$ помещено в начало координат, то они называются радиус-векторами, а множество их концов — годографом вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, $t\in X$. Физический смысл годографа вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ состоит в том, что он является траекторией движущейся точки, совпадающей с концом радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$, причем за параметр t можно принять время.

Если вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки t_0, то вектор $\mathbf{a}$ называется *пределом* *функции* $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 (или, что то же самое, при $t \to t_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех t, удовлетворяющих условию

$$|t - t_0| < \delta, \quad t \neq t_0, \tag{2}$$

выполняется неравенство

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| < \varepsilon. \tag{3}$$

В этом случае пишут

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a} \quad \text{или} \quad \lim_{t - t_0 \to 0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}. \tag{4}$$

Геометрически это означает, что вектор $\mathbf{r}(t)$ при $t \to t_0$ стремится к вектору $\mathbf{a}$ как по величине, так и по направлению (рис. 108).

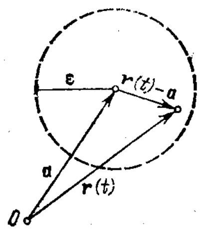


Рис. 108.

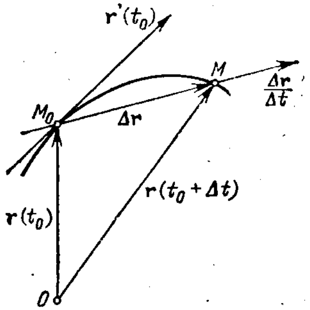


Рис. 109.

Условие (2)—(3) равносильно тому, что для любой последовательности $t_n \in X$, $t_n \neq t_0$, $n \in \mathbb{N}$, такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = t_0$, имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{r}(t_n) = \mathbf{a}. \tag{5}$$

Если $\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3)$, то для того, чтобы $\mathbf{a} = \lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a_1, \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = a_2, \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = a_3. \tag{6}$$

Если

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{o}, \tag{7}$$

то вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ называется *бесконечно малой* при $t \to t_0$.

Если функция $\mathbf{r}(t)$ определена в некоторой окрестности точки t_0 и

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0), \tag{8}$$

то функция $\mathbf{r}(t)$ называется *непрерывной* в точке t_0.

Если существует предел

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}, \tag{9}$$

то он называется *производной* вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 и обозначается $\mathbf{r}'(t_0)$ или $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0)$.

Если

$$\Delta t = t - t_0, \quad \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)$$

(вектор $\Delta\mathbf{r}$ называется *приращением* вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0), то (рис. 109)

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{10}$$

Вектор-функция $\mathbf{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$ имеет в точке t_0 производную тогда и только тогда, когда ее координатные функции имеют в этой точке производные, причем

$$\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0); y'(t_0); z'(t_0)). \tag{11}$$

Если годограф вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ является траекторией движущейся точки, а за параметр t принято время, то производная

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) = \mathbf{v}$$

является мгновенной скоростью в момент времени $t = t_0$.

Прямая, проходящая через конец M_0 вектора $\mathbf{r}(t_0)$ в направлении вектора $\Delta\mathbf{r}$ (см. рис. 109), называется *секущей* годографа, а ее предельное положение при $\Delta t \to 0$ — *касательной* к годографу в точке M_0. Если $\Delta\mathbf{r} \neq \mathbf{o}$, то вектор $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ при любом знаке приращения $\Delta t \neq 0$ всегда направлен по секущей в сторону возрастания параметра t; поэтому, если производная $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{o}$, то согласно (10) она направлена по касательной к годографу в точке M_0 в сторону возрастания параметра t. В этом случае уравнение касательной имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)u, \quad -\infty < u < +\infty, \tag{12}$$

или в координатном виде

$$x = x_0 + x'(t_0)u, \quad y = y_0 + y'(t_0)u, \quad z = z_0 + z'(t_0)u, \quad -\infty < u < +\infty, \tag{13}$$

где $\mathbf{r}(t_0) = (x_0; y_0; z_0)$. Отсюда следует, что

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}. \tag{14}$$

Для того чтобы вектор-функция, определенная в окрестности точки t_0, имела в этой точке производную, необходимо и достаточно, чтобы ее приращение $\Delta\mathbf{r}$ в этой точке было представимо в виде

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{a}\,\Delta t + \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\,\Delta t, \tag{15}$$

где $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t) = \mathbf{o}$. Из равенства (15) следует, что

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}'(t_0),$$

т. е. равенство (15) можно записать в виде

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t_0)\,\Delta t + \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\,\Delta t. \tag{16}$$

Бесконечно малая при $t \to t_0$ вектор-функция $\boldsymbol{\alpha}(t)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка*, чем бесконечно малая при $t \to t_0$ скалярная функция $\beta(t)$, если существует бесконечно малая при $t \to t_0$ вектор-функция $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ такая, что

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \beta(t)\,\boldsymbol{\varepsilon}(t).$$

В этом случае пишут

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{o}(\beta(t)), \quad t \to t_0. \tag{17}$$

Используя это обозначение, равенство (16) можно записать в виде

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t_0)\,\Delta t + \mathbf{o}(\Delta t), \quad \Delta t \to 0. \tag{18}$$

Линейная по аргументу Δt вектор-функция $\mathbf{r}'(t_0)\,\Delta t$ называется *дифференциалом вектор-функции* $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 и обозначается $d\mathbf{r}$ или, более подробно, $d\mathbf{r}(t_0)$. Приращение аргумента Δt в этом случае часто обозначают dt, таким образом,

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t_0)\,dt. \tag{19}$$

Если вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ имеет в точке t_0 производную, то говорят также, что она в этой точке *дифференцируема*.

Производные и дифференциалы высших порядков определяются для вектор-функций индуктивным образом.

Производная $\mathbf{r}^{(n)}$ порядка n является производной от производной порядка $n - 1$:

$$\mathbf{r}^{(n)} = (\mathbf{r}^{(n-1)})', \quad \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{r} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{20}$$

Дифференциал $d^n\mathbf{r}(t)$ порядка n определяется как дифференциал по переменной t от дифференциала $d^{n-1}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}^{(n-1)}(t)\,dt^{n-1}$ порядка $n - 1$ при условии, что приращение аргумента t при взятии нового дифференциала совпадает со старым приращением аргумента, т. е.

$$d^n\mathbf{r}(t) = d\left(\mathbf{r}^{(n-1)}(t)\,dt^{n-1}\right) = \mathbf{r}^{(n)}(t)\,dt^n. \tag{21}$$

Из этой формулы следует, что

$$\mathbf{r}^{(n)}(t) = \frac{d^n\mathbf{r}(t)}{dt^n} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{22}$$

Если вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ имеет в точке t_0 производные до порядка n включительно, то в окрестности этой точки справедлива *формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \frac{\mathbf{r}'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \ldots + \frac{\mathbf{r}^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \\ + \mathbf{o}((t - t_0)^n), \qquad t \to t_0. \tag{23}$$

Если годограф вектор-функции есть траектория движущейся точки, а за параметр t взято время, то вторая производная $\mathbf{r}''(t_0)$ является ускорением точки в момент времени t_0.

Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — векторы, то через $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ обозначается *скалярное*, а через $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — *векторное произведение*; скалярное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ иногда обозначается $\mathbf{a}^2$. Для трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ через $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ обозначается их *смешанное произведение*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}).$$

Для вектор-функций справедливы следующие правила дифференцирования:

$$(\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{r}_2'(t), \tag{24}$$

$$(f(t)\,\mathbf{r}(t))' = f'(t)\,\mathbf{r}(t) + f(t)\,\mathbf{r}'(t), \tag{25}$$

$$(\mathbf{r}_1(t),\ \mathbf{r}_2(t))' = (\mathbf{r}_1'(t),\ \mathbf{r}_2(t)) + (\mathbf{r}_1(t),\ \mathbf{r}_2'(t)), \tag{26}$$

$$[\mathbf{r}_1(t),\ \mathbf{r}_2(t)]' = [\mathbf{r}_1'(t),\ \mathbf{r}_2(t)] + [\mathbf{r}_1(t),\ \mathbf{r}_2'(t)]. \tag{27}$$

Пример 1. Построить годограф вектор-функции

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

написать уравнение его касательной в произвольной точке и доказать, что она образует постоянный угол с осью z.

Для любой точки $(x; y; z)$ годографа вектор-функции (28) имеем $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, и потому при любом $t \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $x^2 + y^2 = a^2$, т. е. все точки годографа вектор-функции (28) лежат на цилиндре, направляющей которого является окружность $x^2 + y^2 = a^2$ в плоскости переменных x, y, а образующая параллельна оси z. Если параметр t интерпретировать как время, то при равномерном движении по окружности проекции конца радиус-вектора (28) на плоскость переменных x, y его проекция на ось переменной z будет двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью b. Иначе говоря, аппликата точки годографа вектор-функции (28) растет пропорционально углу поворота ее проекции на плоскость x, y. Поэтому искомый годограф будет иметь вид, изображенный на рис. 110, и он называется винтовой линией. Для уточнения изображения можно составить таблицу положений точек годографа для отдельных значений t, например таблицу

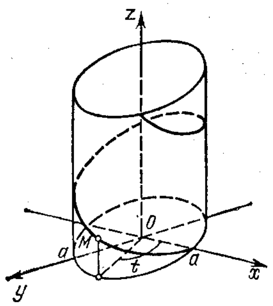


Рис. 110.

t	$\mathbf{r}$
0	$a\mathbf{i}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\frac{a\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}+\frac{b\pi}{4}\mathbf{k}$
$\frac{\pi}{2}$	$a\mathbf{j}+\frac{b\pi}{2}\mathbf{k}$
π	$-\mathbf{i}+b\pi\mathbf{k}$
$\frac{3}{2}\pi$	$-a\mathbf{j}+\frac{3}{2}\pi\mathbf{k}$
2π	$a\mathbf{i}+2b\pi\mathbf{k}$

Для нахождения касательных к винтовой линии найдем производную вектор-функции (28):

$$\mathbf{r}'(t)=-a\sin t\,\mathbf{i}+a\cos t\,\mathbf{j}+b\,\mathbf{k}.$$

Отсюда следует, что уравнение касательной к винтовой линии имеет вид

$$\frac{x-x_0}{-a\sin t_0}=\frac{y-y_0}{a\cos t_0}=\frac{z-z_0}{b},$$

а для косинуса угла φ, образованного касательной с осью z, справедливо равенство

$$\cos\varphi=\frac{(\mathbf{r}'(t),\,\mathbf{k})}{|\mathbf{r}'(t)|}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

таким образом, угол φ постоянен, это означает, что винтовая линия пересекает под одним и тем же углом все образующие цилиндра $x^2+y^2=a^2$, на котором она расположена. ▲

Пример 2. Доказать, что если

$$\mathbf{r}^{(k)}(t_0)=\mathbf{o}\quad(k=1,\,2,\,\ldots,\,n-1),\quad \mathbf{r}^{(n)}(t_0)\neq\mathbf{o},\tag{29}$$

то уравнение касательной к годографу в конце радиус-вектора $\mathbf{r}(t_0)$ имеет вид

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}^{(n)}(t_0)\,t+\mathbf{r}(t_0),\quad -\infty<t<+\infty.\tag{30}$$

△ Из условия (29) следует, что в рассматриваемом случае формула Тейлора для вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ имеет вид

$$\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(t_0+\Delta t)-\mathbf{r}(t_0)=\frac{1}{n!}\mathbf{r}^{(n)}(t_0)\,\Delta t^n+o(\Delta t^n),\quad \Delta t\to 0.$$

Поэтому для всех достаточно малых Δt выполняется условие $\Delta\mathbf{r}\neq\mathbf{o}$ и, следовательно, прямая, проходящая через концы радиус-векторов $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{r}(t_0+\Delta t)$, однозначно определена. Вектор $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t^n}$ параллелен этой прямой, и существует предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t^n}=\frac{1}{n!}\mathbf{r}^{(n)}(t_0).$$

Поэтому при $\Delta t\to 0$ существует предел указанной секущей, т. е. существует касательная к годографу в конце радиус-вектора $\mathbf{r}(t_0)$ и ее уравнение имеет вид (30). ▲

Пример 3. Доказать, что если $\mathbf{r}_0=\mathbf{r}(t_0)\neq\mathbf{o}$, существует $\mathbf{r}'_0=\mathbf{r}'(t_0)$, $\mathbf{e}(t)$ — единичный вектор в направлении вектора $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{e}_0=\mathbf{e}(t_0)$, то существует $\mathbf{e}'_0=\mathbf{e}'(t_0)$ и

$$\mathbf{r}'_0=(\mathbf{e}_0,\,\mathbf{r}'_0)\,\mathbf{e}_0+|\mathbf{r}_0|\,\mathbf{e}'_0.\tag{31}$$

Каков механический смысл этой формулы?

△ Ясно, что из непрерывности $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 и условия $\mathbf{r}_0\neq\mathbf{o}$ следует, что в некоторой окрестности точки t_0 выполняется неравенство $\mathbf{r}(t)\neq\mathbf{o}$, поэтому в этой окрестности определена функция

$$\mathbf{e}(t)=\frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|},$$

причем, очевидно,

$$|\mathbf{e}(t)|=1.\tag{32}$$

Поскольку $\mathbf{r}=|\mathbf{r}|\,\mathbf{e}$ и

$$(|\mathbf{r}|)'_{t=t_0}=\left(\sqrt{\mathbf{r}^2}\right)'_{t=t_0}=\left.\frac{(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')}{\sqrt{\mathbf{r}^2}}\right|_{t=t_0}=\left.\frac{(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|}\right|_{t=t_0}=(\mathbf{e}_0,\,\mathbf{r}'_0),$$

то из дифференцируемости в точке t_0 вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ следует дифференцируемость в этой точке скалярной функции $|\mathbf{r}(t)|$ и вектор-функции $\mathbf{e}(t)=\frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|}$. Поэтому

$$\mathbf{r}'_0=\mathbf{r}'(t_0)=(|\mathbf{r}|\,\mathbf{e})'_{t=t_0}=(|\mathbf{r}|'\,\mathbf{e}+|\mathbf{r}|\,\mathbf{e}')|_{t=t_0}=(\mathbf{e}_0,\,\mathbf{r}'_0)\,\mathbf{e}_0+|\mathbf{r}_0|\,\mathbf{e}'_0,$$

т. е. равенство (31) доказано. Из (32) следует, что $\mathbf{e}^2(t)=1$. Дифференцируя это равенство, получим $(\mathbf{e}(t_0),\mathbf{e}'(t_0))=0$, что означает, что векторы $\mathbf{e}_0=\mathbf{e}(t_0)$ и $\mathbf{e}'_0=\mathbf{e}'(t_0)$ ортогональны. Поэтому в случае, когда годограф вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ является траекторией движущейся точки, а параметр t есть время, равенство (31) показывает, что движение этой точки в каждый момент времени t_0 можно рассматривать как результат сложения двух движений: поступательного в направлении радиус-вектора $\mathbf{r}_0$ и вращательного по окружности радиуса $|\mathbf{r}_0|$, т. е. в направлении, перпендикулярном вектору $\mathbf{r}_0$. Формула (31) дает разложение мгновенной скорости $\mathbf{v}_0=\mathbf{r}'_0$ на радиальную составляющую $(\mathbf{e}_0,\,\mathbf{r}'_0)\,\mathbf{e}_0$, представляющую собой проекцию скорости $\mathbf{v}_0$ на направление радиус-вектора $\mathbf{r}_0$, и трансверсальную составляющую $|\mathbf{r}_0|\,\mathbf{e}'_0$ в направлении вектора $\mathbf{e}'_0$, т. е. перпендикулярно вектору $\mathbf{e}_0$, а следовательно, и вектору $\mathbf{r}_0$. ▲

Пример 4. Пусть вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ определена и не обращается в нуль в некоторой окрестности U точки t_0, и пусть $\varphi(t)$ — наименьший неотрицательный угол, выраженный в радианах, между векторами $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{r}(t)$, $t \in U$, $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \pi$; тогда $\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \varphi(t)$ (ибо $\varphi(t_0) = 0$). Положим $\Delta t = t - t_0$. Предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| \tag{33}$$

называется угловой скоростью вращения вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 и обозначается через $\omega = \omega(t_0; \mathbf{r})$. Доказать, что если $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) \neq \mathbf{o}$ и существует производная $\mathbf{r}_0' = \mathbf{r}'(t_0)$, то существует и угловая скорость вращения $\omega = \omega(t_0; \mathbf{r})$, причем

$$\omega = \frac{|[\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0']|}{r_0^2}. \tag{34}$$

Для случая $|\mathbf{r}(t)| = \mathrm{const}$ получить отсюда формулу

$$\omega = \frac{|\mathbf{r}_0'|}{|\mathbf{r}_0|}. \tag{35}$$

Каков ее механический смысл?

△ В силу существования производной $\mathbf{r}_0'$ вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ непрерывна в точке t_0. Отсюда и из условия $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{o}$ следует, что для всех достаточно малых приращений Δt выполняется неравенство $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) \neq \mathbf{o}$, и потому определен угол $\Delta\varphi$ между векторами $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)$, причем

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta\varphi = 0.$$

Для вычисления предела (33) заменим бесконечно малую при $\Delta t \to 0$ функцию $\Delta\varphi$ на эквивалентную ей функцию $\sin\Delta\varphi$, которую найдем из равенства

$$|[\mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}(t_0 + \Delta t)]| = |\mathbf{r}(t_0)|\,|\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)|\,|\sin\Delta\varphi|.$$

Таким образом, будем иметь

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|[\mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}(t_0 + \Delta t)]|}{|\mathbf{r}(t_0)|\,|\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)|\,|\Delta t|} =$$

$$= \frac{1}{r_0^2} \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{[\mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}(t_0 + \Delta t)]}{\Delta t} \right| \tag{36}$$

(здесь снова была использована непрерывность вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{r}(t_0)$). Далее, в силу дифференцируемости функции $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 имеем

$$\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_0' \Delta t + \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\,\Delta t,$$

где $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t) = \mathbf{o}$. Подставив это выражение в (36) и заметив, что $[\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0] = \mathbf{o}$, а $\lim\limits_{\Delta t \to 0} [\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)] = \mathbf{o}$, получим формулу (34).

Если $|\mathbf{r}(t)| = r$ — постоянная, то, дифференцируя равенство $\mathbf{r}^2 = r^2$, будем иметь $(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0') = 0$, т. е. $|\mathbf{r}_0|\,|\mathbf{r}_0'| \cos\psi = 0$, где ψ — угол между векторами $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_0'$. Поскольку $r_0 \neq \mathbf{o}$, то либо $\mathbf{r}_0' = \mathbf{o}$, либо $\psi = \pi/2$ и, следовательно, $\sin\psi = 1$. В обоих случаях

$$|[\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0']| = |\mathbf{r}_0|\,|\mathbf{r}_0'|\,|\sin\psi| = r_0 |\mathbf{r}_0'|.$$

Подставляя это выражение в (34), получим формулу (35). В случае, когда годограф вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ является траекторией движения точки, а параметр t — временем и, следовательно, $\mathbf{r}' = \mathbf{v}$ — скоростью движения, в силу (35) получим

$$\omega = \frac{v}{r}, \qquad v = |\mathbf{v}|, \qquad r = |\mathbf{r}|,$$

т. е. формулу, связывающую значения угловой скорости ω и линейной v при движении точки по поверхности шара $|\mathbf{r}| = r = \mathrm{const}$. ▲

Пример 5. Доказать, что если вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема внутри него, то существует такая точка $\xi \in (a; b)$, что

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \leqslant |\mathbf{r}'(\xi)|\,(b - a). \tag{37}$$

▲ Если $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, то равенство (37) верно при любом выборе точки $\xi \in (a; b)$. Поэтому предположим, что $\mathbf{r}(a) \neq \mathbf{r}(b)$, и обозначим через $\mathbf{e}$ единичный вектор в направлении вектора $\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)$. Тогда

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| = (\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a), \mathbf{e}) = (\mathbf{r}(b), \mathbf{e}) - (\mathbf{r}(a), \mathbf{e}). \tag{38}$$

Рассмотрим скалярную функцию $f(t) = (\mathbf{r}(t), \mathbf{e})$. Она удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа о среднем значении, поэтому существует такая точка $\xi \in (a; b)$, что $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$, т. е.

$$(\mathbf{r}(b), \mathbf{e}) - (\mathbf{r}(a), \mathbf{e}) = (\mathbf{r}'(\xi), \mathbf{e})\,(b - a).$$

Отсюда, применив неравенство Коши для оценки правой части этого равенства:

$$|(\mathbf{r}'(\xi), \mathbf{e})| \leqslant |\mathbf{r}'(\xi)|\,|\mathbf{e}| = |\mathbf{r}'(\xi)|$$

и воспользовавшись равенством (38), получим неравенство (37). ▲

24.1. Построить годографы вектор-функций $(-\infty < t < +\infty)$:

1) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$. 2) $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = t^2$

3) $x = 1$, $y = t$, $z = t^2$. 4) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

5) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 0$, $a > 0$.

6) $x = t^2 - 2t + 3$, $y = t^2 - 2t + 1$, $z = 0$.

7) $x = a\sin^2 t$, $y = b\cos^2 t$, $z = t$.

24.2. Доказать, что годограф вектор-функции

$$\mathbf{r} = \sin 2\varphi\,\mathbf{i} + (1 - \cos 2\varphi)\,\mathbf{j} + 2\cos\varphi\,\mathbf{k}$$

лежит на сфере.

24.3. Доказать, что годограф вектор-функции

$$\mathbf{r} = (a_1t^2 + b_1t + c_1)\,\mathbf{i} + (a_2t^2 + b_2t + c_2)\,\mathbf{j} + (a_3t^2 + b_3t + c_3)\,\mathbf{k}$$

лежит в некоторой плоскости, и найти уравнение этой плоскости.

24.4. Доказать: если $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$, то $\lim\limits_{t\to t_0} |\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{a}|$. Верно ли обратное утверждение?

24.5. Доказать, что вектор-функция

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$$

является бесконечно малой при $t \to 0$.

24.6. Найти пределы вектор-функций:

1) $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1-t}{1+t}\,\mathbf{i} + \dfrac{\sin t}{t}\,\mathbf{j} - \dfrac{\ln(1-t)}{t}\,\mathbf{k}$ при $t \to 0$.

2) $\mathbf{r}(t) = \dfrac{\sin t}{t-\pi}\,\mathbf{i} + \dfrac{\ln(t/\pi)}{\pi - t}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ при $t \to \pi$.

24.7. Доказать, что для того, чтобы вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ имела при $t \to t_0$ предел, равный $\mathbf{a}$, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \alpha(t),$$

где $\alpha(t)$ — бесконечно малая при $t \to t_0$ вектор-функция.

24.8. Доказать: если $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$ и $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = \lambda$, то

$$\lim_{t\to t_0} f(t)\,\mathbf{r}(t) = \lambda\mathbf{a}.$$

24.9. Доказать: если $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{a}$, $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{b}$ и $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_3(t) = \mathbf{c}$, то:

1) $\lim\limits_{t\to t_0} (\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

2) $\lim\limits_{t\to t_0} (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

3) $\lim\limits_{t\to t_0} [\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

4) $\lim\limits_{t\to t_0} (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \mathbf{r}_3(t)) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

24.10. Доказать, что если скалярные функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ и вектор-функции $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$, $\mathbf{r}_3(t)$ непрерывны в точке t_0, то в этой точке непрерывны и функции:

1) $\lambda_1(t)\,\mathbf{r}_1(t) + \lambda_2(t)\,\mathbf{r}_2(t)$. 2) $(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t))$.

3) $[\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)]$. 4) $(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \mathbf{r}_3(t))$.

5) $|\mathbf{r}_1(t)|$.

24.11. Найти производную вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ и написать уравнение касательной в произвольной точке ее годографа, если:

1) $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$. 2) $\mathbf{r}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

3) $\mathbf{r}(t) = a\sin^2\omega t\,\mathbf{i} + b\cos^2\omega t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$.

24.12. Найти производные функций:

1) $\mathbf{r}^2(t)$. 2) $\sqrt{\mathbf{r}^2(t)}$. 3) $[[\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)], \mathbf{r}''(t)]$.

4) $(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t))$.

24.13. Доказать, что если длина векторов $\mathbf{r}(t)$ постоянна в окрестности точки t_0 и существует производная $\mathbf{r}'(t_0)$, то векторы $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{r}'(t_0)$ ортогональны. Каков механический смысл этого факта?

24.14. Доказать, что для того, чтобы во всех точках некоторого интервала векторы $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}'(t)$ были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы скалярная функция $|\mathbf{r}(t)|$ была постоянной на этом интервале.

24.15. Доказать, что для того, чтобы дифференцируемая и не обращающаяся в нуль на интервале $(a; b)$ вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ имела постоянное направление (т. е. чтобы при любом $t \in (a; b)$ вектор $\mathbf{r}(t)$ был коллинеарен, например, с вектором $\mathbf{r}((a+b)/2)$), необходимо и достаточно, чтобы векторы $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}'(t)$ были коллинеарны.

24.16. Пусть вектор-функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ имеет в точке t_0 производную. Будет ли дифференцируема в этой точке функция $|\mathbf{r}(t)|$? Верны ли в этой точке равенства $|\mathbf{r}'| = |\mathbf{r}|'$ и $(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = |\mathbf{r}|\,|\mathbf{r}|'$?

24.17. Доказать, что если $\mathbf{r} = x_1(x, y, z, t)\,\mathbf{i} + x_2(x, y, z, t)\,\mathbf{j} + x_3(x, y, z, t)\,\mathbf{k}$, где x_1, x_2, x_3 — непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, а x, y, z — непрерывно дифференцируемые функции от t, то

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

24.18. Построить годографы вектор-функции $\mathbf{r}(t) = (a\sin t, -a\cos t, bt^2)$ и ее производной.

24.19. Пользуясь определением производной вектор-функции, доказать формулы:

1) $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2'$.

2) $(f\mathbf{r})' = f'\mathbf{r} + f\mathbf{r}'$, f — скалярная функция.

3) $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)' = (\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2')$.

4) $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]' = [\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2] + [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2']$.

5) $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)' = (\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2', \mathbf{r}_3) + (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3')$.

24.20. Доказать: если $\mathbf{r} = \mathbf{a}\cos\omega t + \mathbf{b}\sin\omega t$, где ω, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные, то:

1) $\left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right] = [\omega\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. 2) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2\mathbf{r} = \mathbf{o}$.

24.21. Доказать: если $\mathbf{r} = \mathbf{a}e^{\omega t} + \mathbf{b}e^{-\omega t}$, где ω, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные, то

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \omega^2\mathbf{r} = \mathbf{o}.$$

24.22. Доказать, что если вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0, то она и непрерывна в ней.

24.23. Пусть вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\mathbf{r}'' = [\mathbf{r}', \mathbf{a}]$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор. Выразить через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{r}'$:

1) $[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']^2$. 2) $(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')$.

24.24. Пусть для дважды дифференцируемой на отрезке $[a; b]$ вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ во всех точках этого отрезка выполняются условия

$$(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)) = 0, \quad [\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)] \neq \mathbf{o}.$$

Доказать, что тогда годограф вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ лежит на некоторой плоскости.

24.25. Доказать, что если у дважды дифференцируемой на отрезке $[a; b]$ вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ во всех точках этого отрезка векторы $\mathbf{r}'(t)$ и $\mathbf{r}''(t)$ отличны от нуля и коллинеарны, то годограф вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ является отрезком прямой.

24.26. Доказать, что годографом вектор-функции $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} + t^2\mathbf{c}$, $t \in \mathbb{R}$, где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — постоянные векторы, причем векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не коллинеарны, является парабола. Что будет представлять из себя годограф, если векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ коллинеарны?

24.27. Доказать, что годограф вектор-функции $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \cos t\,\mathbf{b} + \sin t\,\mathbf{c}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — постоянные векторы, причем векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не коллинеарны, является эллипсом.

24.28. Доказать, что траектория материальной точки, движущейся под действием центральной силы, является плоской.

24.29. Траектория движения точки задана в цилиндрических координатах:

$$\mathbf{r}(t) = (\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi;\ z),$$

где t — время, $\rho(t)$, $\varphi(t)$, $z(t)$ — известные функции. Найти:

1) Косинус угла α между радиус-вектором движущейся точки и вектором ее мгновенной скорости.

2) Величину ускорения в случае движения по цилиндру $\rho = \rho_0$.

24.30. Траектория движущейся точки задана в сферических координатах:

$$\mathbf{r}(t) = (\rho\cos\varphi\cos\theta;\ \rho\sin\varphi\cos\theta;\ \rho\sin\theta),$$

где t — время, $\rho(t)$, $\varphi(t)$, $\theta(t)$ — известные функции. Найти величину мгновенной скорости.

24.31. Пусть m — масса точки, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ — действующая на нее сила, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ — закон движения точки, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ — ее ускорение, $W = W(t)$ — кинетическая энергия (t — время, m — постоянная). Из закона Ньютона $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ вывести формулу $dW = (\mathbf{F}, d\mathbf{r})$.

24.32. При условиях предыдущей задачи доказать формулу $d\mathbf{N} = \mathbf{M}\,dt$, где $\mathbf{N}$ — момент количества движения точки относительно произвольно выбранного начала координат O, $\mathbf{M}$ — момент силы $\mathbf{F}$ относительно точки O. (Количеством движения материальной точки называется вектор, равный произведению ее массы на скорость. Если какой-либо вектор $\mathbf{b}$ приложен к точке P, то моментом вектора $\mathbf{b}$ относительно точки O называется вектор $[\overline{OP}, \mathbf{b}]$.)

24.33. Привести пример дифференцируемой вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, для которой не существует такой точки $\xi \in [a; b]$, что $\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a) = \mathbf{r}'(\xi)(b - a)$ (т. е. показать, что для вектор-функций в этом смысле неверен аналог формулы конечных приращений Лагранжа).

24.34. Доказать, что для того, чтобы дифференцируемая на интервале $(a; b)$ вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ была постоянной, т. е. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{c}$, $a < t < b$, $\mathbf{c}$ — постоянный вектор, необходимо и достаточно, чтобы производная $\mathbf{r}'(t)$ тождественно равнялась нулю на интервале $(a; b)$.

---

2. **Кривые на плоскости и в пространстве.** *Кривой* (или, более подробно, параметрически заданной кривой) называется множество Γ в пространстве R^3, заданное как непрерывный образ некоторого отрезка $[a; b]$, т. е.

$$t \to M(t) \in R^3, \quad t \in [a; b],$$

где $M(t)$ — непрерывное отображение. В этом случае пишут

$$\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}. \tag{39}$$

Если в пространстве R^3 фиксирована декартова система координат x, y, z, то задание отображения $M(t)$ равносильно заданию таких трех функций

$$x(t),\ y(t),\ z(t),\ a \leqslant t \leqslant b, \tag{40}$$

называемых координатными функциями отображения $M(t)$, что

$$M(t) = (x(t);\ y(t);\ z(t)). \tag{41}$$

Непрерывность отображения $M(t)$ означает непрерывность на отрезке $[a; b]$ всех его координатных функций. Отображение

$M(t)$ называется *параметризацией* или *представлением кривой* Γ, а отображение (40) при выполнении условия (41) — ее *координатным представлением*. Переменная t называется *параметром* на кривой Γ.

Множество значений отображения $M(t)$ в пространстве R^3 называется *носителем кривой* Γ. Если одна и та же точка носителя кривой Γ является при отображении $M(t)$ образом двух разных точек отрезка $[a; b]$, то она называется *точкой самопересечения* (или *кратной точкой*) кривой. Обычно кривая и ее носитель обозначаются одной и той же буквой, а часто носитель кривой называется также *кривой*.

Например, когда говорят, что график уравнения $F(x, y) = 0$ на плоскости или пересечение графиков уравнений $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$ в пространстве являются кривыми, то под этим понимают, что эти множества являются носителями соответствующих кривых.

Если

$$t = t(t_1), \quad a_1 \leqslant t_1 \leqslant b_1, \tag{42}$$

— строго монотонная непрерывная функция, то отображение

$$M(t(t_1)), \quad a_1 \leqslant t_1 \leqslant b_1,$$

называется представлением той же самой кривой (39), а функция (42) — допустимым преобразованием параметра.

Таким образом, кривая является определенным классом непрерывных отображений отрезков в пространстве, связанных допустимыми преобразованиями параметра.

Вектор-функция

$$\mathbf{r}(t) = (x(t); y(t); z(t)), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{43}$$

называется *векторным представлением кривой* (39), причем пишут

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Таким образом, кривую Γ можно задать в одном из трех видов:

$$\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\},$$
$$\Gamma = \{x(t), y(t), z(t);\ a \leqslant t \leqslant b\},$$
$$\Gamma = \{\mathbf{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Иногда под кривой понимается также и множество в пространстве, заданное как непрерывный образ любого промежутка числовой оси (т. е. не обязательно отрезка, а возможно, интервала или полуинтервала).

Всякая параметризация кривой порождает на ней определенный порядок точек: если $\Gamma = \{M(t); a \leqslant t \leqslant b\}$, то точка $M(t_2)$ называется следующей за точкой $M(t_1)$, если $t_2 > t_1$. Если на кривой задан порядок точек (для чего достаточно зафиксировать некоторую ее параметризацию), то она называется

ориентированной кривой. Для ориентированных кривых допустимыми преобразованиями параметра являются только строго возрастающие функции (42). Если $\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, то ориентированная кривая, заданная представлением $M(a + b - t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, называется *кривой, ориентированной противоположно заданной кривой* Γ.

Если координатные функции (40) отображения $M(t)$ (см. (41)) или, что то же самое, координатные функции вектор-функции (43) дифференцируемы, либо непрерывно дифференцируемы, либо дважды дифференцируемы и т. д., то кривая (39) называется соответственно *дифференцируемой*, либо *непрерывно дифференцируемой*, либо *дважды дифференцируемой* и т. д. Для дифференцируемой (непрерывно дифференцируемой, дважды дифференцируемой и т. д.) кривой допустимыми преобразованиями параметра являются только дифференцируемые (соответственно непрерывно дифференцируемые, дважды дифференцируемые и т. д.) преобразования параметра, у которых производная не обращается в нуль.

Точка $M(a)$ называется *начальной*, а точка $M(b)$ — *конечной точкой кривой* (39). Если $M(a) = M(b)$, то кривая (39) называется *замкнутой*.

Если кривая лежит в некоторой плоскости, то она называется *плоской*, а если она лежит на некоторой сфере, то — *сферической кривой*. Если на плоскости, на которой лежит рассматриваемая плоская кривая, задана полярная система координат ρ, φ, то задание кривой уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $a \leqslant \varphi \leqslant b$, называется ее *представлением в полярных координатах*. Если воспользоваться формулами перехода от прямоугольных декартовых координат x, y к полярным: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, то из представления кривой в полярных координатах можно получить ее параметрическое представление с параметром φ:

$$x = \rho(\varphi) \cos \varphi, \quad y = \rho(\varphi) \sin \varphi, \quad a \leqslant \varphi \leqslant b.$$

Если заданы две кривые

$$\Gamma_1 = \{M_1(t);\ a \leqslant t \leqslant b\} \text{ и } \Gamma_2 = \{M_2(t);\ b \leqslant t \leqslant c\},$$

причем $M_1(b) = M_2(b)$, то кривая

$$\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant c\},$$

где

$$M(t) = \begin{cases} M_1(t), & \text{если} \quad a \leqslant t \leqslant b, \\ M_2(t), & \text{если} \quad b \leqslant t \leqslant c, \end{cases}$$

называется *объединением* (*суммой*) *кривых* Γ_1 и Γ_2 и обозначается через $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Пусть $\Gamma = \{\mathbf{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — дифференцируемая кривая и $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{o}$ (или $\mathbf{r}(t_0) = \ldots = \mathbf{r}^{(n-1)}(t_0) = \mathbf{o}$, $\mathbf{r}^{(n)}(t_0) \neq \mathbf{o}$), $t_0 \in [a; b]$. Тогда прямая, являющаяся касательной к годографу вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ в конце радиус-вектора $\mathbf{r}(t_0)$, называется и *касательной к кривой* Г. Так определенная касательная к кривой не зависит от выбора параметризации кривой.

Вектор $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{o}$ называется *касательным вектором* к кривой Г, а его направление — *положительным направлением на касательной* при фиксированной ее параметризации; оно соответствует возрастанию параметра, поэтому вектор $\mathbf{r}'(t_0)$ называют также *касательным вектором ориентированной кривой* Г.

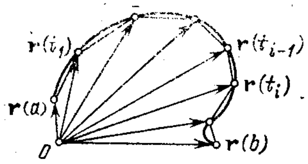


Рис. 111.

Плоскость, проходящая через конец радиус-вектора $\mathbf{r}(t_0)$ и перпендикулярная к касательной прямой, называется *нормальной плоскостью* (в соответствующей точке кривой), а каждая прямая, проходящая через конец указанного радиус-вектора и лежащая в нормальной плоскости, называется *нормалью*.

Углом между ориентированными кривыми, пересекающимися в некоторой точке, называется угол между их касательными в этой точке.

Пусть

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\} \tag{44}$$

— кривая, $\tau = \{t_i\}\big|_{i=0}^{i=n}$ — разбиение отрезка $[a; b]$: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, L_τ — ломаная с вершинами в концах радиус-векторов $\mathbf{r}(t_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ (рис. 111), σ_τ — ее длина:

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})|.$$

Величина

$$S_\Gamma = \sup_\tau \sigma_\tau,$$

где верхняя грань берется по возможным разбиениям τ отрезка $[a; b]$, называется *длиной кривой* (44).

Если $S_\Gamma < +\infty$, то кривая Г называется *спрямляемой*.

Теорема 1. Если кривая (44) непрерывно дифференцируема, то она спрямляема и ее длина S_Γ удовлетворяет неравенству

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \leqslant S_\Gamma \leqslant (b-a) \max_{[a;\ b]} |\mathbf{r}'(t)|. \tag{45}$$

Теорема 2. Если кривая (44) непрерывно дифференцируема, то переменная длина дуги s, отсчитываемая от начала кривой или соответственно от ее конца, является возрастающей, соответственно убывающей, непрерывно дифференцируемой функцией параметра t; при этом

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|, \text{ соответственно } \frac{ds}{dt} = -\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|. \tag{46}$$

Если $\mathbf{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$, то

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{47}$$

Когда параметром непрерывно дифференцируемой кривой является переменная длина дуги s:

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}, \quad \mathbf{r}(s) = (x(s); y(s); z(s)), \tag{48}$$

то

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = 1,$$

т. е. вектор

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \tag{49}$$

является *единичным касательным вектором* к кривой (48). Поэтому, если $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ — *направляющие косинусы положительного направления касательной* к кривой (48), т. е.

$$\boldsymbol{\tau} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma),$$

то

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma. \tag{50}$$

Если кривая является графиком функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и переменная длина ее дуг $s = s(x)$ отсчитывается от начала графика $(a; f(a))$, то

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Точка $(x(t_0); y(t_0); z(t_0))$ кривой (44) называется *особой*, если $\mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{o}$; если же $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{o}$, то — *неособой*.

У всякой непрерывно дифференцируемой кривой (44) без особых точек существует ее представление $\mathbf{r}(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S$, в котором за параметр s взята переменная длина дуги этой кривой.

Пример 6. Представить пересечение шара $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$ в виде параметрически заданной кривой (точнее, носителя кривой).

◁ Из уравнения $x^2 + y^2 = Rx$ следует, что $0 \leqslant x \leqslant R$. Поэтому можно положить $x = R\sin^2 t$. Тогда

$$y^2 = Rx - x^2 = R^2 \sin^2 t \cos^2 t,$$
$$z^2 = R^2 - (x^2 + y^2) = R^2 - Rx = R^2 \cos^2 t,$$

и легко проверить, что кривая

$$\left.\begin{aligned} x = R\sin^2 t, \quad & y = R\sin t\cos t, \\ z = R\cos t, \quad & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

совпадает с пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$, причем точка $(R; 0; 0)$ получается при значениях параметров $t = \pi/2$ и $t = 3\pi/2$, т. е. является точкой самопе-

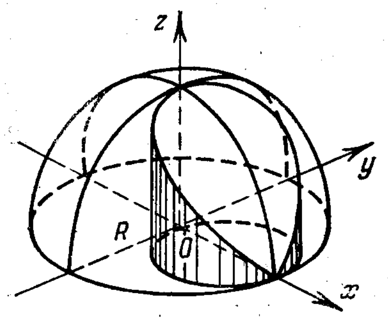


Рис. 112.

ресечения. Кривая (51) называется *кривой Вивиани* (рис. 112). ▲

Пример 7. Найти касательные прямые и нормальные плоскости кривой $z = x^2 + y^2$, $y = x$.

△ Примем переменную x за параметр на данной кривой. Тогда представление кривой будет иметь вид

$$\mathbf{r}(x) = (x;\ x;\ 2x^2).$$

Найдя отсюда касательный вектор $\mathbf{r}'(x) = (1;\ 1;\ 4x)$, получим, в силу формулы (14), уравнение касательной в точке $\{x_0;\ x_0;\ 2x_0^2\}$ в виде

$$x - x_0 = y - x_0 = \frac{z - 2x_0^2}{4x_0}.$$

Поскольку вектор $\mathbf{r}'(x_0) = (1;\ 1;\ 4x_0)$ перпендикулярен нормальной плоскости кривой в рассматриваемой точке, то уравнение этой плоскости имеет вид

$$(x - x_0) + (y - x_0) + 4x_0(z - 2x_0^2) = 0,$$

т. е.

$$x + y + 4x_0 z = 2x_0 + 8x_0^3. \ ▲$$

Пример 8. При каких a кривая

$$\left.\begin{aligned} x = e^{at}\cos t, \quad & y = e^{at}\sin t, \\ z = e^{at}, \quad & -\infty < t < +\infty, \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

пересекает все образующие конуса $x^2 + y^2 = z^2$ под углом $\pi/4$?

△ Простой подстановкой в уравнение конуса легко проверить, что кривая (52) действительно лежит на нем. Если $\mathbf{r}(t)$ — вектор с координатами (52), то касательный вектор $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t)$ к кривой (52) имеет вид

$$\mathbf{r}'(t) = (e^{at}(a\cos t - \sin t);\ \ e^{at}(a\sin t + \cos t);\ \ ae^{at}),$$

а вектор $\mathbf{l} = \mathbf{l}(t)$, направленный по образующей конуса $x^2 + y^2 = z^2$ в той же точке кривой (52), — вид

$$\mathbf{l}(t) = \left(x;\ y;\ \sqrt{x^2 + y^2}\right) = (e^{at}\cos t;\ e^{at}\sin t;\ e^{at}).$$

Поскольку

$$|\mathbf{r}'(t)| = e^{at}\sqrt{2a^2 + 1}, \quad |\mathbf{l}(t)| = e^{at}\sqrt{2},$$

то

$$\cos(\widehat{\mathbf{r}'\mathbf{l}}) = \frac{(\mathbf{r}',\ \mathbf{l})}{|\mathbf{r}'|\,|\mathbf{l}|} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + 1}}. \tag{53}$$

Поэтому, если угол между векторами $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{l}$ равен $\pi/4$ или $3\pi/4$, то из (53) получается уравнение

$$\frac{|a|\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда $a = \pm 1/\sqrt{2}$. ▲

Пример 9. Найти длину дуги $s(t)$ *винтовой линии*

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt, \quad 0 \leqslant t < +\infty, \tag{54}$$

и получить параметризацию винтовой линии, когда за параметр на ней принята переменная длина дуги.

△ Поскольку для касательного вектора $\mathbf{r}'(t)$ винтовой линии имеет место формула

$$\mathbf{r}'(t) = (-a\sin t;\ a\cos t;\ b),$$

то, в силу формулы (46), для производной по параметру t длины дуги, отсчитываемой в сторону возрастания параметра, будем иметь

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Если производная некоторой функции постоянна, то сама функция линейна, и так как в данном случае $s(0) = 0$, то

$$s(t) = t\sqrt{a^2 + b^2}, \quad t \geqslant 0.$$

Подставляя $t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ в формулы (54), получим

$$x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$z = \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \ ▲$$

24.35. Составить параметрическое уравнение развернутой окружности, т. е. траектории конца туго натянутой нити, сматывающейся с неподвижной круглой плоской катушки.

24.36. Прямая OL, не перпендикулярная оси Oz, равномерно вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью ω. Точка M движется по прямой OL: 1) со скоростью, пропорциональной расстоянию OM подвижной точки M до точки O; 2) с постоянной скоростью. В первом случае точка M описывает коническую спираль, а во втором — коническую винтовую линию. Написать параметрические уравнения этих кривых.

24.37. Доказать, что уравнения

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad -\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2,$$

и

$$x = \sqrt{t(2 - t)}, \quad y = t - 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2,$$

являются параметризациями одной и той же кривой.

24.38. Доказать, что уравнения

$$x = a\cos t,\quad y = b\sin t,\quad -\pi < t < \pi,$$

и

$$x = a\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y = b\frac{2t}{1+t^2},\quad -\infty < t < +\infty,$$

являются параметризациями одной и той же кривой. Как точка движется по этой кривой, когда параметр t растет от $-\infty$ до $+\infty$?

24.39. Показать, что кривая

$$x = e^{at}\cos t,\quad y = e^{at}\sin t,\quad z = e^{at}$$

лежит на конусе $z^2 = x^2 + y^2$.

24.40. Показать, что кривая

$$x = \frac{t}{1+t^2+t^4},\quad y = \frac{t^2}{1+t^2+t^4},\quad z = \frac{t^3}{1+t^2+t^4}$$

является сферической кривой.

24.41. При каком условии на матрицу (a_{ij}) $(i, j = 1, 2, 3)$ кривая

$$\begin{aligned} x &= a_{11}\varphi(t) + a_{12}\psi(t) + a_{13}\chi(t) + b_1,\\ y &= a_{21}\varphi(t) + a_{22}\psi(t) + a_{23}\chi(t) + b_2,\\ z &= a_{31}\varphi(t) + a_{32}\psi(t) + a_{33}\chi(t) + b_3 \end{aligned}$$

является плоской кривой?

24.42. Доказать, что проекция кривой Вивиани

$$x = R\sin^2 t,\quad y = R\sin t\cos t,\quad z = R\cos t,\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

на плоскость переменных x и z является дугой параболы.

24.43. Найти проекцию кривой $x = e^t\sin t$, $y = e^t\cos t$, $z = t$, $-\infty < t < +\infty$, на плоскость переменных x и y.

24.44. Доказать, что проекция винтовой линии

$$x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad z = bt,\quad -\infty < t < +\infty,$$

на плоскость переменных y и z является синусоидой.

24.45. Доказать, что при переносе начала координат в точку $O_1 = (0; 0; \beta b)$ и повороте осей абсцисс и ординат вокруг новой оси аппликат на угол β представлению винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ можно придать вид $x_1 = a\cos t_1$, $y_1 = a\sin t_1$, $z_1 = bt_1$. Это показывает, что винтовая линия способна скользить сама по себе.

24.46. Найти уравнение касательной к кривой:

1) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t^2$ при $t = 1$.

2) $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$ при $t = 0$.

24.47. Составить уравнение касательной к кривой

$$x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t),\quad z = 4a\sin(t/2)$$

при $t = \pi/2$. Какой угол образует эта касательная с осью Oz?

24.48. Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости кривой $x = t^4$, $y = t^3$, $z = t^2$ в произвольной ее точке.

24.49. Найти касательную к кривой Вивиани (см. **24.42**), параллельную плоскости $y = 0$.

24.50. В каких точках касательная к кривой $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$ параллельна плоскости $3x + y + z + 2 = 0$?

24.51. Найти нормальную плоскость кривой $z = x^2 + y^2$, $y = x$, перпендикулярную прямой $x = y = z$.

24.52. Найти касательную к кривой $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 + z^2 = 25$ в точке $(1; 3; 4)$.

24.53. Найти косинусы углов с осями координат у касательных к кривой $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$.

24.54. К кривой $y^2 = 2px$, $z^2 = 2qx$ проведена касательная в точке, в которой $x = (p + q)/2$. Найти длину отрезка этой касательной от точки касания до плоскости $x = 0$.

24.55. Доказать, что нормальные плоскости кривой $x = a\cos t$, $y = a\sin\alpha\sin t$, $z = a\cos\alpha\sin t$ проходят через прямую $x = 0$, $z + y\operatorname{tg}\alpha = 0$.

24.56. Доказать, что касательные к кривой $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ образуют постоянный угол с некоторым определенным направлением.

24.57. Координаты точек некоторой кривой удовлетворяют соотношению

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = (x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2.$$

Доказать, что касательные к этой кривой касаются шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

24.58. Доказать, что касательные к кривой

$$x = a(\sin t + \cos t),\quad y = a(\sin t - \cos t),\quad z = be^{-t}$$

пересекают плоскость переменных x и y по окружности $x^2 + y^2 = 4a^2$.

24.59. Написать уравнение касательной и нормальной плоскости кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ в точке $(1; 1; 1)$. Какая кривая получится в пересечении касательных с плоскостью переменных x, y?

24.60. Найти уравнение нормальной плоскости в произвольной точке кривой $x^2 + y^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$ $(y \neq \pm 1)$.

24.61. Доказать, что все нормальные плоскости кривой Вивиани $x = a\sin^2 t$, $y = a\sin t\cos t$, $z = a\cos t$ проходят через начало координат.

24.62. Доказать, что если все нормальные плоскости пространственной кривой проходят через фиксированную точку, то кривая является сферической.

24.63. Доказать, что кривая $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$ пересекает все образующие конуса $x^2 + y^2 = z^2$ под одним и тем же углом.

24.64. Доказать, что кривые пересечения цилиндров $y^2 + z^2 = b^2$ с поверхностью $xy = az$ пересекают все образующие этой поверхности, принадлежащие одной системе, под прямым углом.

24.65. Доказать, что кривая $x = a\,\mathrm{tg}\,t$, $y = b\cos t$, $z = b\sin t$ лежит на поверхности параболоида и пересекает все его образующие одной системы под прямым углом.

24.66. Кривая, называемая *локсодромией*, определяется уравнением

$$\varphi = a\ln \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right),$$

где θ — широта, а φ — долгота точки на шаре. Доказать, что она пересекает меридианы шара под углом α, тангенс которого равен a.

Сформулируем определение *стереографической проекции* плоскости на касающуюся ее сферу. Пусть в пространстве R^3 фиксирована декартова прямоугольная система координат x, y, z и задан шар радиуса $a/2$ с центром в точке $B = (0;\ 0;\ a/2)$ и, следовательно, касающийся плоскости переменных x и y (рис. 113). Его уравнение имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = az. \qquad (55)$$

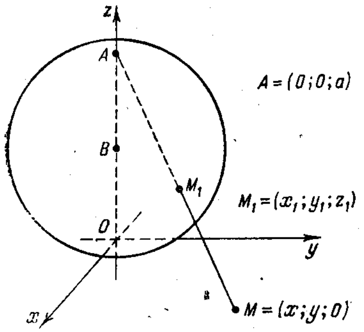


Рис. 113.

Соединим прямой верхнюю точку шара, т. е. точку $A = (0;\ 0;\ a)$, с произвольно фиксированной точкой $M = (x;\ y;\ 0)$ плоскости переменных x и y. Тогда точка $M_1 = (x_1;\ y_1;\ z_1)$, в которой эта прямая пересечет сферу (55), называется *стереографической проекцией* точки M на сферу (55), а точка M — стереографической проекцией точки сферы M_1 на рассматриваемую плоскость. Стереографическая проекция устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и сферы с выколотой точкой A. Координаты точек M и M_1 связаны соотношениями:

$$x_1 = \frac{a^2x}{x^2+y^2+a^2}, \quad y_1 = \frac{a^2y}{x^2+y^2+a^2}, \quad z_1 = \frac{a(x^2+y^2)}{x^2+y^2+a^2}. \qquad (56)$$

24.67. Доказать, что стереографическая проекция дает *конформное отображение*, т. е. что кривые на плоскости пересекаются под тем же углом, что и их образы на сфере.

24.68. Доказать, что кривая $\rho = e^{\lambda\varphi}$, расположенная на плоскости переменных x и y так, что полярная ось совпадает с положительной частью оси x, при стереографической проекции (56) отображается на локсодромию.

24.69. Доказать, что окружности на шаре при стереографической проекции переходят в окружности или прямые на плоскости.

24.70. Центральная проекция координатной плоскости переменных x, y на полусферу $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, $0 \leqslant z < a$, состоит в следующем. Произвольно фиксированная точка $M = (x;\ y;\ 0)$ плоскости переменных x и y соединяется прямой с центром указанной полусферы, т. е. с точкой $A = (0;\ 0;\ a)$. Точка M_1, в которой эта прямая пересекает полусферу, принимается за изображение точки M на полусфере. Доказать, что эта проекция не является конформным отображением, т. е. она не сохраняет, вообще говоря, углы между кривыми.

24.71. Найти производную длины дуги по параметру для следующих кривых:

1) *Цепной линии* $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$, $-a \leqslant x \leqslant a$.

2) *Эллипса* $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

3) *Гиперболы* $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = b\,\mathrm{sh}\,t$, $-\infty < t < +\infty$.

4) *Астроиды* $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

5) *Циклоиды* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $-\infty < t < +\infty$.

6) *Винтовой линии* $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $-\infty < t < +\infty$.

7) *Кривой Вивиани* $x = R\sin^2 t$, $y = R\sin t\cos t$, $z = R\cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

24.72. Пусть плоская кривая Γ задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где функция $\rho(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на некотором отрезке $[a;\ b]$. Доказать, что если $s = s(\varphi)$ есть длина дуги кривой Γ, отсчитываемая от ее начала, то

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2}.$$

24.73. Найти производную длины дуги для следующих кривых, заданных в полярных координатах:

1) *Архимедовой спирали* $\rho = a\varphi$.

2) *Гиперболической спирали* $\rho = a/\varphi$.

3) *Логарифмической спирали* $\rho = ae^{b\varphi}$, $-\infty < \varphi < +\infty$.

24.74. Доказать, что граница ограниченной выпуклой фигуры на плоскости является спрямляемой кривой.

24.75. Доказать, что при объединении кривых их длины складываются: если $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, то $S_\Gamma = S_{\Gamma_1} + S_{\Gamma_2}$.

---

3. Кривизна и кручение кривой. Пусть

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\} \qquad (57)$$

— дважды непрерывно дифференцируемая кривая, s — переменная длина ее дуги и $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ — единичный касательный вектор. Угловая скорость вращения (см. (33)) касательного вектора $\boldsymbol{\tau}$ в данной точке кривой называется *кривизной кривой* в этой точке и обозначается $k = k(s)$, т. е. (см. (35))

$$k(s) = \omega(s;\ \boldsymbol{\tau}) = \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}(s) \right|. \tag{58}$$

Обратная величина к кривизне называется *радиусом кривизны* кривой в данной точке:

$$R = R(s) = \frac{1}{k(s)}. \tag{59}$$

Если $k(s_0) \neq 0$, $s_0 \in [a; b]$, то единичный вектор в направлении вектора $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}(s_0)$ (он перпендикулярен вектору $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(s_0)$) называется *главным нормальным вектором* и обозначается $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(s_0)$. Таким образом,

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = k\boldsymbol{\nu}. \tag{60}$$

Прямая, проходящая через точку кривой параллельно вектору $\boldsymbol{\nu}$, называется *главной нормалью*.

Векторное произведение $[\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}]$ называется *бинормальным вектором* и обозначается через $\boldsymbol{\beta}$, т. е.

$$\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}]. \tag{61}$$

Прямая, проходящая через точку кривой параллельно вектору $\boldsymbol{\beta}$, называется *бинормалью*. Если кривая (57) трижды непрерывно дифференцируема, то производная бинормального вектора $\boldsymbol{\beta}$ коллинеарна с вектором $\boldsymbol{\nu}$; множитель, на который надо умножить вектор $\boldsymbol{\nu}$, чтобы получился вектор $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$, обозначается через $-\varkappa$:

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\varkappa\boldsymbol{\nu}; \tag{62}$$

Коэффициент $\varkappa = \varkappa(s)$ называется *кручением кривой* в данной ее точке. Для производной $\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds}$ справедлива формула

$$\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -k\boldsymbol{\tau} + \varkappa\boldsymbol{\beta}. \tag{63}$$

Формулы (60), (62) и (63) называются *формулами Френе*. Для кривой Γ уравнения

$$k = k(s), \quad \varkappa = \varkappa(s) \tag{64}$$

(s — переменная длина дуги на кривой Γ, k — ее кривизна, а $\varkappa$ — кручение) называются *натуральными уравнениями кривой*. Тетраэдр с вершиной в точке кривой Γ, ребра которого имеют длину, равную единице, и направлены по векторам $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\beta}$, называется *сопровождающим трехгранником Френе*. Иногда, для краткости, сами векторы $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\beta}$ называются соответственно *главной нормалью* и *бинормалью*.

Если кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ трижды непрерывно дифференцируема (t — произвольный параметр), то в предположении, что знаменатели написанных ниже дробей не обращаются в нуль, имеют место следующие формулы:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}, \tag{65}$$

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{[[\mathbf{r}', \mathbf{r}''], \mathbf{r}']}{|[[\mathbf{r}', \mathbf{r}''], \mathbf{r}']|}, \tag{66}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']}{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|}, \tag{67}$$

$$k = \frac{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|}{|\mathbf{r}'|^3}, \tag{68}$$

$$\varkappa = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{k^2|\mathbf{r}'|^6} = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|^2}, \tag{69}$$

или в координатном виде:

$$k = \frac{\sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}, \tag{70}$$

$$\varkappa = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}. \tag{71}$$

Точки, в которых кривизна равна нулю, называются *точками распрямления* кривой, а точки, в которых равно нулю кручение, — ее *точками уплощения*.

Плоскость, проходящая через данную точку кривой параллельно касательной и главной нормали (т. е. перпендикулярно бинормали), называется *соприкасающейся плоскостью*. Плоскость, параллельная главной нормали и бинормали (т. е. перпендикулярная касательной), как уже отмечалось раньше, называется *нормальной плоскостью*, а плоскость, параллельная касательной и бинормали (т. е. перпендикулярная главной нормали), — *спрямляющей плоскостью* (рис. 114).

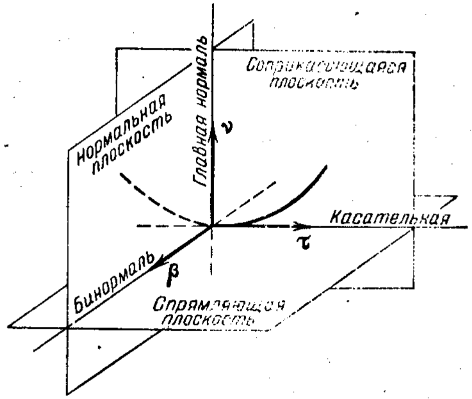


Рис. 114.

Уравнение соприкасающейся плоскости в точке, в которой кривизна не обращается в нуль, имеет вид

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0,\ \mathbf{r}_0',\ \mathbf{r}_0'') = 0. \tag{72}$$

Здесь $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) = (x_0; y_0; z_0)$ — радиус-вектор данной точки кривой, $\mathbf{r}_0' = \mathbf{r}'(t_0) = (x_0'; y_0'; z_0')$, $\mathbf{r}_0'' = \mathbf{r}''(t_0) = (x_0''; y_0''; z_0'')$, а $\mathbf{r} = (x; y; z)$ — текущий радиус-вектор соприкасающейся плоскости. В координатном виде уравнение (72) записывается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} = 0. \tag{73}$$

Бинормаль в точке $(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярна соприкасающейся плоскости, и потому ее уравнение имеет вид

$$\frac{x - x_0}{y_0' z_0'' - z_0' y_0''} = \frac{y - y_0}{z_0' x_0'' - x_0' z_0''} = \frac{z - z_0}{x_0' y_0'' - y_0' x_0''}. \tag{74}$$

Векторная запись уравнения нормальной плоскости выглядит следующим образом:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0') = 0, \tag{75}$$

а координатная —

$$(x - x_0) x_0' + (y - y_0) y_0' + (z - z_0) z_0' = 0. \tag{76}$$

Векторная запись уравнения спрямляющей плоскости имеет вид

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, [[\mathbf{r}_0', \mathbf{r}_0''], \mathbf{r}_0']) = 0. \tag{77}$$

Если же за параметр на кривой взята переменная длина дуги, то уравнение спрямляющей плоскости имеет более простой вид:

$$\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}(s_0)\right) = 0, \tag{78}$$

или в координатной записи:

$$(x - x_0)\frac{d^2x}{ds^2}(s_0) + (y - y_0)\frac{d^2y}{ds^2}(s_0) + (z - z_0)\frac{d^2z}{ds^2}(s_0) = 0. \tag{79}$$

Точка, лежащая на главной нормали к кривой на расстоянии, равном радиусу кривизны R в направлении вектора главной нормали $\mathbf{v}$, называется *центром кривизны кривой* в данной ее точке (рис. 115). Если через $\rho = \rho(t)$ обозначить радиус-вектор центра кривизны кривой $\Gamma = \{\mathbf{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, то

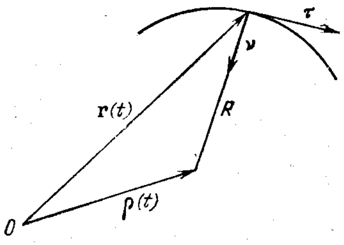


Рис. 115.

$$\rho(t) = \mathbf{r}(t) + R(t)\mathbf{v}(t). \tag{80}$$

Круг, лежащий в соприкасающейся плоскости с центром в центре кривизны кривой в данной ее точке, радиус которого равен радиусу кривизны в этой точке, называется *кругом кривизны кривой* в рассматриваемой точке кривой.

Кривая, для которой вектор-функция (80) является ее представлением, называется *эволютой кривой* Γ (коротко говорят, что множество центров кривизны кривой образует ее эволюту). Если кривая Γ_1 является эволютой кривой Γ, то кривая Γ называется *эвольвентой кривой* Γ_1.

Уравнение эволюты кривой Γ можно записать в виде

$$\rho(t) = \mathbf{r}(t) + \frac{1}{k^2}\,\frac{s'\mathbf{r}'' - s''\mathbf{r}'}{s'^3}, \tag{81}$$

где если $\mathbf{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$, то

$$s' = |\mathbf{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad s'' = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}. \tag{82}$$

Если кривая Γ лежит в плоскости переменных x и y, то $\varkappa = 0$, а

$$k = \frac{1}{R} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}; \tag{83}$$

если $(\xi; \eta)$ — ее центр кривизны, то

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - y'\,\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, \\ \eta &= y + x'\,\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}. \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Для случая, когда кривая Γ является графиком функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, формулы для ее кривизны k и координат ξ, η ее центра кривизны принимают вид

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \tag{85}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - \frac{1 + y'^2}{y''}\,y', \\ \eta &= y + \frac{1 + y'^2}{y''} \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Пример 10. Найти сопровождающий трехгранник Френе винтовой линии; вычислить ее кривизну и кручение.

△ В примере 9 этого параграфа было показано, что представление винтовой линии, когда за параметр принята переменная длина дуги, имеет вид

$$x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$z = \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad s \geqslant 0.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{\tau}=\left(\frac{dx}{ds};\ \frac{dy}{ds};\ \frac{dz}{ds}\right)=$$
$$=\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$
$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=\left(-\frac{a}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};\ -\frac{a}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};\ 0\right).$$

Отсюда

$$k=\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

Кроме того, в силу первой формулы Френе (см. (60)) имеем

$$\boldsymbol{\nu}=\left(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};\ -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};\ 0\right)$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{\beta}=[\boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{\nu}]=$$
$$=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \end{vmatrix}=$$
$$=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{i}-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{j}+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{k}.$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}=\frac{b}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{i}+\frac{b}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{j}=-\frac{b}{a^2+b^2}\,\boldsymbol{\nu}.$$

Отсюда, согласно третьей формуле Френе, $\varkappa=b/(a^2+b^2)$. ▲

Пример 11. Найти радиус кривизны и эволюту эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad a\geqslant b>0.$$

△ Запишем уравнение эллипса в параметрическом виде:

$$x=a\cos t,\ \ y=b\sin t,\ \ 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

Заметив, что $x'=-a\sin t$, $y'=b\cos t$, $x''=-a\cos t$, $y''=$ $=-b\sin t$, получим (см. (59), (83))

$$R=\frac{1}{k}=\frac{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab\sin^2 t+ab\cos^2 t}=\frac{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}.$$

Отсюда, воспользовавшись формулами (84), получим уравнение эволюты

$$\xi=a\cos t-b\cos t\,\frac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{ab}=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,$$
$$\eta=b\sin t-a\sin t\,\frac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{ab}=\frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t.$$

Таким образом, эволютой эллипса является астроида. ▲

Пример 12. Доказать, что при монотонном изменении радиуса кривизны на некоторой части плоской кривой его приращение равно соответствующему приращению длины дуги эволюты (т. е. длине пути, пройденного центром кривизны по эволюте).

△ Уравнение эволюты кривой $\Gamma=\{\mathbf{r}(s);\,0\leqslant s\leqslant S\}$, где s — переменная длина дуги кривой Γ, имеет вид

$$\boldsymbol{\rho}(s)=\mathbf{r}(s)+R(s)\boldsymbol{\nu}(s).$$

Поэтому

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}+\frac{dR}{ds}\boldsymbol{\nu}+R\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds},$$

где

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\boldsymbol{\tau},\quad R\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds}=-Rk\boldsymbol{\tau}=-\boldsymbol{\tau}$$

(так как $Rk=1$). Таким образом, $\dfrac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}=\dfrac{dR}{ds}\boldsymbol{\nu}$, откуда

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}\right|=\left|\frac{dR}{ds}\right|. \tag{87}$$

Обозначим через σ переменную длину дуги эволюты кривой Γ, отсчитываемой в направлении возрастания длины дуги s самой кривой Γ. Тогда

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}\right|=\frac{d\sigma}{ds}$$

(см. (46)). Если, для определенности, на рассматриваемом участке кривой Γ ее радиус кривизны возрастает, т. е. $\dfrac{dR}{ds}\geqslant 0$, то из (87) следует, что

$$\frac{d\sigma}{ds}=\frac{dR}{ds},$$

т. е. $\sigma(s)=R(s)+c$, где c — некоторая постоянная. Отсюда сразу и получается, что для указанных значений параметра s приращение длины дуги эволюты $\Delta\sigma=\sigma(s+\Delta s)-\sigma(s)$ совпадает с соответствующим приращением радиуса кривизны $\Delta R=R(s+\Delta s)-R(s)$, т. е. $\Delta\sigma=\Delta R$. ▲

Пример 13. Если кручение кривой тождественно равно нулю, то кривая плоская.

△ Если у кривой $\Gamma=\{\mathbf{r}(s);\ 0\leqslant s\leqslant S\}$, s — переменная длина дуги, ее кручение во всех точках равно нулю: $\varkappa=0$, то в силу третьей формулы Френе (см. (62)) имеем $\dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}=0$, т. е.

бинормаль $\boldsymbol{\beta}$ кривой Г является постоянным вектором. Обозначим его через $\boldsymbol{\beta}_0$. Тогда для любой точки кривой Г будем иметь $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\beta}_0) = 0$, или

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}(s), \boldsymbol{\beta}_0\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{r}(s), \boldsymbol{\beta}_0) = 0.$$

Следовательно, $(\mathbf{r}(s), \boldsymbol{\beta}_0) = c$, где c — некоторая постоянная. Это означает, что концы всех радиус-векторов $\mathbf{r}(s)$ лежат на плоскости $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}_0) = c$ (здесь $\mathbf{r} = (x; y; z)$ — текущий радиус-вектор точек плоскости, на которой лежит кривая Г). ▲

а) Плоские кривые.

24.76. Найти кривизну и радиус кривизны в произвольной точке следующих кривых:

1) Параболы $y = ax^2$.
2) Кубической параболы $y = x^3$.
3) Синусоиды $y = \sin x$.
4) Цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$.
5) $y = a\ln\cos(x/a)$.

24.77. Найти кривизну и центр кривизны в произвольной точке следующих кривых:

1) Гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
2) Полукубической параболы $3ay^2 = 2x^3$.
3) Астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

24.78. Найти кривизну кривых в произвольной точке:

1) Эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $|t| \leqslant \pi$.
2) Гиперболы $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = b\,\mathrm{sh}\,t$, $t \in \mathbb{R}$.
3) Циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$.

24.79. Найти эволюты кривых:

1) $x = t^2$, $y = t^3$.
2) Гиперболы $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = b\,\mathrm{sh}\,t$.
3) Циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.
4) Эвольвенты круга $x = a(t - \sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$.

24.80. Найти наименьший радиус кривизны у параболы $y^2 = 2px$.

24.81. Найти наибольшую кривизну у кривых:

1) $y = \ln x$. 2) $y = a\ln\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. 3) $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$.

24.82. Доказать, что радиус кривизны параболы $x^2 = 2py$ равен $R = p/\cos^3\alpha$, где α — угол наклона касательной к оси абсцисс.

24.83. Пусть $y = f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция и $\alpha = \alpha(x)$ — угол, образованный касательной к ее графику с осью Ox в точке $(x; f(x))$. Доказать, что если $k(x)$ — кривизна графика в этой точке, то $k(x) = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$, $a \leqslant x \leqslant b$ (s — переменная длина дуги).

24.84. Пусть Г — дважды дифференцируемая кривая без особых точек, лежащая на плоскости переменных x, y; α — угол наклона ее касательной в некоторой точке к оси x; $k^* = \frac{d\alpha}{ds}$ (s — переменная длина дуги); $R^* = 1/k^*$; $(\xi; \eta)$ — координаты центра кривизны в той же точке кривой Г. Доказать, что

$$\xi = x - R^*\sin\alpha, \quad \eta = y + R^*\cos\alpha,$$

а также что

$$\xi = x - \frac{dy}{d\alpha}, \quad \eta = y + \frac{dx}{d\alpha}.$$

24.85. Доказать, что если $\rho = \rho(\varphi)$ — представление дважды непрерывно дифференцируемой кривой в полярных координатах, то для ее кривизны имеет место формула

$$k = \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}. \tag{88}$$

24.86. Найти радиусы кривизны кривых, заданных в полярных координатах:

1) Лемнискаты $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$.
2) Кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.
3) $\rho = a\cos^3\varphi$.
4) Спирали Архимеда $\rho = a\varphi$.
5) Гиперболической спирали $\rho = a/\varphi$.
6) Логарифмической спирали $\rho = ae^{b\varphi}$.

24.87. Что представляет собой эволюта окружности?

24.88. Составить уравнение эволюты:

1) Трактриссы $x = a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$.
2) Логарифмической спирали $\rho = e^{\lambda\varphi}$.
3) Кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

24.89. Доказать, что эволюта циклоиды является также циклоидой, отличающейся от данной только положением.

24.90. Доказать, что эволютой кардиоиды является также кардиоида.

24.91. Доказать, что эволютой астроиды является астроида, подобная данной, с коэффициентом подобия 2, повернутая относительно данной на угол $\pi/4$.

24.92. Найти условие для параметра a логарифмической спирали $\rho = ca^{\varphi}$, при выполнении которого ее эволюта совпадает с самой спиралью.

24.93. Доказать, что эволютами эпициклоиды

$$\frac{x}{a} = (1+\lambda)\cos\lambda t - \lambda\cos(1+\lambda)t,$$

$$\frac{y}{a} = (1+\lambda)\sin\lambda t - \lambda\sin(1+\lambda)t,$$

$$a > 0, \quad \lambda > 0, \quad -\infty < t < +\infty,$$

и гипоциклоиды

$$\frac{x}{a} = (1-\lambda)\cos\lambda t + \lambda\cos(\lambda-1)t,$$

$$\frac{y}{a} = (1-\lambda)\sin\lambda t + \lambda\sin(\lambda-1)t,$$

$$a > 0,\ 0 < \lambda < 1, \quad -\infty < t < +\infty,$$

являются снова соответственно эпициклоида и гипоциклоида, получающиеся из заданных с помощью поворота и преобразования подобия.

24.94. Доказать, что для точек спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ при $\varphi \to +\infty$ величина разности между длиной радиус-вектора и радиусом кривизны стремится к нулю.

24.95. Доказать, что в условиях задачи **24.94** центр кривизны перемещается по кривой, стремящейся к совпадению с окружностью $\rho = 1$.

24.96. Пусть $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, — представление дважды непрерывно дифференцируемой кривой в полярных координатах, $\alpha = \alpha(\varphi)$ — угол наклона ее касательной в некоторой точке M к полярной оси, а ψ — угол, образованный этой касательной с продолжением радиус-вектора $\overline{OM}$ точки касания M. Пусть прямая ON перпендикулярна прямой OM, прямая MN — нормаль к заданной кривой в точке M, а C — центр кривизны кривой в той же точке. Доказать, что

$$\frac{NC}{CM} = \frac{d\psi}{d\varphi}.$$

24.97. Доказать, что у кривых $\rho^n = a^n\cos n\varphi$, $a > 0$, полярная нормаль, т. е. отрезок нормали от точки кривой до точки ее пересечения с полярной осью, в $n+1$ раз больше радиуса кривизны.

24.98. Доказать, что у кривых $\rho^n = a^n\sin n\varphi$, $a > 0$, длина части радиус-вектора, заключенной внутри круга кривизны, равна $2\rho/(n+1)$.

24.99. Пусть r — длина радиус-вектора точки данной дважды непрерывно дифференцируемой кривой, p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную в указанной точке прямой, и R — радиус кривизны. Доказать, что $\frac{dr}{dp} = \frac{R}{r}$.

24.100. Доказать, что на эллипсе существуют, вообще говоря, три таких точки, что круги кривизны к эллипсу в этих точках проходят через данную точку эллипса.

24.101. Доказать, что центры кривизны в точках спирали Архимеда $\rho = a\varphi$, лежащих на одном луче, расположены на эллипсе, полуоси которого не зависят от выбора луча.

24.102. Пусть некоторая точка дважды непрерывно дифференцируемой кривой принята за начало координат, положительно направленная касательная к кривой в этой точке — за ось x, а ось y направлена от точки касания к центру кривизны. Доказать, что в окрестности точки касания кривая имеет представление

$$y = \frac{x^2}{2R} + o(x^2), \qquad x \to 0.$$

24.103. Доказать, что если в точке $M(t_0)$ кривой $\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ радиус кривизны имеет максимум, то существует такая окрестность U точки t_0, что часть кривой, соответствующая значениям параметра $t \in U$, лежит внутри круга кривизны в точке $M(t_0)$.

24.104. Доказать, что если в точке $M(t_0)$ кривой $\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ радиус кривизны имеет минимум, то существует такая окрестность U точки t_0, что часть кривой, соответствующая значениям параметра $t \in U$, лежит вне круга кривизны в точке $M(t_0)$.

24.105. Найти параболу, соединяющую начало координат $(0;0)$ с точкой $M(1;0)$ так, чтобы дуга параболы $\overset{\frown}{OM}$ образовала вместе с нижней половиной окружности $x^2+y^2=1$ кривую с непрерывной касательной и непрерывной кривизной.

24.106. Найти параболу с осью симметрии, параллельной оси y, имеющую с синусоидой $y = \sin x$ в точке $(\pi/2;1)$ общие касательную и кривизну.

24.107. Доказать: если $(\xi;\eta)$ — координаты центра кривизны дважды непрерывно дифференцируемой кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, то

$$\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} = \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'}.$$

24.108. Пользуясь свойствами эволюты, найти длины следующих кривых:

1) Одной дуги циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

2) Астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ между точками $(a;0)$ и $(0;a)$.

3) Кардиоиды $\bar{\rho} = a(1+\cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

б) Пространственные кривые.

24.109. Написать уравнения соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостей для произвольной точки следующих кривых:

1) Винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$.

2) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

3) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$.

4) $x = e^t\cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$.

5) $y^2 = x$, $x^2 = z$.

6) $y = \varphi(x)$, $z = a\varphi(x) + b$.

24.110. Найти уравнение главной нормали и бинормали к кривым:

1) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$.

2) $x = y^2$, $z = x^2$.

3) $x = t^4/4$, $y = t^3/3$, $z = t^2/2$.

24.111. Доказать, что главная нормаль винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ перпендикулярна оси z, а ее бинормаль образует с этой осью постоянный угол, косинус которого равен $a/\sqrt{a^2+b^2}$.

24.112. Доказать, что одна из биссектрис углов между касательной и бинормалью к кривой $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$ имеет постоянное направление.

24.113. По главным нормалям (но в противоположную сторону) винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ откладываются отрезки длиной l. Найти кривую, описываемую их концами.

24.114. Доказать, что прямая, проведенная из произвольной точки M кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ параллельно плоскости $z = 0$ до пересечения с осью z, лежит в соприкасающейся плоскости кривой в точке M.

24.115. Написать уравнение соприкасающейся плоскости кривой $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $z = e^t$ при $t = 0$.

24.116. Написать уравнение соприкасающейся плоскости в точке $(2; 1; 2)$ кривой, являющейся пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ и гиперболического цилиндра $x^2 - y^2 = 3$.

24.117. Доказать, что если все соприкасающиеся плоскости дважды непрерывно дифференцируемой кривой проходят через фиксированную точку, то эта кривая плоская.

24.118. Найти векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\beta}$ кривой $x = t\sin t$, $y = t\cos t$, $z = te^t$ в начале координат.

24.119. Найти векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\beta}$ в произвольной точке кривой:

1) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = \cos 2t$.

2) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $z = 4a\cos(t/2)$.

24.120. Доказать, что кривизна кривой тождественно равна нулю в том и только том случае, когда кривая является промежутком прямой.

24.121. Найти кривизну конической винтовой линии $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = at$ в начале координат.

24.122. Найти кривизны следующих кривых:

1) $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = a\,\mathrm{sh}\,t$, $z = bt$.

2) $x = \ln\cos t$, $y = \ln\sin t$, $z = t\sqrt{2}$.

3) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin(t/2)$.

4) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$.

5) $x = a\,\mathrm{ch}\,t\cos t$, $y = a\,\mathrm{ch}\,t\sin t$, $z = at$.

6) $x = a\dfrac{\cos t}{\mathrm{ch}\,t}$, $y = a\dfrac{\sin t}{\mathrm{ch}\,t}$, $z = a(t - \mathrm{th}\,t)$.

7) $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$.

24.123. Найти кручение кривых:

1) $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$.

2) $x = a\,\mathrm{ch}\,t\cos t$, $y = a\,\mathrm{ch}\,t\sin t$, $z = at$.

3) $y^2 = x$, $x^2 = z$.

24.124. Найти кривизну и кручение кривых:

1) $2ay = x^2$, $6a^2z = x^3$. 2) $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = a\,\mathrm{sh}\,t$, $z = at$.

3) $x = 2abt$, $y = a^2\ln t$, $z = b^2t^2$.

4) $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$.

5) Кривой Вивиани $x = R\sin^2 t$, $y = R\sin t\cos t$, $z = R\cos t$; есть ли на кривой Вивиани точки распрямления и точки уплощения?

24.125. Найти точки распрямления, точки уплощения и дуги, на которых кручение сохраняет знак, для кривых:

1) $x = t$, $y = \sin t$, $z = \sin 3t$.

2) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t^3 - 9t$.

24.126. Исходя из определения главной нормали $\boldsymbol{\nu}$ как единичного вектора в направлении вектора $\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ ($\boldsymbol{\tau}$ — единичный касательный вектор, а s — переменная длина дуги заданной трижды непрерывно дифференцируемой кривой без особых точек) и определения бинормали $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}]$, доказать, что:

1) Производная бинормали $\dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$ коллинеарна с главной нормалью.

2) Если $\frac{d\tau}{ds} = k\nu$, $\frac{d\beta}{ds} = -\varkappa\nu$, то

$$\frac{d\nu}{ds} = -k\tau + \varkappa\beta$$

(иначе говоря, доказать формулы Френе).

24.127. Доказать, что для трижды непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma = \{\mathbf{r}(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$, s — переменная длина дуги, выполняются соотношения

$$\left|\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right|^3 = k^4 + k^2\varkappa^2 + \left(\frac{dk}{ds}\right)^2,$$

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right) = 0, \quad \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right) = -k^2, \quad \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right) = k\frac{dk}{ds}.$$

24.128. В предположениях предыдущей задачи доказать, что

$$\left(\tau, \beta, \frac{d\beta}{ds}\right) = \varkappa,$$

$$\left(\frac{d\beta}{ds}, \frac{d^2\beta}{ds^2}, \frac{d^3\beta}{ds^3}\right) = \varkappa^5 \frac{d}{ds}\frac{k}{\varkappa},$$

$$\left(\frac{d\tau}{ds}, \frac{d^2\tau}{ds^2}, \frac{d^3\tau}{ds^3}\right) = k^5 \frac{d}{ds}\frac{\varkappa}{k}.$$

24.129. Доказать, что если в точке M_0 кривизна k кривой Γ не равна нулю, то k равна кривизне проекции Γ на ее соприкасающуюся плоскость в точке M_0.

24.130. Доказать, что если все нормальные плоскости дважды непрерывно дифференцируемой кривой без особых точек и с кривизной, не обращающейся в нуль, параллельны постоянному вектору, то эта кривая плоская.

24.131. Доказать, что у кривой $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $z = e^t$ каждое ребро сопровождающего трехгранника Френе образует с осью z постоянный угол.

24.132. На бинормалях винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = e^t$ отложены отрезки одной и той же длины. Найти уравнение кривой, образованной концами этих отрезков.

24.133. Кривая называется линией откоса, если касательные к ней образуют постоянный угол с какой-либо прямой. Доказать, что дважды непрерывно дифференцируемая кривая с не равной нулю кривизной является линией откоса тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1) все главные нормали параллельны некоторой плоскости;

2) все спрямляющие плоскости параллельны некоторой прямой;

3) в случае трижды непрерывно дифференцируемой кривой существует такая постоянная $c > 0$, что $\varkappa(s) = ck(s)$; при этом $|c| = \operatorname{ctg}\alpha$, где α — угол, о котором шла речь при определении линии откоса.

24.134. При каком условии центр кривизны винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ лежит на том же цилиндре, что и сама винтовая линия?

24.135. Доказать, что у кривой $x = a\,\mathrm{ch}\,t\cos t$, $y = a\,\mathrm{ch}\,t\sin t$, $z = at$ отрезки нормали от точки на кривой до оси z равны обратной величине абсолютного значения кручения кривой: $1/|\varkappa|$.

24.136. Пусть $\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — дважды непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек $t_0 \in [a; b]$, $t_0 + \Delta t_1 \in [a; b]$ и $t_0 + \Delta t_2 \in [a; b]$. Проведем через точки $M(t_0)$, $M(t_0 + \Delta t_1)$ и $M(t_0 + \Delta t_2)$ плоскость. Доказать, что если в точке $M(t_0)$ кривизна не равна нулю, то при $\Delta t_1 \to 0$ и $\Delta t_2 \to 0$ эта плоскость стремится (определите это понятие) к соприкасающейся плоскости в точке $M(t_0)$.

24.137. Пусть π — плоскость, проходящая через касательную прямую в точке $M(s_0)$ дважды непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma = \{M(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$, s — переменная длина дуги кривой Γ, $s_0 \in [0, S]$ и $d(\Delta s)$ — расстояние от точки $M(s_0 + \Delta s)$ до плоскости π. Доказать, что плоскость π является соприкасающейся плоскостью кривой Γ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{d(\Delta s)}{\Delta s^2} = 0.$$

24.138. В предположениях задачи **24.136** проведем через те же три точки $M(t_0)$, $M(t_0 + \Delta t_1)$ и $M(t_0 + \Delta t_2)$ окружность. Доказать, что эта окружность при $\Delta t_1 \to 0$ и $\Delta t_2 \to 0$ стремится к окружности, являющейся границей круга кривизны в точке $M(t_0)$ (эта окружность называется соприкасающейся окружностью в данной точке кривой).

24.139. Через четыре точки кривой можно провести сферу. Если они стремятся к одной точке, то при соответствующих условиях эта сфера стремится к некоторой предельной сфере, называемой *соприкасающейся сферой*. Найти ее центр и радиус.

24.140. Доказать, что вектор ускорения $\mathbf{a}$ движущейся материальной точки перпендикулярен бинормали траектории движения, и найти его разложение по касательному вектору и вектору главной нормали. Доказать, что

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\frac{v^4}{R^2} + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2},$$

где $v = |\mathbf{v}|$, $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, R — радиус кривизны траектории движения.

24.141. Доказать, что для трижды непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma = \{M(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$, где s — переменная длина дуги:

1) Справедлива формула

$$\mathbf{r}(s+\Delta s)-\mathbf{r}(s)=$$
$$=\left(\Delta s-\frac{1}{6}k^2(s)\,\Delta s^3\right)\boldsymbol{\tau}(s)+\left(\frac{1}{2}k(s)\,\Delta s^2+\frac{1}{6}k'(s)\,\Delta s^3\right)\boldsymbol{\nu}(s)+$$
$$+\frac{1}{6}k(s)\,\varkappa(s)\,\Delta s^3\boldsymbol{\beta}(s)+\mathbf{o}(\Delta s^3),\quad \Delta s\to 0.$$

2) Если через ξ, η, ζ обозначить координаты точки в системе координат, задаваемой ортами $\boldsymbol{\tau}(s)$, $\boldsymbol{\nu}(s)$, $\boldsymbol{\beta}(s)$, то в окрестности точки кривой $M(s)$ проекция кривой на соприкасающуюся плоскость имеет вид

$$\eta=\frac{1}{2}k(s)\,\xi^2+o(\xi^2),\qquad \xi\to 0,$$

на нормальную плоскость —

$$\eta=\sqrt[3]{\frac{9k(s)}{2\varkappa^2(s)}}\,\zeta^{2/3}+o(\zeta^{2/3}),\qquad \zeta\to 0,\qquad \varkappa(s)\neq 0,$$

на спрямляющую плоскость —

$$\zeta=\frac{1}{6}k(s)\,\varkappa(s)\,\xi^3+o(\xi^3),\qquad \xi\to 0.$$

24.142. Доказать, что если на трижды непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma=\{\mathbf{r}(s);\ 0\leqslant s\leqslant S\}$, s — переменная длина дуги, параметр s рассматривать как время, то при его изменении сопровождающий трехгранник Френе будет двигаться вдоль кривой как твердое тело с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}=\varkappa\boldsymbol{\tau}+k\boldsymbol{\beta}$. Тем самым кривизна численно равна скорости вращения трехгранника Френе вокруг бинормали (причем это вращение всегда происходит от касательного вектора $\boldsymbol{\tau}$ к вектору главной нормали $\boldsymbol{\nu}$), а кручение — его скорости вращения вокруг касательной.

24.143. Доказать, что формулы Френе можно записать в виде $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=[\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\tau}]$, $\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds}=[\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\nu}]$, $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}=[\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\beta}]$ (вектор $\boldsymbol{\omega}$ определен в предыдущей задаче).

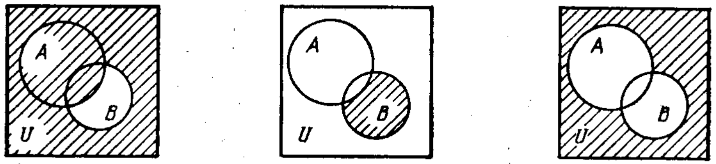
ОТВЕТЫ

Глава I. ВВЕДЕНИЕ

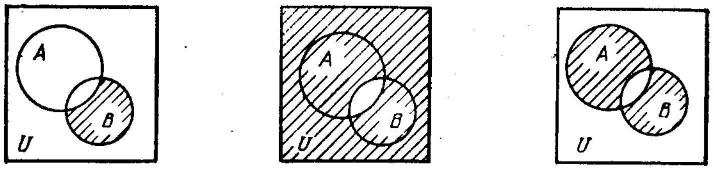
§ 1. Множества. Комбинаторика

1.1. 1) $A\cap B\cap C$; 2) $A\cup B\cup C$; 3) $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$. **1.7.** 1) $X\supset Y$. 2) $X=Y$. 3) $X\subset Y$. 4) $X=Y$. 5) $X\subset Y$. **1.9.** 1) $\{2, 3\}$. 2) $\varnothing$. 3) $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. 4) $\{2, 3\}$. 5) $\{(2;\,2),\ (3;\,2)\}$. 6) $\{(2;\,2),\ (2;\,3)\}$. **1.10.** $\{12k-6\}$, $k\in\mathbb{N}$. **1.11.** 1) $n+m-k$; 2) nm. **1.12.** 125 элементов.

1.13.



1) 2) 3)



4) 5) 6)

1.15. $X=B'$. **1.16.** $A=U$, $B=\varnothing$.

1.19. 1) Да. 2) Нет.

1.20. 3) Можно, например, элементу $x\in A$ поставить в соответствие элемент $(b-a)x+a\in B$. 4) Можно, например, элементу $x\in B$ поставить в соответствие элемент $\frac{x}{1-|x|}\in A$.

1.32. 1) Может, 2) не может, 3) может. **1.33.** 2^n. **1.36.** 1) 1/256. 2) 15. 3) $n(n+1)$. 4) 2^n. **1.37.** 1) 11. 2) 28. 3) $\{7, 8, 9\}$. 4) $\{2, 3, 4\}$. **1.38.** 1) 870. 2) 435. **1.39.** 1) 60. 2) 10. **1.40.** 1) 15. 2) 43 200. **1.41.** $n(n-3)/2$. **1.42.** 210. **1.43.** 5355. **1.44.** 576. **1.45.** 18; 10. **1.46.** 1024. **1.47.** 1) 120. 2) 60. 3) 420. 4) 83 160. **1.48.** $\frac{28!}{(7!)^4}$. **1.49.** 5040. **1.50.** 15 625. **1.51.** 16. **1.52.** $(n+1)!\,m!$ **1.53.** 945. **1.54.** 330.

1.55. Может не хватить. **1.56.** Если $n<7$, то чисел с цифрой 9 меньше; если $n\geqslant 7$, то чисел с цифрой 9 больше.

1.57. 233. **1.58.** 1) 1/4. 2) 1/3. 3) 0. 4) 5/12. **1.59.** 5/36. **1.60.** 29/52 **1.61.** 164/1081. **1.62.** 1) 5/9. 2) 2/9. **1.63.** 1) $1/C_{49}^6$. 2) $C_6^3\cdot C_{43}^3/C_{49}^6$. **1.64.** 360/2401 **1.65.** 1) 9/17. 2) 8/17.

§ 2. Элементы логики. Метод математической индукции

2.1. Все предложения, кроме предложения 3), являются высказываниями. Высказывания 1), 2), 5), 7) истинны, высказывание 4) ложно. В настоящее время неизвестно, истинно или ложно высказывание 6). Высказывание 8) считается истинным в геометрии Евклида и ложным в геометрии Лобачевского.

2.2. 1) «174 не делится нацело на 3» ложно; 2) «число 3 является делителем числа 174 или идет дождь» истинно; 3) «число 3 — делитель числа 174 и идет дождь» ложно; 4) «если 174 делится на 3, то идет дождь» ложно; 5) «если 174 не делится на 3, то идет дождь» истинно; 6) «174 делится на 3 тогда и только тогда, когда не идет дождь» истинно.

2.3. 1)

p	*И*	*И*	*Л*	*Л*
q	*И*	*Л*	*И*	*Л*
s	*И*	*И*	*И*	*Л*

2) Высказывание s — тождественно истинное.

2.6. 1) «Мишень поражена по крайней мере одним выстрелом», высказывание истинно; 2) «все три выстрела попали в цель», высказывание ложно; 3) «из первых двух выстрелов хотя бы один неудачный, а третий удачный», высказывание истинно.

2.7. Данное высказывание является тождественно истинным, т. е. оно истинно независимо от того, истинны или ложны высказывания p, q, r.

2.8. 1) $p \vee \bar{q}$. 2) $p \vee (\bar{q} \wedge r)$. 3) r. 4) $\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r$.

2.9. Только второй студент изучал логику.

2.10. Сергей, Юрий, Виктор, Роман.

2.11. Экзамен сдали все четыре студента.

2.12. В экспедицию следует взять E — биологом, B — гидрологом, C — радистом, D — врачом, F — синоптиком, H — механиком.

2.13. 1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$. 2) $\{9\}$. 3) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$. 4) $\{9\}$.

2.14. Второе и третье, причем второе ложно, а третье истинно.

2.15. $n = 45$. **2.16.** 2, $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. **2.17.** (9; 2); (17; 6). **2.18.** $|a| < 1/2$.

2.19. $-1/16 \leqslant a \leqslant 1/12$. **2.20.** 1) $-36/5 \leqslant a \leqslant 9$. 2) $-27/5 \leqslant a \leqslant 0$.

2.21. 1) Да, может. Такой контрольной будет, например, контрольная, в которой количество задач равно количеству учеников, причем первый ученик решил только первую задачу, второй — только вторую, третий — только третью и т. д. 2) Нет, не может. Из того, что существует ученик, решивший все задачи, следует, что каждая задача решена хотя бы одним учеником (например, тем, который решил все задачи). З а м е ч а н и е. Этот пример показывает, что в высказывании $\forall x \exists y p(x; y)$ нельзя, вообще говоря, переставлять кванторы.

2.22. 1) $k \neq 0$. 2) $k = 0$. 3) Таких значений k не существует. 4) k — любое число.

2.23. 1) В каждом поезде, идущем из Москвы в Ленинград, есть (существует) вагон, в котором все места заняты. 2) В Швеции существует город, на любой улице которого в любом доме есть окно, не выходящее на юг.

2.24. 1) $n = 41$. 2) $y = |x|$, $x = 0$. **2.30.** 1) $n \geqslant 4$. 2) $n \geqslant 7$. 3) $n = 1$, $n \geqslant 10$. 4) $n \geqslant 4$. **2.34.** $a_n = 2^n + 2^{-n}$. **2.37.** $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1$. **2.38.** $n^2 - n + 2$.

§ 3. Действительные числа

3.1. 0,(6); 0,55; 0,2(142857); —0,(285714).

3.2. $\dfrac{1}{8}$; $\dfrac{1}{3}$; $2\dfrac{427}{990}$; $\dfrac{3}{10}$.

3.9. 1) 0 и 1; 0,3 и 0,4; 0,30 и 0,31; 0,300 и 0,301; 0,3000 и 0,3001. 2) 0 и 1; 0,3 и 0,4; 0,33 и 0,34; 0,333 и 0,334; 0,3333 и 0,3334. 3) 1 и 2;

1,2 и 1,3; 1,22 и 1,23; 1,222 и 1,223; 1,2222 и 1,2223. 4) —1 и 0; —0,7 и —0,6; —0,63 и —0,62; —0,626 и —0,625; —0,6251 и —0,6250.

3.10. 1) 1 и 2; 1,4 и 1,5; 1,41 и 1,42. 2) 2 и 3; 2,2 и 2,3; 2,23 и 2,24. 3) 0,3 и 0,4; 0,31 и 0,32; 0,317 и 0,318. 4) —0,4 и —0,3; —0,32 и —0,31; —0,318 и —0,317. 5) 2 и 3; 2,1 и 2,2; 2,14 и 2,15.

3.11. Да. **3.12.** 1) $3{,}3 > 3{,}298$. 2) $3{,}1416 > 3{,}14159$. 3) $3{,}141592 < 22/7$. 4) $\sqrt{3} + 2 > \sqrt{2} + \sqrt{5}$. 5) $\sqrt{7} + \sqrt{10} < \sqrt{3} + \sqrt{19}$.

3.13. 1) 2,06 и 2,07. 2) 0,0142 и 0,0143. 3) —0,0973 и —0,0972. 4) 0,471 и 0,472. 5) 2,44 и 2,45. 6) 0,534 и 0,535.

3.16. 1) $U(2; 1)$. 2) $U(2; \pi - 2)$. 3) $U(2; (4-\pi)/2)$. 4) $U(2; 1)$.

3.49. $\sup X = \sqrt{2}$, $\inf X = -\sqrt{2}$. **3.50.** 1 и $+\infty$; 0 и 1; 0 и 3/2; 1/2 и 1.

3.54. $\sup\{m/n,\ 0 < m < n,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}\} = 1$,
$\inf\{m/n,\ 0 < m < n,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}\} = 0$.

§ 4. Прогрессии. Суммирование. Бином Ньютона. Числовые неравенства

4.7. 1) $\dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$. 2) $3 - \dfrac{2n+3}{2^n}$.

3) $\dfrac{1 - (n+2)x^{n+1} + (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$ при $x \neq 1$,

$\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ при $x = 1$.

4) $\dfrac{x^{n+2} - (n+1)x^2 + nx}{(x-1)^2}$ при $x \neq 1$; $\dfrac{n(n+1)}{2}$ при $x = 1$.

4.9. 1) n. 2) $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$. 3) 0. 4) $\dfrac{n(n^2-1)}{3}$.

4.13. 1) $\dfrac{n}{3n+1}$. 2) $\dfrac{n}{4n+1}$. 3) $\dfrac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$.

4) $\dfrac{1}{18} - \dfrac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$. 5) $\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

4.15. 2) $S_n(3) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

4.18. 1) $\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$. 2) $\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$. 3) $\dfrac{n}{2} - \dfrac{\sin nx \cos(n+1)x}{2\sin x}$.

4) $\dfrac{n}{2} + \dfrac{\sin nx \cos(n+1)x}{2\sin x}$.

5) $\dfrac{3\sin\dfrac{n+1}{2}x\sin\dfrac{nx}{2}}{4\sin\dfrac{x}{2}} - \dfrac{\sin\dfrac{3(n+1)}{2}x\sin\dfrac{3nx}{2}}{4\sin\dfrac{3x}{2}}$.

6) $\dfrac{\cos\dfrac{3(n+1)x}{2}\sin\dfrac{3}{2}nx}{4\sin\dfrac{3x}{2}} + \dfrac{3\cos\dfrac{n+1}{2}x\sin\dfrac{nx}{2}}{4\sin\dfrac{x}{2}}$.

4.19. 1) $x_n = \dfrac{3^n + (-1)^{n-1}}{4}x_1 + \dfrac{3}{4}(3^{n-1} + (-1)^n)x_0$.

2) $x_n = (2^n - 1)x_1 - 2(2^{n-1} - 1)x_0$.

3) $x_n = \dfrac{(\alpha-1)^n - 1}{\alpha - 2}x_1 - \dfrac{\alpha - 1}{\alpha - 2}((\alpha-1)^{n-1} - 1)x_0$ при $\alpha \neq 2$;

$x_n = nx_1 - (n-1)x_0$ при $\alpha = 2$.

4.20. 1) $(1+x)^5 = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$. 2) $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. 3) $(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$. 4) $(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$.

4.21. $C_{16}^6 x^3$. 4.22. 1) -7. 2) -40; -74. 3) $36C_9^3 + C_9^4 = 378$. 4) 245. 5) C_{16}^4.

4.23. 1) $(n+2)\,2^{n-1}$. 2) $(n-2)\,2^{n-1}+1$. 3) 2^{2n-1}. 4) 2^{2n-1}. 5) $(-1)^m C_{n-1}^m$. 6) $(-1)^m C_{2m}^m$ при $n=2m$; 0 при $n=2m+1$.

4.25. 1) 60. 2) 625; 7000; 7000; 1120; 16.

4.26. 1) $\frac{27}{64}$. 2) $C_{10}^3 \frac{2^7}{3^{10}}$. 4.27. $C_{30}^{12} 2^9$.

§ 5. Комплексные числа

5.3. 1) $7+3i$; $22+7i$. 2) $2-4i$; $-1{,}81-5{,}2i$. 3) $2\sqrt{2}$; 5. 5.4. 1) $-2{,}6-4{,}2i$; $0{,}016-0{,}088i$. 2) $-0{,}4+2i$; $0{,}12+0{,}24i$. 3) $-i$; $\frac{7}{6}-\frac{\sqrt{5}}{6}i$. 5.5. 1) 0. 2) $-11/17$. 3) 3.

5.6. 1) 0. 2) $-2i$. 3) 0. 4) $-\frac{18}{25}+\frac{23}{50}i$. 5) $\frac{22}{159}-\frac{5}{318}i$. 5.7. (4; 3), (5; 3), (4; 4), (5; 4). 5.8. $(-2; -2)$, $(2; -2)$. 5.9. 1) $-1-i$. 2) 0, -1, $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 5.10. $z_1 = 1-i$, $z_2 = i$. 5.12. $\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$.

5.13. $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} m_k z_k\right) \Big/ \left(\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\right)$. 5.14. $z_4 = z_1 + z_3 - z_2$. 5.15. $t(7+i)$, t — произвольное положительное число. 5.16. 1) 4. 2) 1. 3) 7. 4) $2\sin(\pi/14)$. 5.17. 1) 0; $3i$; $-3i$. 2) $\sqrt{2}-1$; $1-\sqrt{2}$; i; $-i$. 3) bi, $b\in\mathbb{R}$. 4) $c\pm\sqrt{3}\,ci$, c — произвольное действительное неположительное число.

5.21. 1) Окружность радиуса $R=1$ с центром в точке $z=-1$. 2) Полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$. 3) Круг (вместе с границей) радиуса $R=2$ с центром в точке $z=1-2i$. 4) Окружность радиуса $R=3$ с центром в точке $z=0$. 5) Эллипс с фокусами в точках $z_1=-2$, $z_2=2$ и с большой полуосью $a=13$. 6) Система концентрических колец с центром в точке $z=0$, содержащая интервалы $(2k\pi; 2k\pi+\pi)$, $k\geqslant 0$ — целое, действительной оси. 7) Круг радиуса $R=10$ с центром в точке $z=10i$, за исключением центра круга и граничной окружности. 8) Окружность радиуса $R=3$ с центром в точке $z=-3$.

5.22. 1) $\frac{7}{6}+\frac{5}{6}i$. 2) $-\frac{3}{2}-\frac{17}{4}i$; $-\frac{3}{2}-2i$. 3) $5-5i$; $-5+5i$; $\sqrt{26}-\sqrt{26}\,i$; $-\sqrt{26}+\sqrt{26}\,i$.

5.24. 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 2) $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 3) $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 4) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 5) $-\frac{7}{18}\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 6) $\frac{\pi}{14}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

5.25. 1) Действительная положительная полуось $z=x>0$. 2) Мнимая полуось $z=iy$, $y>0$. 3) Полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$. 4) Вся комплексная плоскость, за исключением точки $z=0$.

5.26. Действительная отрицательная полуось $z=x$, $x<0$. 2) Угол (без границы) с вершиной в точке $z=-i$, стороны которого проходят через точки $z=1$ и $z=0$, содержащий точку $z=1/2$. 5.27. 1) i. 2) $-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$. 5.28. Точка $z^2=x+iy$ принадлежит параболе $x=\frac{y^2}{4}-1$. 5.29. Точка $z=x+iy$ находится на кривой $y=|x|$.

5.32. 1) $2(\cos(5\pi/6)+i\sin(5\pi/6))$. 2) $\cos\pi+i\sin\pi$. 3) $\cos(13\pi/12)+i\sin(13\pi/12)$. 4) $-2\cos(5\pi/9)(\cos(14\pi/9)+i\sin(14\pi/9))$. 5) $\frac{1}{\cos 1}\left(\cos\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)\right)$.

5.33. 1) $z=1=\cos 0+i\sin 0$. 2) $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$. 3) $z=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\cos 0+i\sin 0)$. 4) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$. 5) $z=-i=\cos(3\pi/2)+i\sin(3\pi/2)$.

5.34. 1) $\frac{5}{3}(\cos 230^\circ+i\sin 230^\circ)$. 2) $\sqrt{2}\sin(\pi/5)(\cos(29\pi/20)+i\sin(29\pi/20))$.

5.35. $-10+4i$. 5.36. $3-\frac{9}{2}i$.

5.37. 1) 1. 2) $\cos 50^\circ+i\sin 50^\circ$. 3) $\frac{1}{64}-\frac{\sqrt{3}}{64}i$. 4) -2. 5) 2.

5.38. 1) $2^{100}(\cos(4\pi/3)+i\sin(4\pi/3))$. 2) $8(\cos(3\pi/2)+i\sin(3\pi/2))$. 3) $2(\cos 0+i\sin 0)$, если n — четное, $2(\cos\pi+i\sin\pi)$, если n — нечетное. 4) $\frac{1}{\cos^4 2}(\cos 8+i\sin 8)$. 5) $-32\cos^5(3\pi/5)(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))$.

5.39. $n=4k$, $k\in\mathbb{Z}$.

5.40. 1) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1, $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. 2) $\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}+i$, $-2i$. 3) $\cos(2\pi k/5)+i\sin(2\pi k/5)$ $(k=0, 1, 2, 3, 4)$. 4) $\sqrt[16]{2}\left(\cos\frac{8k+1}{32}\pi+i\sin\frac{8k+1}{32}\pi\right)$ $(k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$.

5.41. 1) $\sqrt[6]{2}(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12))$, $\sqrt[6]{2}(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4))$, $\sqrt[6]{2}(\cos(17\pi/12)+i\sin(17\pi/12))$. 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$. 3) $\sqrt[5]{2}(\cos(\pi/15)+i\sin(\pi/15))$, $\sqrt[5]{2}(\cos(7\pi/15)+i\sin(7\pi/15))$, $\sqrt[5]{2}(\cos(13\pi/15)+i\sin(13\pi/15))$, $\sqrt[5]{2}(\cos(19\pi/15)+i\sin(19\pi/15))$, $\sqrt[5]{2}(\cos(5\pi/3)+i\sin(5\pi/3))$. 4) $\sqrt{3}+i$, $2i$, $-\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}-i$; $-2i$, $\sqrt{3}-i$. 5) 0; $\cos(2\pi k/5)+i\sin(2\pi k/5)$ $(k=0, 1, 2, 3, 4)$. 6) Если $n>1$, то $z_k=\cos\frac{2\pi k}{n+1}+i\sin\frac{2\pi k}{n+1}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$; если $n=1$, то уравнению удовлетворяет каждое действительное число.

5.42. 1) $2n$. 2) n. 5.44. e^x, $y+2\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$. 5.45. 1) $e^2\cos 1-ie^2\sin 1$. 2) i. 3) $-e^7\sin 3+ie^7\cos 3$. 5.46. 1) $4e^{7\pi i/6}$. 2) $e^{6\pi i/7}$.

5.47. 1) $e^{2\pi i}=1$. 2) $8e^{-\pi i/4}=4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\,i$. 3) $64e^{i\pi}=-64$. 4) $e^{-\pi i/3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. 5) $2^7e^{3\pi i/2}=-2^7 i$.

5.49. 1) $e^{2\pi k i/3}$ $(k=0, 1, 2)$. 2) $e^{(2k+1)\pi i/5}$ $(k=0, 1, 2, 3, 4)$. 3) $2e^{2(3k+1)\pi i/9}$ $(k=0, 1, 2)$. 4) $\sqrt[4]{2}\,e^{(3k+2)\pi i/6}$ $(k=0, 1, 2, 3)$.

5.50. 1) $\dfrac{e^{i(n+1)\varphi}-1}{e^{i\varphi}-1}$. 2) $\dfrac{\sin((n+1)\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}\sin(n\varphi/2)$.
3) $\dfrac{\sin((n+1)\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}\cos(n\varphi/2)$.

§ 6. Многочлены. Алгебраические уравнения. Рациональные дроби

6.1. $A=D=0$, $B=1$, $C=2$. **6.2.** $P(z)=9z^2-26z-21$, $Q(z)=-9z^3+44z^2-39z-7$. **6.3.** $A=4$, $B=0$, $C=2$, $D=-2$ или $A=-4$, $B=8$, $C=-2$, $D=2$. **6.4.** 1) 2. 2) $Q(z)=0$ и, следовательно, не имеет степени.

6.5. 1) $T(z)=z+13$, $R(z)=81z-211$. 2) $T(z)=z^4+iz^3-z^2+(3-i)z+1+10i$, $R(z)=i-11$. 3) $T(z)=z^2+3iz-7$, $R(z)=-13iz^2-18z+1+7i$. 4) $T(z)=0$, $R(z)=z^2-1$. 5) $T(z)=z^{25}-z^{20}+z^{15}-z^{10}+z^5-1$, $R(z)=0$.

6.6. 1) Является. 2) Не является. 3) Является.

6.7. 1) $a=3$, $b=-4$. 2) $a=-1-i$, $b=i$. 3) $a=0$, $b=-1$; $a=0$, $b=1$; $a=-1-i$, $b=i$; $a=-1+i$, $b=-i$; $a=1-i$, $b=-i$; $a=1+i$, $b=i$.

6.8. 1) $n=km$, $k\in\mathbb{N}$. 2) $n=(2k+1)m$, $k\in\mathbb{N}$. 3) $n=2km$, $k\in\mathbb{N}$. 4) n и m — произвольные натуральные числа. 5) n — четное, m — нечетное.

6.9. 1) $(z-1)^3$. 2) $z^{30}-1$. 3) $z^{15}-1$. **6.10.** $z+2$. **6.11.** $\dfrac{i}{2}z+\dfrac{1}{2}+i$.
6.12. z^3-1.

6.13. 1) $1+2i$; $1-2i$. 2) $2+i$; $-2+i$. 3) $13-i$; $7+i$. 4) $5+i$; $3+2i$ 5) $\dfrac{5-i}{2}$; i.

6.14. 1) $4+i$; $-4+i$; $-4-i$; $4-i$. 2) $\cos(\pi k/3)+i\sin(\pi k/3)$ $(k=1,2,3,4,5)$. 3) $-\operatorname{tg}(\pi k/16)$ $(k=1, 9, 17, 25)$. 4) $2i$; $-3i$; $-\dfrac{\sqrt{15}}{2}-\dfrac{i}{2}$; $\dfrac{\sqrt{15}}{2}-\dfrac{i}{2}$.

6.15. 1) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}(-1+i\sqrt{3})$; -1; $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}(-1-i\sqrt{3})$. 2) $2(\cos 144^\circ+i\sin 144^\circ)$; $2(\cos 216^\circ+i\sin 216^\circ)$; $\sqrt[5]{31}(\cos 108^\circ+i\sin 108^\circ)$; $-\sqrt[5]{31}$; $\sqrt[5]{31}(\cos 252^\circ+i\sin 252^\circ)$.

6.16. Пусть $z=k$ — целый корень уравнения
$$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0=0$$
с целыми коэффициентами. Тогда
$$a_nk^n+a_{n-1}k^{n-1}+\ldots+a_1k+a_0=0$$
и, следовательно,
$$a_0=-k(a_nk^{n-1}+\ldots+a_1).$$
Число $a_nk^{n-1}+\ldots+a_1$ при сделанных предположениях, очевидно, целое, значит k — делитель числа a_0.

6.17. 1) -2. 2) 2. 3) Целых корней уравнение не имеет. 4) -7; -2; 2; 3. 5) 2. **6.19.** 1) $-7/3$. 2) $1/2$; 4.

6.20. 1) -5; $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}i$; $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}i$. 2) 1; 3; $2i$; $-2i$. 3) -2; $1+\sqrt{3}\,i$; $-1+\sqrt{3}\,i$; $-1-\sqrt{3}\,i$; $1-\sqrt{3}\,i$. 4) -3; -2; 2; 3.

6.21. Указание Воспользоваться задачей **5.11.**

6.23. 1) $1-i$; $(\sqrt{13}-1)/6$; $-(\sqrt{13}+1)/6$. 2) $-i$; $(-1+\sqrt{3}\,i)/2$; $(-1-\sqrt{3}\,i)/2$.

6.25. $a=-6$, $b=-2$; $z_2=1-\sqrt{2}$; $z_3=1$; $z_4=-1$; $z_5=-2$.
6.26. 1) $-1+i$; $-1-i$. 2) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. **6.27.** 1) 2. 2) 3. 3) 3.
6.28. $a=-e^{4\pi ki/5}$, $b=9\cdot e^{8\pi ki/5}$, $k=0, 1, 2, 3, 4$. **6.30.** $P(x)=1+(x-1)^5\sum\limits_{k=0}^{9}C_{k+4}^4x^k$. **6.31.** 1) $z^3-7z^2+17z-15$. 2) $(z^2+1)^2(z^2+2z+2)$.
6.32. z^4-14z^2+9. **6.34.** 3. **6.35.** $z^3-2z^2+z+1=0$. **6.36.** $c=8$, $z_1=-2$, $z_2=(1+i\sqrt{15})/2$, $z_3=(1-i\sqrt{15})/2$. **6.37.** $5/4$, $-3/4$. **6.38.** $a_{n-1}^2-2a_{n-2}$.
6.39. 1) 1. 2) 1/16. 3) 16.

6.40. 1) $(z+1)\left(z-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 2) $(z-1)(z-2)(z-3)$.
3) $6(z-2)\left(z+\dfrac{2}{3}\right)\left(z-\dfrac{1}{4}-i\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)\left(z-\dfrac{1}{4}+i\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$.
4) $(z+1)^3(z-3)(z-4)$. 5) $(z-i)^2(z+1+i)$.

6.41. 1) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$. 2) $(x^2+3)(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$. 3) $(x-1)(x+2)(x^2+x+6)$. 4) $(x^2+x+1)^2$. 5) $(x+2)(x+6)(x-\sqrt{6}+4)(x+\sqrt{6}+4)$. 6) $\left(x-\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)(x^2+5x+7)$.
7) $(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)^2$.

6.43. 1) z^2-z+1. 2) $2z^3-z^2-4z+3$. 3) $\dfrac{z}{2}-\dfrac{1}{2}$.

6.45. $\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{z-z_k}{z_{n+1}-z_k}$. **6.47.** 1) $z+3+\dfrac{3z+1}{z^2+2}$. 2) z^3-7z+7.
3) $z^3+3z^2+6z+10+\dfrac{14z^2-24z+11}{(z-1)^3}$. 4) $\sum\limits_{k=0}^{9}(-1)^kC_{10}^k3^k(z^2+4)^{9-k}+\dfrac{3^{10}}{z^2+4}$.

6.48. 1) а) $\dfrac{A_1^{(1)}}{z-3i}+\dfrac{A_1^{(2)}}{(z-3i)^2}+\dfrac{A_2^{(1)}}{z+3i}+\dfrac{A_2^{(2)}}{(z+3i)^2}$;
б) $\dfrac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{x^2+9}+\dfrac{M_1^{(2)}x+N_1^{(2)}}{(x^2+9)^2}$.
2) а) $\dfrac{A_1}{z-1}+\dfrac{A_2}{z+3}+\dfrac{A_3}{z+1-2i}+\dfrac{A_4}{z+1+2i}$;
б) $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+3}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2x+5}$.
3) а) $\dfrac{A_1^{(1)}}{z+1}+\dfrac{A_1^{(2)}}{(z+1)^2}+\dfrac{A_2^{(1)}}{z-e^{i\pi/3}}+\dfrac{A_2^{(2)}}{(z-e^{i\pi/3})^2}+\dfrac{A_3^{(1)}}{z-e^{-i\pi/3}}+\dfrac{A_3^{(2)}}{(z-e^{-i\pi/3})^2}$;
б) $\dfrac{A_1^{(1)}}{x+1}+\dfrac{A_1^{(2)}}{(x+1)^2}+\dfrac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{x^2-x+1}+\dfrac{M_1^{(2)}x+N_1^{(2)}}{(x^2-x+1)^2}$.

6.49. 1) $\dfrac{\frac{1}{8}\left(1-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)}{z-\frac{1+i\sqrt{3}}{4}}+\dfrac{\frac{1}{8}\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)}{z-\frac{1-i\sqrt{3}}{4}}$.

2) $\frac{i}{z-i+2}-\frac{i}{z-i+3}$. 3) $-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}$.

4) $\frac{2}{z-1}-\frac{2}{z+1}-\frac{2i}{z-i}+\frac{2i}{z+i}$.

5) $\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{-1-i}{z-1-i}+\frac{-1+i}{z-1+i}+\frac{1-i}{z+1-i}+\frac{1+i}{z+1+i}\right)$. 6) $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{1}{n}e^{2k\pi i/n}}{z-e^{2k\pi i/n}}$.

6.50. 1) $\frac{3}{x-1}-\frac{7}{x-2}+\frac{5}{x-4}$. 2) $\frac{2}{x-1}-\frac{2x+4}{x^2+x+1}$.

3) $\frac{3/2}{x+1}-\frac{2}{x+2}+\frac{1/2}{x+3}$. 4) $\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{x-1}{x^2+x+1}$.

5) $\frac{1}{x-1}-\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}-\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x-2}$.

6) $\frac{127}{x-2}+\frac{66}{(x-2)^2}+\frac{129}{x+2}-\frac{62}{(x+2)^2}$. 7) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{x}{x^2+1}$.

8) $\frac{1}{x}-\frac{7}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{6x+2}{x^2+x+1}+\frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}$.

9) $\frac{1}{x-1}+\sum\limits_{k=1}^{50}\frac{2x\cos(4\pi k/101)-2\cos(2\pi k/101)}{x^2-2x\cos(2\pi k/101)+1}$.

10) $\frac{1}{x+2\cos(\pi/9)}+\frac{1}{x+2\cos(7\pi/9)}+\frac{1}{x+2\cos(13\pi/9)}$.

§ 7. Числовые функции. Последовательности

7.1. 1) $x\neq-1$ *). 2) $x\neq 1$; $x\neq-1$. 3) $x\neq 2$; $x\neq 4$. 4) $x\neq-2$, $x\neq 0$; $x\neq 2$. 5) $x>0$. 6) $x\neq-3/2$; $x\neq 3/2$. 7) $x\neq-3/2$; $x\neq-1/2$. **7.2.** 1) $\mathbb{R}$. 2) $\{0\}$. 3) $x\leqslant 2$. 4) $[-2;\ 1]$. 5) $(-1;\ 1)$. 6) $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$. 7) $x\neq-3$; $x\neq 3$. 8) $\{0\}\cup[2;\ +\infty)$. 9) $(0{,}5;\ 1)\cup[3;\ +\infty)$. **7.3.** 1) $y=2x-2$. 2) $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$. 3) $y=\frac{2x+11}{7}$. 4) $y=\frac{3-2x}{4}$. 5) $y=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}y_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}y_2$.

7.4. 1) $5+4x-x^2$. 2) x^2-2. 3) x^2+4x-5.

4) $\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$.

7.5. 1) $2x^3+3x^2+5$. 2) $\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}y_2+\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}y_3+\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}y_4$.

7.6. $P(x)=\sum\limits_{j=1}^{n+1}\prod\limits_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{n+1}\frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}y_j$.

7.7. 1) $(-\infty;\ 3]$; $[-1;\ +\infty)$; $[-1;\ 3]$. 2) $[-1;\ 1]$; $\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq 1/2\}$, $\{x\in[-1;\ 1]:\ x\neq 1/2\}$. 3) $[3;\ +\infty)$; $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$; $[3;\ +\infty)$. 4) $(0;\ 5)$; $\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq\pi/2+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\}$; $\{x\in(0;\ 5):\ x\neq\pi/2;\ x\neq 3\pi/2\}$.

*) Такая краткая запись означает, что областью определения является множество $\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq-1\}$.

5) $(-4;\ 4)$; $\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq\pi/2+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\}$; $\{x\in(-4;\ 4):\ x\neq\pi/2\}$. 6) $[1;\ +\infty)$; $[1;\ +\infty)$; $[1;\ +\infty)$.

7.8. 1) $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}$. 2) $\mathbb{R}$; $\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq 2,\ x\neq-2\}$. 3) $(-1;\ 1)$; $\{x\in(-1;\ 1):\ x\neq 0\}$. 4) $[-2;\ +\infty)$; $\{x\in[-2;\ +\infty):\ x\neq-1\}$. 5) $[-1/2;\ +\infty)$; $\{x\in[-1/2;\ +\infty):\ x\neq 0\}$. 6) $\mathbb{R}$; $\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq\frac{\lg 2}{\lg 2{,}5}\right\}$. 7) $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}$. 8) $\mathbb{R}$; $\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$. 9) $\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\}$; $\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq\pi n,\ x\neq\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$. **7.9.** 1) 3; $2a^2/(a^2-4)$; $2/(b-2)$; $(b-1)/(b-3)$; $1/(1-2p)$; $(p-2)/p$. 2) 240; 0; $8b^3+8b-1$; $8b^3-24b^2+32b-16$; $8(p^2+1)/p^3$; $1/(8p(1+p^2))$. **7.10.** 1) 1; 1; 1,5; 1; 0. 2) 1/8; 1; 0,5; 1; 1984. **7.11.** $a=2$, $b=5$ при $m\neq n$; $a\in\mathbb{R}$, $b=a+3$ при $m=n$. **7.12.** -2. **7.13.** $8b^3$. **7.14.** 1) $a>1$. 2) $a\leqslant-1$. **7.15.** 1) $a-\frac{1}{a}$. 2) $\frac{1}{a}-a$. 3) $a-\frac{1}{a}$. 4) $\frac{1}{a}-a$. **7.16.** 1) $[-9;\ -1]$. 2) $[0;\ 4]$. 3) $(-\infty;\ -1)\cup\{0\}\cup(1;\ +\infty)$. 4) $[-4;\ +\infty)$. 5) $(-\infty;\ 9/8]$. 6) $[-9;\ 23]$. 7) $[2;\ +\infty)$. 8) $(-\infty;\ -4]$. 9) $[0;\ 1)$. **7.17.** 1) $[1;\ +\infty)$. 2) $[0;\ +\infty)$. 3) $[0;\ 2]$. 4) $[\sqrt{6};\ +\infty)$. 5) $(-\infty;\ -2\sqrt{ab}]\cup[2\sqrt{ab};\ +\infty)$. 6) $\mathbb{R}$. 7) $[-2;\ 2]$. **7.18.** $a=-4{,}5$. **7.19.** $a=b=-1$. **7.22.** 1) $f\circ g(x)=x$, $x\geqslant 0$; $g\circ f(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$. 2) $f\circ g(x)=g\circ f(x)=|x|$, $x\in[-1;\ 1]$. 3) $f\circ g(x)=x$, $x>0$; $g\circ f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$. 4) $f\circ g(x)=(x+5)^5$, $x\in\mathbb{R}$; $g\circ f(x)=x^5+5$, $x\in\mathbb{R}$. 5) $f\circ g(x)=\begin{cases}0, & x\in[0;\ +\infty),\\ x^2, & x\in(-\infty;\ 0);\end{cases}$ $g\circ f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$. 6) $f\circ g(x)=\ln\sin^2 x$, $x\neq\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $g\circ f(x)=\sin\ln x^2$, $x\neq 0$. **7.23.** 1) $\sin\log_2\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. 2) $\frac{1}{\sqrt{1+\log_2\sin x}}$. 3) $1+\frac{1}{\log_2\sqrt{\sin x}}$. 4) $\frac{1}{\log_2\sqrt{\sin(1+x)}}$.

7.25. 1) $f(x)=\frac{1}{x+3}$. 2) $f(x)=\frac{1}{x^2}+1$. 3) $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$. 4) $f(x)=x^2-2$. 5) $f(x)=1-x^{3/2}$. **7.26.** Не существует. **7.27.** 1) $f\circ f\circ f(x)=\frac{x}{a(1+b+b^2)x+b^3}$, $\{x\in\mathbb{R}:\ ax+b\neq 0,\ a(1+b)x+b^2\neq 0,\ a(1+b+b^2)x+b^3\neq 0\}$. 2) $g\circ g\circ g(x)=\frac{x}{\sqrt{a^6+(a^4+a^2+1)x^2}}$. 3) Если $b\neq 1$, то $f\circ f\circ\ldots\circ f(x)=\frac{x}{a\frac{b^n-1}{b-1}x+b^n}$, $\left\{x\in\mathbb{R}:\ a\frac{b^k-1}{b-1}x+b^k\neq 0,\ k=1,2,\ldots,n\right\}$, а если $b=1$, то $f\circ f\circ\ldots\circ f(x)=\frac{x}{anx+1}$, $\{x\in\mathbb{R},\ akx+1\neq 0,\ k=1,2,\ldots,n\}$.

4) Если $a^2\neq 1$, то $g\circ g\circ\ldots\circ g(x)=\frac{x}{\sqrt{a^{2n}+\frac{a^{2n}-1}{a^2-1}x^2}}$, а если $a^2=1$, то $g\circ g\circ\ldots\circ g(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. **7.30.** 1) Четная; 2) нечетная; 3) ни четная, ни нечетная; 4) четная; 5) ни четная, ни нечетная; 6) ни четная, ни нечетная, 7) ни четная, ни нечетная; 8) четная; 9) нечетная. **7.41.** 1) а) $y=-x$, $x\in(-\infty;\ 0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$ *); б) $y=x$, $x\in(-\infty;\ 0]$. 2) а) $y=x^2$, $x\in(-\infty;\ 0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$; б) $y=-x^2$, $x\in(-\infty;\ 0]$. 3) а) $y=\sqrt{-x}$, $x\in(-\infty;\ 0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$.

*) Здесь и далее в аналогичных примерах эта запись означает, что за $y(0)$ можно взять любое действительное число.

б) $y=-\sqrt{-x}$, $x\in(-\infty;\ 0]$. 4) а) $y=-x+5$, $x\in(-\infty;\ 0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$; б) $y=x-5$, $x\in(-\infty;\ 0)$, $y(0)=0$. 5) а) $y=\sqrt{1-x^2}$, $x\in(-1;\ 0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$; б) $y=-\sqrt{1-x^2}$, $x\in(-1;\ 0)$, $y(0)=0$. 6) а) $y=x^2+4x+3$, $x\in(-\infty;\ 0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$; б) $y=-x^2-4x-3$, $x\in(-\infty;\ 0)$, $y(0)=0$. 7) а) $y=\dfrac{1}{x(x-1)}$, $x\in(-\infty;\ 0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$; б) $y=\dfrac{1}{x(1-x)}$, $x\in(-\infty;\ 0)$, $y(0)=0$.

7.47. 1) Являются. 2) Являются. 3) Не являются. 4) Не являются.

7.48. 1) Обратная функция $y=(x+1)/2$. 2) Необратима. 3) Обратная функция $y=x^{-1/3}$. 4) Необратима. 5) Обратная функция $y=\sqrt[5]{x^3}$. 6) Обратная функция $y=1+x^2$, $x\geqslant 0$. 7) Необратима. 8) Обратная функция $y=\sqrt{|x|}\operatorname{sign}x$.

7.49. 1) $a=-1$, $b\in\mathbb{R}$ или $a=1$, $b=0$. 2) $\alpha=\pm 1$.

7.51. 1) $\forall C>0\ \exists x\in D(f)\ f(x)>C$. 2) $\forall C>0\ \exists x\in D(f)\ f(x)<-C$.

7.56. 1) $\max f=0$ *), $\min f=-9$. 2) $\max f=1/4$, $\min f=-6$. 3) $\max f=3$, $\min f=5/4$. 4) $\max f=1$, $\min f=-5/13$. 5) $\max f=5$, $\min f=4$. 6) $\max f=1/6$, $\min f=0$. **7.59.** 1) $-9/4$. 2) $4\sqrt{2}$. 3) 0. 4) $-1/3$. **7.60.** 1) -2. 2) $-2\sqrt{2}$. 3) 1. 4) 1. **7.61.** 1) $\sup f=+\infty$; $\inf f=\min f=2$. 2) $\sup f=\max f=-2$; $\inf f=-\infty$. 3) $\sup f=1$; $\inf f=\min f=0$. 4) $\sup f=+\infty$; $\inf f=-\infty$. 5) $\sup f=1$; $\inf f=\min f=0$. **7.68.** Возрастает на $[-1;\ 0]$ и $[1;\ +\infty)$, убывает на $(-\infty;\ -1]$ и $[0;\ 1]$.

7.70. 1) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 0{,}25)\cup(0{,}25;\ +\infty)$. 2) $(-\infty;\ 0]$. 3) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; $(0;\ +\infty)$. 4) $(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$. 5) $(-\infty;\ 99)\cup(99;\ 100)$. 6) $(1;\ +\infty)$; $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$. 7) $(-3;\ -2)\cup(-2;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$. 8) $(0;\ 1)$.

7.71. 1) $(0;\ 1]$. 2) $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$. 3) $[3/4;\ +\infty)$. 4) $[1;\ +\infty)$. 5) $(-\infty;\ 2]$. 6) $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$. **7.72.** 1) Ни четная, ни нечетная 2) Ни четная, ни нечетная. 3) Нечетная. 4) Ни четная, ни нечетная. 5) Четная. 6) Нечетная. 7) Нечетная. 8) Четная. 9) Ни четная, ни нечетная.

7.77. 1) $\sup f=\max f=1$, $\inf f=0$. 2) $\sup f=+\infty$, $\inf f=\min f=\sqrt{2}-1$. 3) $\sup f=1$, $\inf f=-\infty$. 4) $\sup f=8$, $\inf f=-\infty$. 5) $\sup f=+\infty$, $\inf f=-\infty$. 6) $\sup f=+\infty$, $\inf f=\min f=0$. 7) $\sup f=\max f=4$, $\inf f=-\infty$,

7.80. 1) Строго возрастает на $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$. 2) Строго убывает на $(-\infty;\ 0]$, строго возрастает на $[0;\ +\infty)$. 3) Строго убывает на $\mathbb{R}$. 4) Строго возрастает на $(-1;\ +\infty)$. 5) Строго убывает на $(0;\ 1)$ и $(1;\ +\infty)$. 6) Строго возрастает на $(0;\ 2]$, строго убывает на $[2;\ 4)$. 7) Строго убывает на $(-\infty;\ -1)$, строго убывает на $(0;\ +\infty)$.

7.83. 1) а) $y=-3\cdot 2^{-x-1}$, $x\in(-\infty;\ 0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$ **); б) $y=3\cdot 2^{-x-1}$, $x\in(-\infty;\ 0)$, $y(0)=0$. 2) а) $y=1-2\lg(-x)$, $x\in(-\infty;\ 0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$; б) $y=-1+2\lg(-x)$, $x\in(-\infty;\ 0)$, $y(0)=0$. 3) а) $y=\log_{2-x}(-x)$, $x\in(-\infty;\ 0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$; б) $y=-\log_{2-x}(-x)$, $x\in(-\infty;\ 0)$, $y(0)=0$. 4) а) $y=-\operatorname{th}(x+1)$, $x\in(-\infty;\ 0)$, $y(0)\in\mathbb{R}$; б) $y=\operatorname{th}(x+1)$, $x\in(-\infty;\ 0)$, $y(0)=0$.

7.84. 1) $y=\log_3(3/x)$, $x\in(0;\ +\infty)$. 2) $y=10^{x-1}-2$, $x\in\mathbb{R}$. 3) $y=\log_2(x/(1-x))$, $x\in(0;\ 1)$. 4) $y=10^{1/x}$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$. 5) $y=\log_2\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$, $x\in\mathbb{R}$. 6) $y=\operatorname{ch}x$, $x\in(-\infty;\ 0)$.

7.85. 1) $y=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$. 2) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. 3) $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$. 4) $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$. **7.87.** 1. **7.89.** 1) $2\pi/3$. 2) $8/3$. 3) $\pi/3$. 4) π. 5) $\pi/2$. 6) 2π. 7) $\pi/2$.

* Там, где ясно, о каком множестве X идет речь, вместо $\max\limits_X f$ написано $\max f$.

**) См. сноску на с. 533.

7.92. 1) $x\neq\pi n/2$, $n\in Z$. 2) $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in Z$. 3) $x\in\left(2\pi n;\ \dfrac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$. 4) $x\in[2;\ 4]$. 5) $x\in[0;\ 4]$. 6) $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$. 7) $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$.

7.93. 1) $[-1;\ 1]$. 2) $[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}]$. 3) $[1/2;\ 1]$. 4) $(-\infty;\ 0]\cup[2;\ +\infty)$. 5) $[0;\ \pi/2]$. 6) $(\pi/2;\ \pi]$. 7) $[0;\ 1]$. 8) $[-\pi/4;\ \pi/4]$.

7.94. 1) Нечетная. 2) Четная. 3) Четная. 4) Четная. 5) Нечетная. 6) Ни четная, ни нечетная. 7) Ни четная, ни нечетная. 8) Ни четная, ни нечетная. **7.95.** 1) Четная. 2) Ни четная, ни нечетная. 3) Четная. 4) Четная. 5) Четная. 6) Нечетная. 7) Четная. **7.99.** 1) $\sup f=\max f=21$, $\inf f=\min f=-3$. 2) $\sup f=\max f=\sqrt{3/2}$, $\inf f=\min f=0$. 3) $\sup f=\max f=1/2$, $\inf f=-\infty$. 4) $\sup f=+\infty$, $\inf f=\min f=2$. 5) $\sup f=1$, $\inf f=-1$. 6) $\sup f=\pi/2$, $\inf f=-\pi/2$. 7) $\sup f=\max f=\pi/2$, $\inf f=0$.

7.100. 1) Строго убывает на $[-\pi;\ -\pi/2)$ и $(-\pi/2;\ 0]$, строго возрастает на $[0;\ \pi/2)$ и $(\pi/2;\ \pi]$. 2) Строго возрастает на $[2/(3\pi);\ 2/\pi]$, строго убывает на $[2/\pi;\ +\infty)$. 3) Строго убывает на $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$. 4) Строго возрастает на $[-1;\ 0]$, строго убывает на $[0;\ 1]$. 5) Строго возрастает на $\mathbb{R}$. 6) Строго возрастает на $(-\infty;\ 0]$, строго убывает на $[0;\ +\infty)$. 7) Строго убывает на $\mathbb{R}$. **7.104.** 1) а) $y=1-\sin x$, $x<0$, $y(0)\in\mathbb{R}$ *); б) $y=-1+\sin x$, $x<0$, $y(0)=0$. 2) а) $y=-\operatorname{ctg}x$, $x<0$, $y(0)\in\mathbb{R}$; б) $y=\operatorname{ctg}x$, $x<0$, $y(0)=0$. 3) а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}$, $x<0$, $y(0)\in\mathbb{R}$; б) $y=-\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}$, $x<0$, $y(0)=0$. 4) а) $y=\pi-\arccos 2x$, $x<0$, $y(0)\in\mathbb{R}$; б) $y=\arccos 2x-\pi$, $x<0$, $y(0)=0$. 5) а) $y=-\operatorname{arctg}(x+1)$, $x<0$, $y(0)\in\mathbb{R}$; б) $y=\operatorname{arctg}(x+1)$, $x<0$, $y(0)=0$. **7.105.** 1) $y=-\pi-\arcsin x$. 2) $y=-\arccos x$. 3) $y=\pi+\operatorname{arctg}x$. 4) $y=\operatorname{arcctg}x-\pi$. 5) $y=(\pi-\arcsin(x/2))/3$. 6) $y=2\sin(x/2)$, $x\in[-\pi;\ \pi]$. 7) $y=-\cos x$, $x\in[0;\ \pi/2]$. 8) $y=\cos x$, $x\in[0;\ \pi/2]$. 9) $y=\operatorname{ctg}x$, $x\in(-\pi/2;\ \pi/2)$, $x\neq 0$. **7.107.** 1) $y=1/x$, $x\neq 0$, $x\neq\pm 1$. 2) $y=2x^2$, $x\neq\pm 2$. 3) $y=\sqrt{6-x^2}$, $x\neq-\sqrt{2}$. 4) $x=-y^{4/5}$, $y\neq 0$. 5) $x=y^2$. **7.111.** 1) A. 2) A и B. 3) B. 4) Ни A, ни B. **7.112.** 1) $y=x^2+1$. 2) $(x-2)^2+(y-1)^2=9$. 3) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$. 4) $3x=|\ln(y-1)|$. 5) $8(x+y)=(x-y)^2+16$. **7.114.** 1) $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\varphi+\dfrac{3\pi}{4}\right)}$. 2) $r=2\cos\varphi$. 3) $\varphi=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}$ ($n=0,\ 1,\ 2,\ 3$) и $r=0$. 4) $r=\dfrac{1}{4\sin^2(\varphi/2)}$. **7.117.** 1) $[0;\ 6)$. 2) $[-3;\ 0{,}5]$. 3) $x\neq\pm 1$. 4) $(-\infty;\ -2]\cup[2;\ +\infty)$. 5) $[-3;\ 3]$. 6) $(-4;\ 2)$.

7.118. 1) $\mathbb{R}$. 2) $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi n\right)\cup\left(2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$. 3) $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ 3)$. 4) $(-\infty;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$. 5) $(-5;\ 8/5)\cup(8/5;\ 9/5)$. 6) $\left(-\infty;\ -\sqrt{5}-1\right)\cup\left(-\sqrt{5}-1;\ -3\right)\cup[2;\ +\infty)$. 7) $(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$. 8) $(0;\ 1)\cup(1;\ \log_2(8/3))$. 9) $(-1;\ 5)$. 10) $(2;\ 3)$. **7.119.** 1) $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 2) $\dfrac{\pi}{4}+\pi n<x\leqslant\dfrac{3\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. 3) $-4<x<4$, $x\neq\pm\pi$, $x\neq 0$.

7.120. 1) $[0;\ 4]$. 2) $\varnothing$. 3) $x\neq\pm 3$. 4) $[-(1+\sqrt{5})/2;\ (1-\sqrt{5})/2]\cup[(\sqrt{5}-1)/2;\ (\sqrt{5}+1)/2]$. 5) $[1/\sqrt{2};\ 1]$. 6) $\dfrac{\pi}{3}+\pi n\leqslant x\leqslant\dfrac{2\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$. 7) $-1\leqslant x\leqslant 1$, $x\neq\pm 1/\sqrt{2}$. 8) $(\operatorname{ctg}0{,}5;\ +\infty)$. 9) $[0;\ (3-\sqrt{5})/2)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\ 4\right]$.

*) См. сноску на с. 533.

10) $[1; 2)$. 11) $(-6; -5\pi/3] \cup [-\pi/3; 1/6)$. 12) $(0; 1/2) \cup (1/2; 1)$.
7.121. 1) $[-1/3; 1/3]$. 2) $(-1; 1]$. 3) $[1; +\infty)$. 4) $[0; 3]$. 5) $\{0\}$. 6) $[2^{-9}; +\infty)$. 7) $(-\infty; 2]$. 8) $\{1/2\}$. 9) $[0; 1]$. **7.122.** 1) $[-\sqrt{26}; \sqrt{26}]$. 2) $[-1; 1]$. 3) $[0; +\infty)$. 4) $\mathbb{R}$. 5) $\{0\}$. 6) $[-1; 5/4]$. 7) $(-\infty; \log_2(5/4)]$. 8) $[1/\sqrt{2}; 1]$. 9) $[\pi/4; 3\pi/4]$.
7.123. 2) $[2; 3)$. **7.124.** 1) $[-4; -3] \cup (-1; +\infty)$. 2) $\{-6\}$. 3) $(-\infty; -6] \cup (-1; +\infty)$. 4) $[-4; -3]$. **7.126.** а) $a > 1/\sqrt[3]{4}$; б) $b = -\sqrt[3]{2}$. **7.127.** 1) $a > 1$. 2) $a > 0$, $a < -1$. 3) $0 \leqslant a \leqslant 1/2$. **7.128.** $S = x^2$, $x \in [0; 1/2]$, $S = (4x-1)/4$, $x \in [1/2; 3/2]$, $S = 1{,}5 - (2-x)^2$, $x \in [3/2; 2]$.

7.129. $V = \dfrac{\pi r^2}{3}\,\dfrac{h^2}{h-2r}$, $h > 2r$. **7.130.** $S = 4\sqrt{2/3}x(b-2x)$, $0 \leqslant x \leqslant b/3$; $S = \sqrt{2/3}(b-x)^2$, $b/3 < x \leqslant b$; $\max S = b^2/\sqrt{6}$. **7.131.** $2R \sin(\alpha/2)(1-\sin(\alpha/2))$; $R/2$. **7.132.** $\rho x + m(1 + E(x/l))$. **7.133.** $S = vt$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $S = v\sqrt{7t^2 - 15t + 9}$, $t > 1$; $\min S = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}v$. **7.134.** 1) $[-3; 3]$. 2) $(3\sqrt{5} - 5)/4$.

7.136. 1) n^m. 2) $n!$. **7.138.** Обратимы функции: 1), 4), 6), 9).
7.140. 1) $y = x^{4/3}$, $x \geqslant 0$. 2) $y = -\sqrt{(x+1)/x}$, $x \leqslant -1$, $x > 0$. 3) $y = 1 - \sqrt{1-x}$, $x < 0$; $y = -1 + \sqrt{1+x}$, $x \geqslant 0$. 4) $y = (5x+3)/(x-1)$, $x \neq 1$, $x \neq -3/5$. 5) $y = x + \sqrt{x^2-1}$, $x \geqslant 1$. 6) $y = x - \sqrt{x^2-1}$, $x \geqslant 1$. 7) $y = (x^2+1)/2x$, $x \leqslant -1$. 8) $y = (x^2+1)/2x$, $-1 \leqslant x < 0$.

7.141. 1) $y = 1 - \sqrt{\log_2 2x}$, $x \geqslant 1/2$. 2) $y = (1 - \ln(1-x))/(1 + \ln(1-x))$, $x < 1$, $x \neq 1 - e^{-1}$. 3) $y = \log_{1{,}5}\dfrac{1+x}{1-x}$, $-1 < x < 1$. 4) $y = 0{,}5 \lg \dfrac{x}{2-x}$, $0 < x < 2$. 5) $y = 0{,}5(a^x - a^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$.
7.142. 1) $y = 3\pi - \arcsin x$, $x \in [-1; 1]$. 2) $y = 4\pi - 2\arccos(x/2)$, $x \in [-2; 2]$. 3) $y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in (0; +\infty)$, $y = \operatorname{arcctg} x - \pi$, $x \in (-\infty; 0)$. 4) $y = 2\pi + 2\arcsin\sqrt{x} = 2\pi + \arccos(1-2x)$, $x \in [0; 1]$. 5) $y = -\arccos(1/x)$, $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. 6) $y = \sin x$, $x \in [0; \pi/2]$. 7) $y = -\sin x$, $x \in [0; \pi/2]$. 8) $y = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$, $x \in (-\pi/2; -\pi/4) \cup (-\pi/4; \pi/2)$.
7.143. 1) $(0; 0)$, $(2/3; 2/3)$, $(-2/3; -2/3)$.

7.144. $y = (x^3 - 3x)/2$, $|x| \geqslant 2$. **7.146.** $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2+1}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

7.147. $\left[\dfrac{2-\pi}{2+\pi}; +\infty\right)$, $y = \dfrac{1 + \arcsin 0{,}5(x-1)}{1 - \arcsin 0{,}5(x-1)}$, $x \in [-1; 1 + 2\sin 1)$.
7.148. 2) $a + d = 0$, $|a| + |c| \neq 0$ или $b = c = 0$, $a = d \neq 0$.
7.150. $b = -1$, $a > 0$ или $b = 1$, $a = 0$. **7.151.** $-0{,}5 < a < 0{,}5$.
7.152. $c = \pi$, $b = -1$, $a \in \mathbb{R}$ или $c = \pi$, $b = 1$, $a = 0$. **7.153.** $|\lambda| \geqslant \pi$; если $\lambda \leqslant -\pi$, то $y = \sin 0{,}5(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda\pi + 4x})$, $x \in \left[\dfrac{\pi^2}{4} + \lambda\pi; \dfrac{\pi^2}{4}\right]$; если $\lambda \geqslant \pi$, то $y = \sin 0{,}5(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda\pi + 4x})$, $x \in \left[\dfrac{\pi^2}{4}; \dfrac{\pi^2}{4} + \lambda\pi\right]$.
7.155. 1) $0 \leqslant x \leqslant 1$. 2) $-1 \leqslant x \leqslant 0$. 3) $0 < x$. 4) $x < 0$. 5) $x < 1$. 6) $x > 1$.
7.156. 1) Четная. 2) Нечетная. 3) Ни четная, ни нечетная. 4) Нечетная. 5) Четная. 6) Ни четная, ни нечетная. 7) Ни четная, ни нечетная. 8) Четная.
7.157. 1) Нечетная. 2) Нечетная. 3) Четная. 4) Ни четная, ни нечетная. 5) Четная. 6) Нечетная. 7) Нечетная. 8) Нечетная. 9) Четная. **7.158.** 1) Четная. 2) Нечетная. 3) Ни четная, ни нечетная. 4) Четная. 5) Ни четная, ни нечетная. 6) Нечетная. 7) Нечетная. 8) Четная. **7.159.** 1) Четная. 2) Ни четная, ни нечетная. 3) Четная. 4) Нечетная. 5) Ни четная, ни нечетная. 6) Нечетная. 7) Ни четная, ни нечетная. 8) Четная.

7.160. 1) $(3x^2+1) + (x^3+3x)$. 2) $-\dfrac{3}{x^4} + \dfrac{1}{x^3}$. 3) $\cos x \sin 1 + \sin x \cos 1$. 4) $\dfrac{1}{x^2-1} + \dfrac{x}{x^2-1}$. **7.162.** 1) $0{,}5(|x-1| + |x+1|) + 0{,}5(|x-1| - |x+1|)$.

2) $0{,}5(a^x + a^{-x}) + 0{,}5(a^x - a^{-x})$. 3) $\ln 2\operatorname{ch}\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}$. 4) $\cos x^3 \sin x^2 + \sin x^3 \cos x^2$. 5) Не представима. 6) $\dfrac{\pi}{2} + (-\arcsin x)$. 7) $-\dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x$.
8) $0{,}5(\operatorname{arctg}(1-x) + \operatorname{arctg}(1+x)) + 0{,}5(\operatorname{arctg}(1-x) - \operatorname{arctg}(1+x)) = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{\sqrt{x^4+4} + x^2} - \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{\sqrt{x^4+4} - x^2 + 2}$.
7.163. 1) а) Нет; б) да. 2) а) Да; б) нет. **7.164.** 1) $f \circ g$, $g \circ h$, $h \circ g$. 2) $h \circ h$. **7.165.** 2) Нет.
7.174. 1) Постоянная на $(-\infty; 0]$, строго возрастает на $[0; +\infty)$. 2) Строго убывает на $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$, $(3; +\infty)$. 3) Строго возрастает на $(-\infty; 1]$, строго убывает на $[1; +\infty)$. 4) Строго возрастает на $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$, строго убывает на $[-1; 1]$. 5) Строго убывает на $(-\infty; 0]$, строго возрастает на $[0; +\infty)$. 6) Строго возрастает на $(-\infty, -1)$ и $(-1; 0]$, строго убывает на $[0; 1)$ и $(1; +\infty)$.
7.175. 1) Убывает на $(-\infty; -1]$, возрастает на $[1; +\infty)$. 2) Возрастает на $[0; 1]$, убывает на $[1; 2]$. 3) Возрастает на $(-\infty; -3)$ и $(-3; -\sqrt{5}]$, убывает на $[\sqrt{5}; 3)$ и $(3; +\infty)$. 4) Возрастает на $(-\infty; 0]$, убывает на $[0; +\infty)$. 5) Убывает на $\mathbb{R}$. 6) Возрастает на $(-\infty; -2\sqrt{2})$ и $(-2\sqrt{2}; 0]$, убывает на $[0; 2\sqrt{2})$ и $(2\sqrt{2}; +\infty)$. 7) Возрастает на $[2; +\infty)$. 8) Возрастает на $[1; +\infty)$. 9) Возрастает на $(-\infty; -1]$, убывает на $[1; +\infty)$.
7.176. 1) Убывает на $[0; \pi/4]$ и $[\pi/2; 3\pi/4]$, возрастает на $[\pi/4; \pi/2]$ и $[3\pi/4; \pi]$. 2) Убывает на $[0; \pi/2]$ и $[3\pi/2; 2\pi]$, возрастает на $[\pi/2; 3\pi/2]$. 3) Убывает на $(0; \pi/4]$ и $[3\pi/4; \pi]$, возрастает на $[\pi/4; \pi/2]$ и $(\pi/2; 3\pi/4]$. 4) Убывает на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. 5) Возрастает на $(0; 4]$, убывает на $[4; 8)$. 6) Возрастает на $\mathbb{R}$. 7) Возрастает на $(-\infty; -1]$, убывает на $[-1; +\infty)$. 8) Возрастает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$, убывает на $[-1; 0]$ и $[1; +\infty)$. **7.187.** Является.
7.193. 1) $2\sqrt{3}$. 2) 4. 3) 4. 4) 1. **7.194.** 1) -1. 2) $9/4$. **7.195.** 1) -6. 2) $1/8$. 3) $1/\sqrt{2}$. 4) -2. **7.196.** 1) $\max f = 1/4$, $\min f = 0$. 2) $\max f = 5$, $\min f = 11/4$. 3) $\max f = 8$, $\min f = 0$. 4) $\max f = 1$, $\min f = 1/4$. 5) $\max f = 9/16$, $\min f = -1$. 6) $\max f = 1$, $\min f = \cos 2$. 7) $\max f = \sin 1$, $\min f = -1$. 8) $\max f = 1/2$, $\min f = 0$. 9) $\max f = 1/2$, $\min f = -1/6$.
7.197. Если $\dfrac{av_1 + bv_2}{bv_1 + av_2} \leqslant \cos\alpha$, то $\min S = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$, если $\dfrac{av_1 + bv_2}{bv_1 + av_2} > \cos\alpha$, то $\min S = \dfrac{|bv_1 - av_2|\sin\alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha}}$.
7.198. $0{,}5S$. **7.199.** 1) $R^2\operatorname{ctg}\alpha$. 2) $R^2/(2\sin^2\alpha)$. **7.200.** $1/\sqrt{2}$.
7.201. 1) $\max f = -1/\lg 3$; $\min f = -\lg 40/\lg 3$. 2) $\max f = 1$; $\min f = \lg 5/\lg 9$. 3) $\max f = 5/4$; $\min f = 1$. 4) $\max f = 5$; $\min f = 4$. 5) $\max f = -18$; $\min f = -20{,}5$. 6) $\max f = -1$; $\min f = -32/7$. **7.203.** $-3{,}25$.
7.204. 1) $\max f = 1$; $\min f = -\sqrt{2}$. 2) $\max f = 2\sqrt{2}$; $\min f = 2$.
7.205. $r = R/\sqrt{2}$, $H = R\sqrt{2}$. **7.206.** $r = R\sqrt{2}$, $H = 4R$. **7.207.** $a/\sqrt{5}$.
7.208. $7a^2/32$. **7.209.** $1/5$. **7.210.** 1) $1/8$. 2) $1/2\sqrt{3}$. **7.211.** 1) -1. 2) -4. 3) $-(ad-bc)^2/4 = -((b-a)(c-a))^2/4$. 4) $\dfrac{n-1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_i^2$. 5) 3. **7.212.** 2.
7.214. $g(x) = f(2x_0 - x)$. **7.215.** $g(x) = 2y_0 - f(x)$.
7.216. $g(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$.
7.217. 1) Убывает на $(-\infty; 2]$, возрастает на $[2; +\infty)$. 2) Возрастает на $(-\infty; 3/4]$, убывает на $[3/4; +\infty)$. 3) Убывает на $(-\infty; -3/2]$ и $[0; 3/2]$, возрастает на $[-3/2; 0]$ и $[3/2; +\infty)$. 4) Убывает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$, возрастает на $[-1; 0]$ и $[1; +\infty)$.
7.226. 1) $c \neq 0$, $bc - ad = c^2$. 2) $c \neq 0$, $bc - ad = c^2(x_2 - x_1)$.
7.227. 1) $(1/2; 1/2)$. 2) $(-d/c; a/c)$. 3) $(2; -16)$. 4) $(-b/3a; (2b^3 - 9abc + 27a^2d)/27a^2)$.

7.236. 1) $|\alpha|$. 2) 1/2. 3) $\pi/\sqrt{2}$. 4) π. 5) π. 6) π. 7) $\pi/2$. 8) 2π. 9) 2π. 10) π. 11) 2π.

7.239. 1) $16\pi/3$. 2) $16\pi/3$. 3) $2\pi n_0 \dfrac{q_1}{p_1} = 2\pi m_0 \dfrac{q_2}{p_2}$, где $p_1q_2/p_2q_1 = n_0/m_0$ — несократимая дробь. 4) $2\pi n_0 \dfrac{q_1}{p_1} = 2\pi m_0 \dfrac{q_2}{p_2}$, где $p_1q_2/p_2q_1 = n_0/m_0$ — несократимая дробь. 5) $2\pi l_0 \dfrac{q_1}{p_1} = \pi k_0 \dfrac{q_2}{p_2}$, где $p_1q_2/2p_2q_1 = l_0/k_0$ — несократимая дробь.

7.240. $a = b$, $T = 1/|a|$.

7.243. Нет. **7.244.** $2|a-b|$. **7.245.** $4|a-c|$. **7.246.** 1) $2T$. 2) $2T$. 3) Если $ab \neq -1$, то период равен $2T$, если $ab = -1$, периодом является любое, не равное нулю, число. 4) $3T$. **7.247.** $2T$.

7.266. 1) $t = \pm 1$. 2) $t = 1$. 3) $t = \pi(4n+1)/4$, $n \in Z$. 4) $t = \pi(2n+1)$, $n \in Z$. **7.267.** 1) A. 2) B. **7.268.** 1) $x = 2y - \dfrac{y^2}{9}$. 2) $y = (x-1)^{2/3}$. 3) $y^2 = 4x^2(1-x^2)$. 4) $y = 2(1+x-x^2)/(1+x^2)$. 5) $x = 3y - 4y^3$.

7.273. 1) Выпукла вниз на $\mathbb{R}$. 2) Выпукла вверх на $(-\infty; 0]$, выпукла вниз на $[0; +\infty)$. 3) Выпукла вверх на $(-\infty; 0)$, выпукла вниз на $(0; +\infty)$. 4) Выпукла вниз на $(-\infty; -1)$; выпукла вверх на $(-1; +\infty)$. 5) Выпукла вниз на $\mathbb{R}$. 6) Выпукла вверх на $(-\infty; 0]$, выпукла вниз на $[0; +\infty)$. 7) Выпукла вверх на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. 8) Выпукла вниз на $(0; 1]$, выпукла вверх на $[1; +\infty)$. **7.276.** 1) Выпукла вверх на $(-\pi/2; 0]$, выпкула вниз на $[0; \pi/2)$. 2) Выпукла вверх на $[0; \pi/4]$, $[3\pi/4; 5\pi/4]$, $[7\pi/4; 2\pi]$, выпукла вниз на $[\pi/4; 3\pi/4]$, $[5\pi/4; 7\pi/4]$. 3) Выпукла вверх на $[-1, 0]$, выпукла вниз на $[0; 1]$. 4) Выпукла вверх на $(-\infty; 0]$, выпукла вниз на $[0; +\infty)$.

7.284. 1) a. 2) b. 3) a, b. 4) a. **7.285.** $n \leqslant 4$. **7.286.** 1) 6. 2) 200. 3) 12. 4) 5. 5) $8k^2 - 4k + 1$. **7.287.** 1) $x_6 = 3$. 2) $x_3 = 1/6$. 3) $x_3 = 5/64$. 4) $x_3 = 9/8$. **7.288.** 1) $x_4 = -9$. 2) $x_2 = 4{,}5$. 3) $x_5 = \log_3^2 5 - 3\log_3 5$. 4) $x_3 = 1{,}4^3/3$.

7.289. 3) а) 6; б) 9; в) 5. **7.290.** 1) а) Да; б) нет. 2) а) Да; б) нет. 3) а) Нет; б) да. **7.294.** 1) $x_n = 2 + 6n$. 2) $x_n = (-3)^n/6$. 3) $x_n = (n+1)/n$. 4) $x_n = 2 + (-1)^n$. 5) $x_n = 3 + 2^n$. 6) $x_n = n!$. 7) $x_n = ((-1)^n - n)/n$. 8) $x_n = (1 - 10^{-n})/3$. 9) $x_n = n/2^n$.

7.295. $x_n = \dfrac{x_1}{2}(n-2)(n-3) - x_2(n-1)(n-3) + \dfrac{x_3}{2}(n-1)(n-2)$.

7.297. $x_n = a^n/n!$; если $0 < a < 2$, то $\max\{x_n\} = x_1$; если $a \geqslant 2$, то $\max\{x_n\} = x_{E(a)}$. **7.298.** 1) $x_n = n\left(a + \dfrac{1}{2}(n-1)\right)$. **7.299.** 1) $x_n = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{k=1}^{n-1} k!$.

2) $x_n = n!\left(a + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k!}\right)$. 3) $x_n = n/(n+1)$. 4) $x_n = a\alpha^{n-1} + 2\beta \dfrac{2^{n-1} - \alpha^{n-1}}{2-\alpha}$.

5) $x_n = \dfrac{3 \cdot 2^{n-1} - 2}{3 \cdot 2^{n-1} - 1}$. 6) $x_n = 2 - 2^{2-n}$. 7) $x_n = ((a+b)2^{n-1} + (b-2a)(-1)^n)/3$.

7.300. $x_n = (a + b + (a-b)\cdot 3^{1-n})/2$; $y_n = (a + b - (a-b)\cdot 3^{1-n})/2$.

7.302. 1) Если $p + q \neq 1$, то

$$x_n = \frac{(\lambda_2(a+\alpha) - b - \alpha)\lambda_1^{n-1} - (\lambda_1(a+\alpha) - (b-\alpha))\lambda_2^{n-1}}{\lambda_2 - \lambda_1} - \alpha,$$

где $\alpha = r/(p+q-1)$; если $p + q = 1$, то

$$x_n = a - \frac{r(n-1)}{p-2} + \left(b - a + \frac{r}{p-2}\right)\frac{(p-1)^{n-1} - 1}{p-2}.$$

2) Если $p \neq 2$, то $x_n = (2\lambda_0(a+\alpha) - b - \alpha + n(b + \alpha - \lambda_0(a+\alpha)))\lambda_0^{n-2} - \alpha$, где $\alpha = -4r/(p-2)^2$; если $p = 2$, то $x_n = a + (n-1)(b-a) + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} r$.

7.303. 1) $x_n = (6n - 1 - 8(-0{,}5)^n)/9$. 2) $x_n = (2^{n+1} - 2(-1)^n)/3 - 1$.

7.304. $x_n = \dfrac{(a-\lambda)(-\lambda^2)^{n-1} + \lambda(\lambda a + 1)}{\lambda a + 1 + \lambda(\lambda - a)(-\lambda^2)^{n-1}}$, где $\lambda = (\sqrt{5} - 1)/2$.

7.305. $a \neq -2^k/(2^k - 1)$, $k \in \mathbb{N}$; $x_n = a/((a+1)2^{n-1} - a)$.

7.306. 1) $x_n = 3a/(a - (a-3)4^{n-1})$. 2) $a = 3 \cdot 4^k/(4^k - 1)$, $k \in \mathbb{N}$.

7.307. 1) Если $b \neq 1$, $a \neq -(b-1)b^k/(b^k - 1)$, $k \in \mathbb{N}$, то $x_n = a(b-1)/((a+b-1)b^{n-1} - a)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$; если $b = 1$, $a \neq -1/k$, $k \in \mathbb{N}$, то $x_n = a/(1 + (n-1)a)$, $n \in \mathbb{N}$. 2) Если $b \neq c$, $ad \neq (c-b)c^k/(b^k - c^k)$, $k \in \mathbb{N}$, то $x_n = a(b-c)b^{n-1}/(adb^{n-1} + (b-c-ad)c^{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$; если $b = c$, $ad \neq -b/k$, $k \in \mathbb{N}$, то $x_n = ab/(b + (n-1)ad)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

7.319. 1) $\sup\{x_n\} = 1$, $\inf\{x_n\} = 1/2$. 2) $\sup\{x_n\} = 1/2$, $\inf\{x_n\} = 1/3$. 3) $\sup\{x_n\} = 1$, $\inf\{x_n\} = 1/2$. 4) $\sup\{x_n\} = 2$, $\inf\{x_n\} = 1/2$. **7.324.** 1) $p \geqslant 2q$. 2) $p \geqslant 1{,}5q$. 3) $p \geqslant kq/(k-1)$. **7.326.** 2) $(\ln 3)/3$. **7.337.** 2) Верно. **7.342.** $E(q/(1-q)) + 1$. **7.343.** 1) $ad > bc$. 2) $ad < bc$. **7.345.** $\inf\{x_n\} = 0{,}5$, $\sup\{x_n\} = 1$. **7.355.** 6.

Глава II. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

§ 8. Предел последовательности

8.1.

N	1	3	34	3334	$2 \cdot 10^9$

8.2. 1) $E(1/\varepsilon) + 1$. 2) $E(|a|/\varepsilon) + 1$. 3) $E(1/\varepsilon) + 1$. 4) $E(3/\varepsilon) + 1$. 5) $E(2/\varepsilon) + 1$. 6) $E(1/\varepsilon) + 1$.

8.3. 1) а) $n \geqslant 33$. б) $n \geqslant 54$. в) $n \leqslant 21k + 12$.

8.4. 1)

N	1	4	67	6667	$3 \cdot 10^9$

8.7. 1)

N	1	2	101	$10^4 + 1$

8.9. 1)

N	1	2	50	5000

8.18. 1) 5. 2) 0,6. 3) 1/3. 4) —1. 5) 1. 6) 0. 7) 1. 8) —1/6. 9) —1. 10) 0. 11) 27. 12) —15/2. 13) 1/6. 14) —0,5.

8.19. 1) —1. 2) 1/2. 3) 3. 4) —1/2. **8.20.** 1) $d/2$. 2) $1/2d$. **8.22.** 1) 1/9. 2) 5/11. 3) 26/111. **8.24.** 1) 0. 2) 0. 3) 0. 4) 0. 5) 1. **8.25.** 1) 3. 2) 1/2. 3) 1/2. 4) 1. 5) 1. 6) 0. 7) 1/2. 8) —1. 9) 1. 10) 2/3. 11) 1/3. **8.27.** 1) 1. 2) 1. 3) 1. 4) —1/2. 5) 1. 6) 1. 7) 1. 8) 3. 9) 1/2. 10) 3. 11) 4. 12) 11. 13) 1. **8.28.** 1) 1. 2) 1. 3) 1. 4) 1. 5) 1. 6) 1. 7) 1. 8) 1/2. 9) 1. 10) 1. 11) 1. **8.30.** 1) 1/3. 2) 0. 3) 3. 4) 4/5. 5) 1. **8.32.** 1) 0. 2) 5. 3) 0. 4) 0. 5) 1/2. **8.34.** 1) 0. 2) 0. 3) 0. 4) 0. 5) 0. 6) 0. 7) 1.

8.45. 1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \forall n \geqslant N\ |x_n| > \varepsilon$. 2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \forall n \geqslant N\ x_n > \varepsilon$. 3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \forall n \geqslant N\ x_n < -\varepsilon$. **8.46.** 1) Верно. 2) Неверно.

8.47. 1) $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \exists n \geqslant N\ |x_n| \leqslant \varepsilon$. 2) $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \exists n \geqslant N\ x_n \leqslant \varepsilon$. 3) $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \exists n \geqslant N\ x_n \geqslant -\varepsilon$. **8.53.** 1) 0. 2) $+\infty$. 3) $-\infty$. 4) 1, —1. 5) 0, $+\infty$. 6) 0, $\pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, ± 1. 7) 0, $\pm\infty$.

8.56. 1) $\pm 1/2$, ± 1; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$. 2) ± 2; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 2$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -2$. 3) 0, $+\infty$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. 4) $[0; 1]$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

8.57. 1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$; $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; $\sup x_n = 1{,}5$; $\inf x_n = -1$; 2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sup x_n = 3$; $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \inf x_n = -3$. 3) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sup x_n = +\infty$; $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \inf x_n = -\infty$. 4) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$; $\sup x_n = 3/2$; $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \inf x_n = -\infty$. 5) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sup x_n = +\infty$; $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$; $\inf x_n = 0$.

8.65. 1) 0. 2) 0. 3) 0. **8.67.** 1) 4. 2) $\sqrt[k-1]{5}$. 3) $\sqrt[k-1]{a}$. 4) а) — в) 1/3. 5) $(1+\sqrt{5})/2$. **8.69.** 1) e. 2) e. 3) e^{-1}. 4) e^2. 5) $\sqrt{e}$. 6) e^{-1}. 8.87. 2) Не может. **8.89.** 1) Является. 2) Не обязательно. 8.91. 1) а), г) — верны. б), в), д) — ложны. 2) $j = 6$, 8. 3) K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_7. 4) K_1, K_3, K_4, K_7. 5) 1. 6) $K_2 = K_5$. **8.95.** 1)—5) и 8)—10) 0. 6)—7) 1. **8.97.** 1) 0. 2) 1. **8.98.** $a/2$. **8.99.** 1) $+\infty$. 2) 2/3. 3) -1. 4) -1. 5) 19 800. 6) 1. 7) 1/5. 8) 2. 9) $pq(q-p)/2$.

8.100. 1) 0. 2) 1, если $|a| > 1$; 1/2, если $a = 1$; 0, если $|a| < 1$. 3) 0, если $|a| \neq 1$; 1/2, если $a = 1$; не существует при $a = -1$. 4) 1, если $|a| > 1$; 0, если $|a| = 1$; -1, если $|a| < 1$. **8.101.** $2\pi R^2$, $4R^2$. **8.102.** 1) 1/2. 2) $1/\sqrt{2}$. 3) 1/4. **8.103.** 1) $1/a_1 d$. 2) $1/\sqrt{d}$. **8.104.** $10a/81$. **8.105.** $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. **8.106.** 1) 0. 2) 0. 3) 2. 4) 1/3. 5) $-1/4$. 6) 1/3. 8.107. $a = 1$; $b/2$.

8.108. 1) $(a_1+a_2)/2$. 2) $(a_1+a_2+a_3)/3$. 3) $(a_1+a_2+\ldots+a_p)/p$. 8.110. 1) -2. 2) 0. 3) 1/6. 4) 0. 5) $+\infty$. 6) $-\infty$. 7) 0. 8.111. 1) 2. 2) 0. 3) -1. 4) 1/3. 5) 1/3. 6) 1/2. 7) 4/3. 8) $a^2+a+1/3$. 8.112. 1/6. **8.113.** 1) 1/3. 2) 1/2. 8.114. $k(k+1)/2$. 8.115. 0. **8.116.** 1) Неверно. 2) Верно. **8.118.** 1) Не следует. 2) Не следует. **8.123.** 1) Не обязательно. 3) Может. **8.124.** 1) 3. 2) 1. 3) $\max\{a; b\}$. 4) 3/4. 5) 6. 6) -1. 7) m/k. **8.125.** 1) 1. 2) 1. 3) 1. 8.128. $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. 8.129. 1) 1. 2) 1. 3) 1. 4) 1. 5) 1. 6) 1. 7) 2. 8) 1. 9) -8. 10) 1. 11) 4. 8.134. 1) 0. 2) 0. 8.135. $q/(1-q)^2$. 8.136. 0. **8.141.** $\exists \varepsilon \forall N \exists n \geqslant N \ |x_n| \leqslant \varepsilon$. 8.143. 1) $a < 5$. 2) $a > 5$. 3) $a = 5$. 8.144. 1) $p \leqslant q$. 2) $p > q$. 8.147. 1) $\alpha > 1$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1/2$ при $\alpha = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ при $\alpha < 1$. 8.151. 1) Неверно. 2) Неверно. 3) Неверно. **8.163.** Не следует.

8.164. 1) 0, ± 1; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$, $\sup x_n = 1$, $\inf x_n = -1$. 2) ± 1; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$, $\sup x_n = 3/2$, $\inf x_n = -1$. 3) $-\infty$; 0; 1; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, $\sup x_n = 1$, $\inf x_n = -\infty$. 4) 0, $\pm\sqrt{3}/2$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}/2$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\sqrt{3}/2$, $\sup x_n = (2+\sqrt{3})/2$, $\inf x_n = -\sqrt{3}/2$. 5) 0, 2; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 2$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\sup x_n = 2$, $\inf x_n = 0$. 6) 1; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\sup x_n = \sqrt{6}$, $\inf x_n = 1$. 7) 0, $+\infty$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$; $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\sup x_n = +\infty$, $\inf x_n = 0$. 8) 0, 1; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\sup x_n = 1$, $\inf x_n = 0$.

8.165. 1) $[0; 1]$. 2) $[0; +\infty)$ и $+\infty$.

8.166. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 2$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

8.168. Является. **8.178.** 2) Не может. **8.179.** $M \in [AC]$ и $N \in [AC]$, где $AM = \frac{1}{3}AC$, $AN = \frac{2}{3}AC$. **8.206.** 1) 0. 2) 0. 3) 0. 4) 0. 5) 0, если $\alpha > 1$; $+\infty$, если $\alpha \leqslant 1$. 6) $+\infty$, если $a > 1$; $-\infty$, если $0 < a < 1$.

8.210. Не обязательно. **8.212.** 1) 1. 2) 1. 3) e^3. 4) $1/e$. 5) $1/e^2$. 8.214. 1) $+\infty$, если $a > 1$; $-\infty$, если $a < 1$. 2) 1. **8.220.** 1) e^2. 2) e^{-1}. 8.228. 1) $d/(1-q)$.

8.229. 1) $d/(1-q)$, если $|q| < 1$ или $q = -1$; ∞, если $|q| > 1$. 2) $a - \dfrac{d}{1-q}$, если $|q| < 1$; ∞, если $|q| \geqslant 1$.

8.230. $(\pi - \alpha)/3$. **8.231.** $\pi/3$. **8.232.** а) и б) $a/3$. **8.233.** $(1+\sqrt{1+4a})/2$. **8.234.** 1) Сходится. 2) Расходится. **8.235.** $q \in [0; 1/4]$. **8.236.** $\sqrt{a}$. **8.237.** 5. 8.239. 1) $(\sqrt{5}-1)/2$. 2) $(\sqrt{5}-1)/2$. **8.240.** 1) — 4) Сходится. **8.241.** $(b+\sqrt{b^2+4a})/2$. **8.242.** $1-\sqrt{1-a}$ при $-3 \leqslant a \leqslant 1$; 4 при $a = -8$. 8.243. 1) б) Сходится при $x_1 = 0$, $x_1 \in [1; 2]$; расходится при $x_1 < 0$, $x_1 > 2$. 8.244. 2) $\sqrt{ab}$.

8.245. 1) Сходится при $a = b$; расходится при $a \neq b$. 2) Сходится при $a = b$; расходится при $a \neq b$. 3) Сходится при $a = b = 0$; расходится при $a \neq 0$ или $b \neq 0$. 4) Сходится при $a = b = 0$; расходится при $a \neq 0$ или $b \neq 0$.

8.246. 1) 0. 2) 0. **8.247.** 1) 3. 2) 2. 3) 4. **8.248.** 1)—3) 0. **8.250.** 1) -1. 2) $+\infty$. 3) -1. 4) $+\infty$. **8.251.** 1. **8.252.** 1)—3) 1/2. **8.254.** 1) Сходится к $-1/2$. 2) Сходится к -2. **8.255.** Сходится к p, если $0 \leqslant p - a \leqslant 1$. **8.256.** 0 при $a = 0$ или $|b| < |c|$; $(b-c)/d$ при $|b| > |c|$. **8.257.** $(1+\sqrt{1+4b})/2$ при $a \neq (1-\sqrt{1+4b})/2$ и $a \neq 0$; a при $a = (1-\sqrt{1+4b})/2$. **8.258.** $+\infty$ при $a \geqslant 1$; $\sqrt{b/(1-a)}$ при $0 < a < 1$. **8.259.** 0. **8.260.** $x_2 = a(5-\sqrt{41})/4$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. **8.263.** 0. **8.269.** 1) $1/e$. 2) 0. 3) $4/e$. 4) 0. 5) $+\infty$. **8.272.** 1) $1/(p+1)$. 2) 1/2. **8.291.** 1) 1. 2) 0 при $\alpha > -1$; ∞ при $\alpha < -1$; не существует при $\alpha = -1$. 8.293. $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$, где $AM = \frac{2}{3}AC$. **8.296.** 1) ∞ при $\alpha \leqslant 1$; 0 при $\alpha > 1$. 2) 0. 3) $\sqrt{ab}$.

§ 9. Предел функции

9.1. 1) $\delta \leqslant \sqrt{4{,}001} - 2 \approx 0{,}00025$. 2) $\delta \leqslant 4/51$. 3) $\delta \leqslant \frac{\pi}{2} - \arcsin 0{,}99 \approx 0{,}14$. 4) δ не существует. **9.2.** 1) $\delta \leqslant 0{,}99$. 2) $\delta \leqslant 0{,}90$. 3) $\delta \leqslant 1 - \dfrac{1}{\sqrt[10]{10}} \approx 0{,}21$. 4) $\delta \leqslant 1 - \dfrac{1}{\sqrt[100]{10}} \approx 0{,}023$. **9.3.** $\delta \leqslant \varepsilon/3$. **9.4.** $\delta \leqslant \sqrt{9+\varepsilon} - 3$. **9.5.** Если $\varepsilon > 1$, то δ — любое число; если $\varepsilon \leqslant 1$, то $\delta \geqslant \sqrt{(1-\varepsilon)/\varepsilon}$. **9.6.** Если $\varepsilon \geqslant \pi$, то δ — любое число; если $\varepsilon < \pi$, то $\delta \leqslant -\operatorname{ctg}\varepsilon$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$.

9.9. Не следует.

9.17. 1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ (-\delta < x < 0 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$.
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ (|x| > \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon)$.
3) $\forall \varepsilon \exists \delta > 0\ \forall x\ (1 < x < 1 + \delta \Rightarrow f(x) < \varepsilon)$.
4) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \forall x\ (x < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon)$.
9.18. 1) $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x\ (-\delta < x < 0 \wedge |f(x)| \geqslant \varepsilon)$.
2) $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x\ (|x| > \delta \wedge |f(x) - 4| \geqslant \varepsilon)$.

3) $\exists\varepsilon\forall\delta>0\ \exists x\,(1<x<1+\delta\wedge f(x)\geqslant\varepsilon)$.
4) $\exists\varepsilon>0\ \forall\delta\exists x\,(x<\delta\wedge f(x)\leqslant\varepsilon)$.
9.19. 1) $\exists a\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\,(0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-a|<\varepsilon)$.
2) $\forall a\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x\,(0<|x-x_0|<\delta\wedge|f(x)-a|\geqslant\varepsilon)$.

9.20. 1) 7/3. 2) 3. 3) 1. 4) ∞. **9.21.** 1) 2. 2) 17/5. 3) 2. 4) 1/3. 5) 5050. 6) 64/105. 7) 1. 8) $-1/2$. 9) 1: **9.22.** 1) 3. 2) 49/16. 3) 8. 4) 0. 5) 3. 6) $-9/4$. **9.23.** 0, если $n<k$; a_0/b_0, если $n=k$; ∞, если $n>k$. **9.24.** 1) n/k. 2) $(n^2-2k+n)/2$. 3) C_n^k. 4) $(n-k)/2$. **9.25.** 1) 1/4. 2) 3. 3) 5/3. 4) 3/4. 5) 3. 6) $\sqrt{7}/4$. 7) 2. 8) 4/7. **9.26.** 1) 7. 2) 5. 3) $\sqrt{5}$. 4) 3. 5) -2. 6) 7/12. **9.27.** 1) 0. 2) 2. 3) 13/4. 4) 2. 5) 1/2. 6) $\sqrt{2}/8$. **9.28.** 1) k/n. 2) $2\sqrt{a}/na$. 3) $(ak-bn)/nk$. 4) $nk/(ka+nb)$. 5) $2n$. 6) $(n+1)/2$. **9.29.** 1) 3. 2) 4. 3) 1/5. 4) α/β. 5) -1. 6) 1/2. 7) $-9/128$. 8) $3\sqrt{3}$. 9) $\operatorname{tg}^4 1-1=-(\cos 2)/\cos^4 1$. **9.30.** 1) $-7/2$. 2) $1/2\pi$. 3) π. 4) 4. 5) 4. 6) 1. 7) 2. 8) 14. **9.31.** 1) $4\sqrt{2}$. 2) 13/6. 3) 1/3. 4) 3/2. 5) 1/24. 6) 0. **9.32.** 1) 2. 2) 10/37. 3) 2. 4) $-2/21$. **9.33.** 1) 0. 2) 0. 3) Не существует. 4) $1/e$. **9.34.** 1) $1/(10\ln 10)$. 2) -7. 3) $5/\ln 2$. 4) $-2/3$. 5) 8. 6) 25/16. 7) 1. 8) $-\pi^2/2$. **9.35.** 1) $(\ln 10)/\ln 2$. 2) $\ln 3$. 3) $\ln 4$. 4) 5. 5) 2. 6) 2. 7) 3/2. **9.36.** 1) e^8. 2) $1/\sqrt{e}$. 3) e^3. 4) e. 5) $\sqrt{e}$. 6) $1/\sqrt{e}$. 7) e^{-18}. 8) $e^{1/e}$, 9) e/π. 10) $\sqrt{e}$. **9.37.** 1) 1. 2) -4. 3) 25/2. 4) 2. 5) $\ln 2$. 6) $e^{3/2}$. **9.38.** 1) $a^{a^a}\ln a$. 2) $\ln(a/b)$. 3) $\sqrt{ab}$. 4) $a^{a/(a+b)}b^{b/(a+b)}$. **9.39.** 1) а) 1; б) 0. 2) а) Не существует; б) π. 3) а) 0; б) 0. 4) а) 0; б) $+\infty$. **9.40.** 1) а) 3/2; б) 1/4. 2) а) 1; б) -1. 3) а) $\pi/2$; б) $-\pi/2$. 4) а) 0; б) 1/3. **9.41.** 1) а) 1; б) $+\infty$. 2) а) 109; б) 110. 3) а) 0; б) 1. 4) а) 3; б) 2. **9.42.** 1) а) $-\pi/2$; б) $\pi/2$. 2) а) π; б) 0. 3) а) 0; б) $+\infty$. 4) а) $-\pi/2$; б) Не существует. 5) а) $+\infty$; б) 0. 6) а) $1/e$; б) e. 7) а) -4; б) 4. 8) а) 0; б) $\ln 4$. **9.43.** 1) -2. 2) $-1/2$. 3) 7/4. 4) $-\pi/6$. 5) 1/2. 6) 0. 7) 3. 8) 2. 9) $\sqrt{2}$. 10) $1/\sqrt{2\pi}$. **9.44.** 1); 2) а); 3); 4) а); 5). **9.45.** 1); 2) б); 3); 4) б); 5) б); 6) б). **9.46.** 1) $\alpha=1$, $\beta=-3$. 2) а) $\alpha=2$, $\beta=1/4$, б) $\alpha=-2$, $\beta=-1/4$. 3) $\alpha=-1$, $\beta=1/3$. 4) а) $\alpha=1$, $\beta=0$; б) $\alpha=\beta=0$. 5) а) $\alpha=1$, $\beta=5$; б) $\alpha=\beta=0$. 6) а) $\alpha=3$, $\beta=0$; б) $\alpha=\beta=0$. 7) а) $\alpha=\pi/2$, $\beta=-1$; б) $\alpha=-\pi/2$, $\beta=-1$. **9.47.** 1) $\alpha>0$, β — любое; $\alpha\leqslant 0$, $\beta<0$, $\alpha>\beta$. 2) $\alpha>\beta$. 3) $\alpha>0$, β — любое; $\alpha\leqslant 0$, $\beta<0$, $\alpha>\beta$. 4) $\alpha+\beta>0$. **9.48.** 1) $n=4$. 2) $n=2$. 3) $n=4$. 4) $n=3$. 5) $n=2$. 6) $n=2$. **9.49.** 1) $n=3$. 2) $n=2$. 3) $n=2$. 4) $n=1$. 5) $n=6$. 6) $n=3$. **9.50.** 1) а); 2) б); 3) а): 4) б). **9.52.** 1) б); 2) а); 2) б); 3); 4) а); 5). **9.53.** 1), 2), 3), 5), 6). **9.57.** 1) а) $\alpha=1$, $\beta=1/8$; б) $\alpha=\sqrt{2}$, $\beta=1/2$. 2) $\alpha=1/2$, $\beta=2$. 3) $\alpha=9/4$, $\beta=4$. 4) $\alpha=7$, $\beta=2$. 5) $\alpha=1/8$, $\beta=-4$. 6) $\alpha=1$, $\beta=-1$. **9.58.** 1) $-1/4$. 2) $-1/2$. 3) -2. 4) 2. 5) 7/3. 6) 12. **9.60.** 0 **9.61.** Не следует. Рассмотреть при $t\to 0$ функцию $f(g(t))$, где

$$f(x)=\begin{cases}1/q & \text{при } x=p/q, \text{ где } p \text{ и } q \text{ — взаимно простые числа},\\ 0 & \text{при } x \text{ иррациональном},\end{cases}$$

$$g(t)=\begin{cases}1 & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

9.64. $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. **9.65.** 1) e; $1/e$. 2) $+\infty$; 0. 3) π; 0. 4) $+\infty$; $-1/2$. **9.66.** 1) π; $-\pi/2$. 2) 3; -3. 3) 1; -1. 4) e; 2.

§ 10. Непрерывность функции

10.1. 1)

Δy	1,8	1	0,2	0,02
Δy	$-1,8$	-1	$-0,2$	$-0,02$

2)

Δy	2,61	1,25	0,21	0,0201
Δy	$-0,99$	$-0,75$	$-0,19$	$-0,0199$

3)

Δy*)	0,3784	0,2247	0,0488	0,0050
Δy	$-0,6838$	$-0,2929$	$-0,0513$	$-0,0050$

4)

Δy*)	$-0,4737$	$-0,(3)$	$-0,(09)$	$-0,(0099)$
Δy	9	1	0,(1)	0,(01)

10.2. 1)

δ	1	0,25	0,005	0,0005

2)

δ	0,732	0,224	0,0049	$49\cdot 10^{-5}$

3)

δ	1	0,75	0,0199	$1,999\cdot 10^{-3}$

4)

δ	2/3	1/3	1/101	1/1001

10.3. 1)

δ_{max}	0,25	0,25	0,25	0,25

2)

δ_{max}	1/2	1/4	1/6	1/8	$1/2l$

3)

δ_{max}	1/210	1/36	1/3	1	32/5

4)

δ_{max}	1/4	1/2	3/4	11/36	3/4	7/4

10.4. 1) $\delta(x_0)=x_0^2/(2+x_0)$. 2) $\delta(x_0)=\sqrt{x_0}+\dfrac{1}{4}$ при $0<x_0<1/4$, $\delta(x_0)=\sqrt{x_0}-1/4$ при $x_0\geqslant 1/4$. **10.11.** 1) $f(-1)=-2$. 2) $f(1)=3/2$. 3) $f(0)=1/2$. 4) $f(0)=1$. 5) $f(0)=1$. 6) $f(0)=1/2$. **10.15.** $f(x_0)=0$. **1018.** 1) $x=0$, $\Delta f(0)=2$; $x=2$, $\Delta f(2)=-10$. 2) $x=-2$, $\Delta f(-2)=2$. 3) $x=-2$, $x=2$ — точки разрыва II рода. 4) $x=0$ — точка разрыва II рода; $x=1$, $\Delta f(1)=-2$. 5) $x_n=n$, $\Delta f(n)=-1$, $n\in Z$. 6) $x_n=n$, $n\in Z$, — точки разрыва II рода. 7) $x=0$, $\Delta f(0)=0$; $x=1$ — точка разрыва II рода. 8) $x=-1$, $\Delta f(-1)=0$; $x=1$, $\Delta f(1)=-2$; $x=0$ — точка разрыва II рода. 9) $x_n=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$, — точки разрыва II рода. 10) $x=0$, $\Delta f(0)=0$, $x_n=\pi n$, $n\neq 0$, $n\in Z$, — точки разрыва II рода. **10.19.** 1) $a=0$. 2) $a=1/3$. 3) Не существует. 4) $a=-1$. **10.20.** 1) $a=2$, $b=-1$. 2) $a=1$, $b=-1$. 3) Не существуют. 4) $a=1$, $b=\pi/2$. **10.25.** 1) $f\circ g$ непрерывна; $g\circ f$ разрывна в точке $x=0$. 2) $f\circ g$ разрывна в точках $x=0$, $x=\pm 1$; $g\circ f$ непрерывна. 3) $f\circ g$ разрывна в точке $x=-1$; $g\circ f$ разрывна в точке $x=1$. 4) $f\circ g$ и $g\circ f$ непрерывны. **10.51.** 1) $y=\cos^2 x$, $x\in(-\pi/2;\ \pi/2)$.

*) Указаны приближенные значения Δy с погрешностью не более $5\cdot 10^{-5}$.

2) $x=\sqrt{1+y^2}$, $y\in\mathbb{R}$. 3) $y=-\ln(1-e^{-x})$, $x>0$, или $x=-\ln(1-e^{-y})$, $y>0$. **10.52.** $x_1(y)=-x_2(y)=\sqrt{y^2+1}$, $y\in\mathbb{R}$, $y_1(x)=-y_2(x)=\sqrt{x^2-1}$, $|x|\geqslant 1$, $y_3(x)=-y_4(x)=\sqrt{x^2-1}\operatorname{sign}x$, $|x|\geqslant 1$. **10.53.** 1)—5) не будет **10.56.** 1) $\{x\in\mathbb{R};\ x\neq 0\}$, $x=0$ — точка разрыва I рода. 2) $\{x\in\mathbb{R};\ x\neq 0,\ x\neq 2\}$, $x=0$, $x=2$ — точки разрыва I рода. 3) $\{x\in\mathbb{R};\ x\neq 0\}$, $x=0$ — точка разрыва II рода. 4) $\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq -1,\ x\neq 1\}$, $x=-1$ — точка разрыва I рода; $x=1$ — точка разрыва II рода. 5) $\{x\in[-1;\ 4];\ x\neq 1\}$, $x=1$ — точка разрыва I рода. 6) $\{x\in[-\pi/2;\ \pi]:\ x\neq\pi/4\}$, $x=\pi/4$ — точка разрыва I рода. **10.57.** 1) $x=-3$, $x=2$ — точки разрыва II рода. 2) $x=-1$, $x=0$, $x=4$ — точки разрыва II рода. 3) Точек разрыва нет. 4) $x=-1$ — точка устранимого разрыва; $f(-1)=1/3$. 5) $x=-1$ — точка разрыва II рода, $x=0$, $x=1$ — точки устранимого разрыва; $f(0)=-1$, $f(1)=0$. 6) $x=-2$ — точка разрыва II рода; $x=1/2$ — точка устранимого разрыва; $f(1/2)=2/5$. 7) $x=1$ — точка устранимого разрыва; $f(1)=-1/4$. **10.58.** 1) $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, — точки разрыва II рода. 2) $x=0$ — точка устранимого разрыва; $f(0)=0$. 3) $x=0$ — точка устранимого разрыва; $f(0)=1/2$. 4) $x=0$ — точка разрыва II рода; $x=1$ — точка устранимого разрыва; $f(1)=-\pi/2$. 5) $x=\pi/2+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, — точки разрыва II рода; $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, — точки устранимого разрыва; $f(\pi n)=(-1)^n 3/2$. **10.59.** 1) $x=0$ — точка разрыва II рода. 2) $x=1$ — точка разрыва II рода. 3) Точек разрыва нет. 4) $x=1$ — точка разрыва II рода. 5) $x=0$ — точка разрыва II рода. 6) $x=0$, $x=2$ — точки разрыва II рода; $x=1$ — точка устранимого разрыва; $f(1)=0$. 7) $x=-1$, $x=1$ — точки разрыва II рода. 8) $x=0$ — точка устранимого разрыва; $f(0)=0$. 9) $x=0$ — точка разрыва II рода. **10.60.** 1) $x=-1$, $x=3$ — точки разрыва I рода; $\Delta f(-1)=-2$, $\Delta f(3)=2$. 2) $x_n=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, — точки разрыва I рода; $\Delta f(x_n)=2(-1)^{n+1}$. 3) $x_n=n$, $n\in\mathbb{Z}$, — точки разрыва I рода: $\Delta f(x_n)=2(-1)^n$. 4) $x=0$ — точка разрыва II рода; $x_n=1/n$, $n\in\mathbb{Z}$, — точки разрыва I рода; $\Delta f(x_n)=2(-1)^{n-1}$. 5) Точек разрыва нет. 6) $x=0$ — точка разрыва I рода; $\Delta f(0)=\pi$. 7) $x=0$ — точка разрыва I рода; $\Delta f(0)=0$. 8) $x=0$ — точка разрыва I рода; $\Delta f(0)=4/\pi$. 9) $x=0$ — точка разрыва I рода; $\Delta f(0)=2$. 10) $x=1$ — точка разрыва I рода; $\Delta f(1)=-1$. 11) $x=0$ — точка разрыва I рода; $\Delta f(0)=2$. 12) $x=0$ — точка разрыва I рода; $\Delta f(0)=0$. **10.62.** 1) $a=\pi$. 2) $a=1/2$. 3) $a=-2$. 4) $a=1$. 5) $a=\ln c$. 6) $a=1/2$. 7) $a=1$. 8) $a=0$. 9) $a=0$. 10) $a=e$. **10.63.** 1) Нельзя. 2) Нельзя. 3) $y(0)=0$. 4) $y(1)=1/4$. 5) Нельзя. **10.64.** 1) Область определения $\mathbb{R}$, непрерывна на $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 1)$ и $(1;\ +\infty)$; $x=-1$, $x=1$ — точки разрыва I рода. 2) Область определения $x\neq -1$, непрерывна на $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 1)$ и $(1,\ +\infty)$; $x=-1$, $x=1$ — точки разрыва I рода. 3) Область определения $x\neq\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, периодична с периодом 2π, непрерывна на $(2\pi n;\ \pi+2\pi n)$ и $(\pi+2\pi n;\ 2\pi(n+1))$, $n\in\mathbb{Z}$; $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, — точки разрыва I рода. 4) Область определения $\mathbb{R}$, непрерывна на $\left(-\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ \dfrac{\pi}{6}+\pi n\right)$ и $\left(\dfrac{\pi}{6}+\pi n;\ \dfrac{5\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$; $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$, — точки разрыва I рода. 5) Область определения $\mathbb{R}$, непрерывна на $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$; $x=0$ — точка разрыва I рода. 6) Область определения $\mathbb{R}$, непрерывна на $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$; $x=0$ — точка разрыва II рода. 7) Область определения $\mathbb{R}$, непрерывна на $\mathbb{R}$. 8) Область определения $x\neq\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, непрерывна на $(\pi n;\ \pi/2+\pi n)$; $x=0$ — точка устранимого разрыва, $x=\pi n/2$, $n\neq 0$, $n\in\mathbb{Z}$, — точки разрыва I рода. 9) Область определения $\mathbb{R}$, непрерывна на $\mathbb{R}$. 10) Область определения $\mathbb{R}$, непрерывна на $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$; $x=0$ — точка разрыва I рода. **10.65.** $x=-1$, $x=1$. **10.67.** Непрерывна в каждой иррациональной точке, каждая рациональная точка — точка устранимого разрыва. **10.68.** $f\circ g$ непрерывна на $\mathbb{R}$; $g\circ f$ непрерывна в точке $x=1$; разрывна в остальных точках. **10.99.** 0,2.

10.109. 3) 8. 4) 2^n. **10.111.** 1) $f(x)=x$. 2) $f(x)=x/4$. 3) Если $\beta\neq-\alpha$, то

$$f(x)=\frac{a}{\alpha+\beta}x+\frac{b}{2},$$

если $\beta=-\alpha$, то решение существует только при $a=0$ и

$$f(x)=\varphi(x)+\frac{b}{2},$$

где $\varphi(x)$ — произвольная непрерывная, нечетная функция. 4) $f(x)=x+C$, $C\in\mathbb{R}$. 5) $f(x)=x$. 6) $f(x)=x+C$, $C\in\mathbb{R}$.

10.112. $f(x)=\dfrac{a}{A\alpha+B\beta}x+\dfrac{b}{A+B}+\varphi(x)$, где: если $|\alpha/\beta|=1$ или $|\alpha/\beta|<1$ и $|B/A|\geqslant 1$, то

$$\varphi(x)=0,\quad x\in\mathbb{R};$$

если $|\alpha/\beta|<1$ и $|B/A|<1$, то

$$\varphi(x)=x^q\psi_+(\ln x),\quad x>0,$$
$$\varphi(x)=|x|^q\psi_-(\ln|x|),\quad x<0,$$
$$\varphi(0)=0,$$

где $q=\log_{|\alpha/\beta|}|B/A|$, и если $\alpha/\beta>0$, то $\psi_\pm(t)$ — произвольные непрерывные на $\mathbb{R}$ функции, удовлетворяющие условию

$$\psi_\pm(t)=-\psi_\pm(t+\ln(\beta/\alpha))\operatorname{sign}AB,\ t\in\mathbb{R},$$

(периодичность при $AB<0$, антипериодичность при $AB>0$), а если $\alpha/\beta<0$, то $\psi_+(t)$ — произвольная непрерывная на $\mathbb{R}$, периодическая с периодом $2\ln\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|$ функция,

$$\psi_-(t)=-\psi_+\left(t+\ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\right)\operatorname{sign}(AB).$$

При $|\alpha/\beta|>1$ в приведенном ответе следует поменять местами α и β, A и B.

10.113. 1) $a>1/4$. 2) $a>1/4$. **10.114.** Если $a\neq 0$, то $(b-1)^2<4ac$; если $a=0$, то $b=1$. **10.115.** 1) $f(x)=ax$, $a\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$. **10.116.** $f(x)=e^{ax}$, $a\in\mathbb{R}$, и $f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$. **10.117.** 1) $f(x)=a\ln x$. 2) $f(x)=x^a$, $a\in\mathbb{R}$, и $f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$. **10.118.** 1) $f(x)=\cos ax$, $a\in\mathbb{R}$, и $f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$. 2) $f(x)=\operatorname{ch}ax$, $a\in\mathbb{R}$. **10.119.** $f(x)=\mathrm{const}$, $x\in\mathbb{R}$. **10.137.** $x=f(f(x))$. **10.139.** $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=-1$, $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=1$. **10.143.** 3) π. **10.144.** 1) 0. 2) $\pi/6$. 3) $\pi/3$. 4) 0. 5) 1. 6) 1. **10.146.** 0, если $a_1<a_2$; $e^{(b_1-b_2)/a_1}$, если $a_1=a_2$; $+\infty$, если $a_1>a_2$. **10.147.** 1) e^x. 2) $e^{\lambda x}$. 3) $\sqrt{ab}$. 4) $e^{k(k+1)a/2}$. 5) $\sqrt{e}$. 6) $(\sin x)/x$ при $x\neq 0$; 1 при $x=0$. 7) 1. 8) 0. 9) 0. 10) $e^{-x^2/2}$. **10.148** $\sqrt{2}$.

§ 11. Асимптоты и графики функций

11.1. 1) $x=1$, $x=-1$, $y=0$. 2) $x=0$, $x=-1$, $x=-2$, $y=0$. 3) $x=-2$, $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$, $x=2$, $y=0$. 4) $y=0$. 5) $y=1$. 6) $x=-2$, $y=1$. 7) $y=0$. 8) $y=0$. **11.2.** 1) $x=0$, $y=x$. 2) $y=x+1$. 3) $x=0$, $y=x+8$. 4) $x=-4$, $y=x-4$. 5) $y=-x-1$, $y=x-1$. 6) $x=0$, $y=2x+1$. 7) $x=-1$, $y=x-2$. 8) $x=-2$, $y=x-4$. 9) $x=b$, $x=2b$, $y=x-3(a-b)$. 10) $y=x$. **11.3.** 1) $y=-x$, $y=x$. 2) $y=-x-3/2$; $y=x+3/2$. 3) $y=x$. 4) $y=x+1/3$. 5) $x=2$, $y=-x-1$, $y=x+1$. 6) $x=-4$, $y=x-2$. 7) $y=x$. 8) $y=-2x$, $y=0$. 9) $y=-x$, $y=3x$. **11.4.** 1) $x=0$, $y=1$. 2) $y=0$. 3) $y=1$. 4) $x=0$, $y=0$. 5) $y=0$. 6) $x=0$, $y=1-x$. 7) $y=1-x$, $y=3-x$. 8) $x=0$, $y=3+x$. 9) $x=0$, $y=x$. 10) $y=1$. 11) $x=0$, $y=-x-1$,

$y=x+1$. **11.5.** 1) $y=e$. 2) $y=\dfrac{x}{e}-\dfrac{1}{2e}$. 3) $y=-1$, $y=1$. 4) $x=0$, $y=-1$, $y=1$. 5) $y=1$. 6) $y=-x$, $y=x$. 7) $x=0$, $y=2x-1$, $y=2x+1$. 8) $y=-x$, $y=x$. **11.6.** 1) $x=-2$, $x=2$. 2) $x=1/2$, $x=1$. 3) $x=\pi n/2$, $n\in Z$. 4) $x=0$, $y=x$. 5) $y=0$, $y=x$. 6) $x=-1/e$, $y=x\lg e+(\lg e)/e$. **11.7.** 1) $x=(3n+2)\pi/3$, $n\in Z$. 2) $x=\pi n/2$, $n\in Z$. 3) $x=0$, $y=0$. 4) $y=x$. 5) $y=1$. 6) $y=3$. 7) $y=\pi$, $y=0$. 8) $y=0$. 9) $y=0$. 10) $y=(x+\pi)/2$. 11) $y=(4x+\pi)/2$, $y=(4x-\pi)/2$. 12) $y=\pi x+1$, $y=1$. 13) $y=-(\pi x+2)/2$, $y=(\pi x-2)/2$. 14) $x=0$, $y=2/\pi$. **11.8.** 1) $y=-1$, $y=x-1$. 2) $y=x/2$. 3) $y=(1-x)/2$. 4) $x=-1$, $x=1$. 5) $x=-1$, $x=1$, $y=0$. 6) $y=(2x+\pi)/4$, $y=(2x-\pi)/4$.

11.10. Не может. **11.11.** 1) Область определения $0\leqslant x<1$; $y\sim x^{3/2}$ при $x\to+0$, $y\sim 1/\sqrt{1-x}$ при $x\to 1-0$; $x=1$ — асимптота. 2) Область определения $|x|\leqslant 2$; начало координат — центр симметрии графика, $y\sim 2x$ при $x\to 0$, $y\sim 4\sqrt{2-x}$ при $x\to 2-0$; максимум $y=y(\sqrt{2})=2$. 3) Область определения $|x|\leqslant 1$; ось ординат — ось симметрии графика, $y\sim x$ при $x\to+0$, $y\sim\sqrt{2}\sqrt{1-x}$ при $x\to 1-0$; максимум $y=y(1/\sqrt{2})=1/2$. 4) Область определения $|x|\leqslant 3$; ось ординат — ось симметрии графика, $y\sim\sqrt{3}x$ при $x\to+0$, $y\sim\sqrt[4]{54}\sqrt[4]{3-x}$ при $x\to 3-0$; максимум $y=y(3/\sqrt{2})=3/\sqrt{2}$. 5) Ось ординат — ось симметрии графика, $y\sim x^{2/3}$ при $x\to 0$; $y=1$ — асимптота при $x\to\pm\infty$. 6) Ось ординат — ось симметрии графика, $y\sim x/\sqrt[4]{3}$ при $x\to+0$; $y=1$ — асимптота при $x\to\pm\infty$. 7) Область определения $|x|>1$; начало координат — центр симметрии графика, $y\sim 1/(\sqrt{2}\sqrt{x-1})$ при $x\to 1+0$; $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$ — асимптоты графика. 8) Область определения $x<0$, $x\geqslant 1$, $y\sim 1/\sqrt{-x}$ при $x\to-0$, $y\sim\sqrt{x-1}$ при $x\to 1+0$; $x=0$ и $y=1$ — асимптоты. 9) Область определения $x\geqslant 0$; $y\sim-4\sqrt{x}$ при $x\to+0$, $y\sim x^{3/2}$ при $x\to+\infty$, $y\sim 2(x-4)$ при $x\to 4$; минимум $y=-16/(3\sqrt{3})$ при $x=4/3$ (для исследования можно сделать замену $x=\dfrac{16}{3}\cos^2 t$, $0\leqslant t\leqslant\pi/2$). **11.15.** 1) $g(x)$. 2) $f(x)$. 3) $g(x)$. 4) $f(x)$ и $g(x)$. **11.16.** $y=(a_{n+1}x+a_nb_n-a_{n+1}b_{n-1})b_n$. **11.17.** $y=0$ при $k<l$, $y=1$ при $k=l$, $y=x+(a_1-b_1)/n$ при $k=l+n$. **11.18.** 1) Сверху при $x\to+\infty$, снизу при $x\to-\infty$. 2) Сверху и при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$. 3) Сверху при $x\to+\infty$, снизу при $x\to-\infty$. 4) Сверху и при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$. 5) Сверху при $x\to+\infty$, снизу при $x\to-\infty$. 6) Снизу при $x\to+\infty$, сверху при $x\to-\infty$. **11.19.** 1) Асимптоты $x=\pm 1/2$, $y=1$; область определения $x\neq\pm 1/2$; ось симметрии — ось ординат; функция возрастает на $[0;\ 1/2)$ и $(1/2;\ +\infty)$; $y\sim 4x^2+2$ при $x\to 0$, $y\sim 1/(2(1-2x))$ при $x\to 1/2$. 2) Асимптоты $x=0$, $x=2$, $y=0$; область определения $x\neq 0$, $x\neq 2$; $(1;\ 0)$ — центр симметрии, функция убывает на $[1;\ 2)$, $(2;\ +\infty)$; $y\sim 1-x$ при $x\to 1$, $y\sim 1/(2(x-2))$ при $x\to 2$, $y\sim 1/2x$ при $x\to 0$. 3) Асимптоты $x=1$, $y=-1$; область определения $x\neq 1$; функция возрастает на $(-\infty;\ 1)$ и $(1;\ +\infty)$; $y\sim x^3$ при $x\to 0$, $y\sim 1/(3(1-x))$ при $x\to 1$. 4) Асимптоты $x=1$, $y=(x-5)/4$; область определения $x\neq 1$; $(1;\ -1)$ — центр симметрии; функция убывает на $(1;\ 3]$, возрастает на $[3;\ +\infty)$; $y\sim 1/(x-1)$ при $x\to 1$, $y\sim(x-3)^2/8$ при $x\to 3$, $y\sim-2-(x+1)^2/8$ при $x\to-1$. 5) Асимптота $y=x$; $(0;\ 0)$ — центр симметрии; функция возрастает на $\mathbb{R}$, $y\sim x^3$ при $x\to 0$. 6) Асимптоты $x=2$, $y=1$; область определения $x\neq 2$; функция убывает на $(-\infty;\ -2)$ и $(-2;\ +\infty)$; $y\sim-\sqrt[5]{x/2}$ при $x\to 0$, $y\sim\sqrt[5]{2/(x-2)}$ при $x\to 2$. 7) Асимптота $y=-x$; ось симметрии — прямая $y=x$; функция убывает на $\mathbb{R}$; $y\sim 1-x^3/3$ при $x\to 0$, $y\sim\sqrt[3]{3(1-x)}$ при $x\to 1$. 8) Асимптоты $x=1$, $x=-1$; $y=x$ при $x\to+\infty$ и $y=-x$ при $x\to-\infty$; область определения $x\neq\pm 1$; ось симметрии — ось ординат; функция возрастает на $[0;\ 1)$ и $[\sqrt{2};\ +\infty)$, убывает на $(1;\ \sqrt{2}]$; $y\sim x^2$ при $x\to 0$, $y\sim 1/\sqrt{2|x-1|}$

при $x\to 1$, $y\sim 2+2(x-\sqrt{2})^2$ при $x\to\sqrt{2}$. 9) Асимптоты $y=1-2x$ при $x\to+\infty$ и $y=1+2x$ при $x\to-\infty$; ось симметрии — ось ординат; функция убывает на $[0;\ +\infty)$; $y\sim-2x^2$ при $x\to 0$. 10) Асимптоты $y=x$ при $x\to+\infty$ и $y=-x-4$ при $x\to-\infty$; ось симметрии — прямая $x=-2$; функция возрастает на $[-2;\ +\infty)$; $y\sim-1+(x+2)^2/2$ при $x\to-2$. 11) Асимптота $y=x-1/3$; функция возрастает на $(-\infty;\ 0]$ и $[2/3;\ +\infty)$, убывает на $[0;\ 2/3]$; $y\sim-x^{2/3}$ при $x\to 0$, $y\sim\sqrt[3]{x-1}$ при $x\to 1$, $y\sim-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}-3\sqrt[3]{4}(x-2/3)^2/4$ при $x\to 2/3$. **11.20.** 1) Асимптоты $x=-3$, $y=1$; область определения $x\neq-3$; функция убывает на $(-\infty;\ -3)$ и $(-3;\ +\infty)$. 2) Асимптоты $x=-2$ и $x=2$; область определения $|x|<2$; ось симметрии — ось ординат; функция убывает на $[0;\ 2)$, $y\sim\ln 4-x^2/4$ при $x\to 0$. 3) Асимптоты $x=0$, $y=0$, $y=1$; функция убывает на $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$. 4) Асимптоты $x=3-\sqrt{3}$, $x=3+\sqrt{3}$, $y=0$; область определения $|x-3|>\sqrt{2}$, $x\neq 3\pm\sqrt{3}$; ось симметрии — прямая $x=3$; функция убывает на $(3+\sqrt{2};\ 3+\sqrt{3})$ и на $(3+\sqrt{3};\ +\infty)$. 5) Асимптоты $y=0$ при $x\to-\infty$, $y=x+\ln 2$ при $x\to+\infty$; функция возрастает на $\mathbb{R}$. 6) Асимптоты $x=\pi(1+2n)/2$, $n\in Z$; функция периодична с периодом 2π; функция определена на $(-\pi/2;\ \pi/2)$; ось симметрии — ось ординат, функция убывает на $[0;\ \pi/2)$. 7) Асимптоты $x=0$, $y=\ln(\pi/2)$; область определения $x>0$; функция возрастает на $(0;\ +\infty)$. 8) Асимптоты $x=\pi n$, $n\in Z$; функция периодична с периодом 2π; область определения $x\neq\pi n$, $n\in Z$; оси симметрии — прямые $x=\pi(1+2n)/2$, $n\in Z$; функция убывает на $\left[-\dfrac{\pi}{2};\ 0\right)$ и $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

11.21. 1) Асимптота $y=x$; область определения $x\neq 0$. 2) Асимптота $y=x$; область определения $x\neq 0$; центр симметрии — начало координат. 3) Асимптота $y=2x+4$; область определения $x\neq 0$. 4) Асимптоты $y=(2x-\pi)/2$ при $x\to-\infty$, $y=(2x+\pi)/2$ при $x\to+\infty$; функция возрастает на $\mathbb{R}$; $y\sim 2x$ при $x\to 0$. 5) Асимптоты $y=\pi x+\pi+1$ при $x\to-\infty$, $y=1$ при $x\to+\infty$. 6) Асимптота $y=(\pi x-2)/2$ при $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$; область определения $|x|\geqslant 1$. 7) Асимптоты $y=(6x-\pi)/2$ при $x\to-\infty$, $y=(6x+\pi)/2$ при $x\to+\infty$; центр симметрии — начало координат, функция возрастает на $\mathbb{R}$. 8) Асимптота $y=-x$; область определения $x\neq 0$, центр симметрии — начало координат, функция убывает на $(0;\ +\infty)$, $y\sim(\pi-4x)/2$ при $x\to+0$. 9) Асимптота $y=x$ при $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$; область определения $x\neq 0$, центр симметрии — начало координат; функция возрастает на $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$; $y\sim 0{,}5\pi x^2\operatorname{sign}x$ при $x\to 0$. **11.22.** 1) Асимптота $y=0$; область определения $x<0$, $x\geqslant 1$. 2) Асимптоты $y=0$, $x=1$; область определения $x\neq 0$, $x\neq 1$; $y\sim 1/(x-1)$ при $x\to 0$. 3) Асимптота $y=x$. 4) Асимптота $y=0$; ось симметрии — ось ординат. **11.23.** 1) $y=-x-a$. 2) $x=2$, $y=3(2x+3)/40$, $y=-(2x+1)/8$. 3) $y=-a$, $y=x+a/3$. 4) $y=x-2$. 5) $y=-x+a$. 6) Нет асимптот. 7) $y=x+6\pi$ при $x\to-\infty$, $y=x$ при $x\to+\infty$. 8) Нет асимптот. 9) $x=0$ при $y\to-\infty$, $y=0$ при $x\to+\infty$. 10) $y=x+1$ при $x\to+\infty$. 11) $y=(x+2e)/2$, при $x\to+\infty$. 12) $y=2x$ при $x\to+\infty$. **11.24.** 1) $x=-1$, $y=0$. 2) $y=-(x+1)/2$, $y=(x-1)/2$. 3) $y=-bx/a$, $y=bx/a$ при $x\to+\infty$. 4) $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$. 5) $x=-1$, $x=1$, $y=x/2$, $y=-x/2$. 6) $x=0$, $x=1/2$. 7) $x=1$. 8) $x=-1/2$, $y=0$, $y=(2x-3)/4$. **11.25** 1) $\varphi=\pi k/4$ ($k=0,1,2,4,5,6$). 2) $\varphi=\pi k/4$ ($k=0,1,2,3,4,5,6,7$). 3) $r=2a/\cos\varphi$. 4) $r=-1\Big/\left(\sqrt{2}\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$, $r=1\Big/\left(\sqrt{2}\sin\left(\varphi-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$. 5) $r=3\Big/\left(\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$. 6) $r=-1/(4\sqrt{5}\sin(\varphi-\varphi_0))$, где $\varphi_0=\operatorname{arctg}(1/2)$. **11.26.** 1) $r=\pi/\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right)$. 2) $\varphi=0$. 3) $r=1/\sin(\varphi-1)$.

4) $r=1/\sin\varphi$. 5) $r=2/\cos\varphi$, $r=-2/\cos\varphi$. 6) $r=\dfrac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin(\varphi-\arccos(1/\varepsilon))}$, $r=-\dfrac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin(\varphi+\arccos(1/\varepsilon))}$. 7) См. 6). 8) $r=2/\cos\varphi$, $r=-2/\cos\varphi$. 9) $r=1/\sin\varphi$, $r=-1/\sin\varphi$, $r=1/\cos\varphi$, $r=-1/\cos\varphi$. 10) $r=\dfrac{a}{3\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)}$, $r=\dfrac{a}{3\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)}$, $r=-\dfrac{a}{3\cos\varphi}$. 11) $\varphi=(\pi+2\pi k)/6$, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$. 12) $r=\dfrac{a\operatorname{th}1}{\sin(\varphi-1)}$. 13) $r=2R/\cos\varphi$. 14) $r=2a/\cos\varphi$. 15) $r=-a/\cos\varphi$. 16) $\varphi=(\pi+2\pi n)/4$ $(n=0, 1, 2, 3)$. 17) $r=\sqrt{2}/\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$, $r=-\sqrt{2}/\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$. 18) $\varphi=(\pi+2\pi n)/4$ $(n=0, 1, 2, 3)$. **11.27.** 1) $y=0$, $x=0$. 2) $y=0$, $x=0$. 3) $y=-1$, $y=1$, $x=1$, $x=2$. 4) $y=0$, $x=0$, $y=-x$. 5) $y=x+2$. 6) $x=a$. 7) $y=x/\sqrt{3}$, $y=-x/\sqrt{3}$, $x=0$. 8) $y=x$, $y=-x$. 9) $y=x$, $y=-x$. 10) $y=0$, $x=0$, $y=x$. 11) $y=-1$, $x=2$, $y=-x-1$. 12) $x=1$, $x=-1$, $y=x$, $y=-x$. 13) $y=x$. 14) $y=x-1$, $y=-x-1$. 15) $y=\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{8}$, $y=-\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{8}$. 16) $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}-\dfrac{2a}{3\sqrt{3}}$, $y=-\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{2a}{3\sqrt{3}}$, $x=-\dfrac{a}{3}$. 17) $y=1$, $x=1$, $y=x$. **11.29.** 1) $y=4x/3$, $y=-4x/3$. 2) $y=-1$, $y=-2x-1$. 3) $y=2x-1$, $y=\dfrac{1}{2}x+1$. 4) $x=3$, $x=-3$, $y=2$, $y=-2$. 5) $y=-x$. 6) $y=x$, $y=-x$. 7) $x=4$. 8) $y=2\sqrt{2}x$, $y=-2\sqrt{2}x$. 9) $y=2$, $y=-2$. 10) $x=0$, $y=0$, $y=x$, $y=-x$. 11) $y=-x+1$, $y=-x-1$. 12) $y=1$.

§ 12. Равномерная непрерывность функций

12.3. Равномерно непрерывными являются функции: 1) 2), 3), 6), 7), 8), 9). **12.4.** Равномерно непрерывными являются функции: 1), 3), 4), 6), 7). **12.10.** 1) $\omega(\delta)=2\delta$. 2) $\omega(\delta)=\delta$. 3) Если $0<\delta\leqslant 1$ или $2\leqslant\delta\leqslant 4$, то $\omega(\delta)=\delta$; если $1<\delta<2$, то $\omega(\delta)=1$; если $\delta>4$, то $\omega(\delta)=4$. 4) Если $0<\delta\leqslant 2a$, то $\omega(\delta)=\delta/a$; если $2a<\delta$, то $\omega(\delta)=2$. 5) $\omega(\delta)=\delta(\delta^2-3\delta+3)$. 6) $\omega(\delta)=-E(-\delta)$. **12.11.** 1) $\omega(\delta)=2\delta$. 2) Если $\delta\geqslant a$, то $\omega(\delta)=a^2$; если $0<\delta<a$, то $\omega(\delta)=\delta(2a-\delta)$. 3) $\omega(\delta)=\delta/a(a+\delta)$. 4) Если $\delta\geqslant\pi$, то $\omega(\delta)=2$; если $\delta<\pi$, то $\omega(\delta)=2\sin(\delta/2)$. 5) $\omega(\delta)=\ln(1+\delta)$. **12.30.** 1) Например, $y=-(9{,}1x+3{,}1)/6$, если $-1\leqslant x\leqslant -0{,}4$; $y=0{,}09$, если $|x|<0{,}4$; $y=(9{,}1x-3{,}1)/6$, если $0{,}4\leqslant x\leqslant 1$. 2) Например, $y=2{,}45-1{,}5x$, если $2/3\leqslant x\leqslant 1$; $y=1{,}45-0{,}5x$, если $1\leqslant x\leqslant 2$. **12.31.** Например, $y=(8-3x)/8$, если $0\leqslant x\leqslant 2$; $y=(100-x)/392$, если $2\leqslant x\leqslant 100$. **12.34.** 1) $f(x)=-1+|x+3|-|x+1|+|x-1|$. 2) $f(x)=\dfrac{3}{2}+|x+2|-\dfrac{3}{2}|x|+|x-1|-\dfrac{1}{2}|x-3|$. 3) $f(x)=-\dfrac{11}{2}+\dfrac{7}{4}|x-1|-\dfrac{15}{4}|x-3|+4|x-4|$.

Глава III. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 13. Производная. Формулы и правила вычисления производных. Дифференциал функции

13.1. 1) 0,2. 2) 0. 3) 1. 4) -1. **13.2.** 1) $3x^2+2x$, $x\in\mathbb{R}$. 2) $-1/x^2$, $x\neq 0$. 3) $1/(2\sqrt{x})$, $x>0$. 4) $\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$, $x\in\mathbb{R}$. 5) $-2x/(1+x^2)^2$, $x\in\mathbb{R}$. 6) $2^{x+1}\ln 2$,

$x\in\mathbb{R}$. 7) $1/x$, $x>0$. 8) $2\cos 2x$, $x\in\mathbb{R}$. 9) $-1/\sin^2 x$, $x\neq\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 10) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$. 11) $-3/\sqrt{1-9x^2}$, $|x|<1/3$. 12) $7/(x^2+2x+2)$, $x\in\mathbb{R}$. **13.3.** $3x^2+2x+1$, $x\in\mathbb{R}$. **13.4.** $3ax^2+2bx+c$, $x\in\mathbb{R}$. **13.5.** $91(x^{12}-x^{-8})$, $x\neq 0$. **13.6.** $-\ln 3/x^2$, $x\neq 0$. **13.7.** $-2ax^{-3}-3bx^{-4}-4cx^{-5}$, $x\neq 0$. **13.8.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, $x>0$. **13.9.** $\sqrt[3]{x^2}-2x^{-3}-2x^{-2}$, $x\neq 0$.

13.10. $(11x^2\sqrt[3]{x^2}+22x^6\sqrt[3]{x})/3$, $x\in\mathbb{R}$.

13.11. $\sqrt{5}\left(x^{\sqrt{5}}+x^{-\sqrt{5}}\right)/x$, $x>0$. **13.12.** $(ad-bc)/(cx+d)^2$, $x\neq -d/c$.

13.13. $\dfrac{6x^2+2x-41}{(x^2+x+7)^2}$, $x\in\mathbb{R}$. **13.14.** $\dfrac{6-\sqrt[3]{x^2}}{6\sqrt{x}\,(2+\sqrt[3]{x^2})^2}$, $x>0$.

13.15. $5(\cos x-x\sin x)$, $x\in\mathbb{R}$. **13.16.** $\operatorname{tg}x+\dfrac{x+1}{\cos^2 x}$, $x\neq\dfrac{\pi}{2}(2k+1)$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.17.** $2x\operatorname{ctg}x-\dfrac{x^2}{\sin^2 x}$, $x\neq\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.18. $\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$, если $x\neq 0$; $y'(0)=0$.

13.19. $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{x}\sin x}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sin^2 x}$, $x>0$, $x\neq\pi k$, $k\in\mathbb{N}$.

13.20. $2(\cos x-\sin x)^{-2}$, $x\neq\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.21.** 1. **13.22.** $\arcsin x+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$. **13.23.** $\dfrac{2\operatorname{arctg}x}{1+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

13.24. $-\dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}$, $|x|<1$, $x\neq 0$. **13.25.** $(3/x)+(3/x)^2+(3/x)^3$, $x>0$.

13.26. $\dfrac{\ln 2}{2}(\sqrt{2})^x-\dfrac{\ln 5}{2}(\sqrt{5})^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$. **13.27.** $(x^2-5x+1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

13.28. $\left(\ln 2\cdot\ln|x|+\dfrac{1}{x}\right)2^x$, $x\neq 0$. **13.29.** $\left(\log_2 x+\dfrac{1}{x\ln 2}\right)e^x$, $x>0$.

13.30. $\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\ln x\log_3 x}{\ln 2}+\log_2 x\log_3 x+\dfrac{\ln x\log_2 x}{\ln 3}\right)$, $x>0$.

13.31. $-\dfrac{1}{x\ln x\log_2 x}$, $x>0$, $x\neq 1$. **13.32.** $\dfrac{\ln x-1}{\ln x\cdot\log_2 x}$, $x>0$, $x\neq 1$.

13.33. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\arcsin x\right)e^{-x}$, $|x|<1$.

13.34. $(a^2+b^2)e^{ax}\sin bx$, $x\in\mathbb{R}$. **13.35.** $\operatorname{ch}2x$, $x\in\mathbb{R}$. **13.36.** 0.

13.37. $\dfrac{1-3\operatorname{th}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}$, $x\in\mathbb{R}$. **13.38.** $\dfrac{1}{x\operatorname{cth}x}+\dfrac{\ln x}{\operatorname{ch}^2 x}$, $x>0$. **13.39.** 2. **13.40.** $(a-b)(a-c)$. **13.41.** $1/(a-b)$. **13.42.** $ab(a+b+2)$. **13.43.** $y'(0)=-1985!$, $y'(1985)=1985!$. **13.44.** 0. **13.45.** 1. **13.46.** $a+d$. **13.47.** $\pi/2$. **13.48.** 1. **13.49.** e. **13.50.** 0. **13.51.** $(3e^2+e^{-2})/2$. **13.52.** $30(3x-7)^9$. **13.53.** $x^2/(1-x)^{100}$. **13.54.** $\alpha b(a+bx)^{\alpha-1}$.

13.55. $-0{,}64(2\cos(8x+5)-3\sin 0{,}8x)(2\sin(8x+5)+0{,}3\cos 0{,}8x)$. **13.56.** $\sin x\sin(x+3)$. **13.57.** $\alpha(a\cos x+b\sin x)^{\alpha-1}(-a\sin x+b\cos x)$.

13.58. $Ae^{-k^2x}(\omega\cos(\omega x+\alpha)-k^2\sin(\omega x+\alpha))$.

13.59. $\dfrac{6(x-1)}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{11}$.

13.60. $\dfrac{1+4\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{2x^2+\sqrt{x^2+1}}}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

13.61. $\frac{14}{65\sqrt[5]{(2x)^4}\sqrt[13]{\left(9+7\sqrt[5]{2x}\right)^{12}}}$.

13.62. $\frac{2x^2}{x^6-1}\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$.

13.63. $\frac{ad-bc}{n(ax+b)(cx+d)}\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

13.64. $-2x/\sqrt{(1+x^4)^3}$. 13.65. 0, $x\neq 0$. 13.66. $-1/(4\sqrt[4]{x^3})$, $x\neq a$.

13.67. $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$. 13.68. $-2\left(\frac{x}{\sin^2 x^2}+\frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\cos^2 2x}\right)$. 13.69. $-4\cos 8x$, $x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k$, $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $x\neq\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$. 13.70. $-xe^{-x^2/2}$.

13.71. $2\ln 2\cdot\cos 2x\cdot 2^{\sin 2x}$.

13.72. $5/(x^4+13x^2+36)$. 13.73. $-\cos 2x$.

13.74. $\frac{x^4-1}{x^3\cos^2(x^2+x^{-2})\sqrt{1+\operatorname{tg}(x^2+x^{-2})}}$.

13.75. $\frac{2x\operatorname{arctg}x^2}{\sqrt{(1+x^4)^3}}$. 13.76. $\frac{1}{x\ln(x/2)}$, $x>2$. 13.77. $\frac{12}{\ln 2}\frac{\log_2^2(2x+3)}{2x+3}$.

13.78. $\operatorname{ctg}x$. 13.79. $\frac{\cos\ln|x|}{x}$. 13.80. $\frac{\sin(1/\log_2 x)}{\left(x\log_2^2 x\right)\ln 2}$.

13.81. $\frac{2\ln 3}{1+(2x+\pi)^2}3^{\operatorname{arctg}(2x+3)}$.

13.82. $-\frac{2^x\ln 2}{2^{2x}+1}$. 13.83. $\frac{(\ln x-1)\ln 10}{\ln x\cdot\log_3 x}10^{x/\log_3 x}$. 13.84. $1/(2x^2-5x+7)$.

13.85. $(x^2+1)/(x^4+1)$. 13.86. $\operatorname{sh}x/(2\sqrt{\operatorname{ch}x})$. 13.87. $1/\operatorname{ch}2x$. 13.88. $1/(1-\operatorname{sh}^4 x)$.

13.89. $-\sin 2x\cdot\cos(\cos 2x)$.

13.90. $4\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}x^2}\left(\frac{1}{\sin 2x}-\frac{1}{\sin 2x^2}\right)$. 13.91. $\sin x\cdot\ln\operatorname{tg}x$. 13.92. $\cos\ln x$.

13.93. $-n\cos^{n-1}x\cdot\sin(n+1)x$. 13.94. $2x/((1+x^2)^2(1+x^4))$. 13.95. $2x/\sqrt{x^4+1}$.
13.96. $2\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$. 13.97. 1, $|x|<1$. 13.98. $4x$, $|x|<1$. 13.99. $12x^2-3$, $|x|<1$. 13.100. $\cos x/\sqrt{2+\cos 2x}$. 13.101. $-2n|x|^n/\left(x\left(x^{2n}+1\right)\right)$.
13.102. $1/(x^2+5x+6)^2$. 13.103. $2/(2-3x^2)$. 13.104. $20/(x^4+x^2-6)$.
13.105. $2(\ln 2)x\cos x^2\cdot 2^{\sin x^2}$. 13.106. $-(\ln 3)\sin 2x\cdot 3^{\cos^2 x}$.

13.107. $-\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}e^{\sqrt{(1-x)/(1+x)}}$.

13.108. $\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$. 13.109. $\frac{1}{(\ln 2)x\ln x\ln\log_5 x}$, $x>5$.

13.110. $2/(x(\ln x^2)\ln\ln x^2)$, $x>e$. 13.111. $\sqrt{x^2+1}/x$. 13.112. $\sqrt{x^5/(1+x^7)}$, $x>0$.
13.113. $2\operatorname{tg}^3 x$. 13.114. $-\sqrt{2}\sin x/\sqrt{\cos 2x}$.

13.115. $\frac{(2x+1)e^{\sqrt{\ln(x^2+x+1)}}}{2(x^2+x+1)\sqrt{\ln(x^2+x+1)}}$. 13.116. $-1/\cos x$.

13.117. $-xe^{2x}/\sqrt{(e^{2x}-1)^3}$. 13.118. $-4x/\operatorname{sh}^3 x^2$. 13.119. $\cos x/\cos\sin x$.
13.120. $-4x^3(\cos x^4+\sin x^4)/\sqrt{\sin 2x^4}$. 13.121. $4\operatorname{ctg}x/(\sin^4 x+1)^2$.
13.122. $2\sqrt{6}\sin x/(3-2\cos^2 x)$. 13.123. $1/(a+b\cos x)$.

13.124. $(2+\operatorname{ch}x)/(1+2\operatorname{ch}x)$. 13.125. $\frac{1}{2}\frac{e^{x/2}-1}{e^x+1}$.

13.126. $\frac{\cos x-\cos\alpha}{|\cos x-\cos\alpha|}\cdot\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha\cdot\cos x}$.

13.127. $\frac{2\sin\alpha}{(1-x^2)(1-x^2\cos^2\alpha)}$, $|x|<1$.

13.128. $\frac{x}{x^2-2x\cos\alpha+1}$. 13.129. $4x\sqrt{a^2+x^4}$. 13.130. $\frac{2}{1-\operatorname{sh}^4 x}$.

13.131. $\frac{2(a^2+b^2)x}{(x^2+a)(x^4+b^2)}$. 13.132. $2\sqrt{a^2-x^2}$.

13.133. $-\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}$. 13.134. $-\frac{\operatorname{arcctg}e^x}{e^x}$.

13.135. $-\frac{2\sqrt[3]{x}}{1-x^2}$. 13.136. $\frac{\sqrt{8x^4+8}}{x^4-1}$.

13.137. $\frac{5x^2}{2x^4+6x^3+9x^2+6x+2}$. 13.138. $3\cdot\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$.

13.139. $\frac{\sin^2 x\cdot\cos x}{\sqrt{\cos^2 x-2\sin x}}$. 13.140. $e^x\cdot\arcsin\sqrt{e^x/(1+e^x)}$.

13.141. $x^x(1+\ln x)$. 13.142. 0, $x>0$, $x\neq 1$. 13.143. $-\frac{1}{x\ln x\log_7 x}$.

13.144. $1/x$, $x>0$, $x\neq 1$. 13.145. $2e(x-e)$, $x>0$, $x\neq 1$. 13.146. $x^{1+x^2}(1+2\ln x)$.

13.147. $e^x\cdot x^{e^x}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$. 13.148. $(\ln 2)2^{x^x}\cdot x^x(1+\ln x)$.

13.149. $x^{x^x}\cdot x^{x-1}(x\ln^2 x+x\ln x+1)$.

13.150. $|\sin x|^{\cos x}(\cos x\cdot\operatorname{ctg}x-\sin x\ln|\sin x|)$.

13.151. $(\arcsin\sin^2 x)^{\operatorname{arctg}x}\left(\frac{\ln\arcsin\sin^2 x}{1+x^2}+\frac{\sin 2x\cdot\operatorname{arctg}x}{\arcsin\sin^2 x\sqrt{1-\sin^4 x}}\right)$.

13.152. $(\operatorname{ch}x)^{e^x}\cdot e^x(\ln\operatorname{ch}x+\operatorname{th}x)$.

13.153. $y'(0)=2$, $y'(1)=-2$. 13.154. $\sqrt[6]{72}$. 13.155. $-\pi^2\ln 2$. 13.156. $-2\sqrt{3}$. 13.157. $2/\ln 2$. 13.158. $2/e$. 13.159. 0. 13.160. $y'(0)=2$, $y'(2)=-2/5$. 13.161. $y'(-1)=1$, $y'(1)=-1$, $y'(0)$ не существует. 13.162. 6. 13.163. 0. 13.164. 0. 13.165. $2\ln 2$. 13.166. $-(\pi/2)^{-\pi/2}(1+\ln(\pi/2))$.
13.167. 1) 1; 3. 2) 7/11. 3) $\pi n/2$, $n\in Z$. 4) 1; 2; $\left(5\pm\sqrt{13}\right)/6$. 5) 0. 6) 7/12.

13.168. 1) $f'(x)/\left(2\sqrt{f(x)}\right)$. 2) $f'(x)/f(x)$. 3) $3x^2f'(x^3)$. 4) $\frac{f'(\arcsin f(x))\cdot f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$.

13.169. 1) $\frac{2}{n}\cdot\frac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt[n]{(f^2(x)+g^2(x))^{n-1}}}$. 2) $\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{f(x)g(x)}$.

3) $\sin 2x\,(f'(\sin^2 x)-g'(\cos^2 x))$. 4) $\left(g'(x)\ln f(x)+\frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)(f(x))^{g(x)}$.

13.171. 1) $6x-3$. 2) $3x^2-30x-18$. 3) $6x^2$. 13.173. 1) $\alpha>0$. 2) $\alpha>1$. 3) $\alpha>2$. 13.174. 1) $\alpha>0$, β произвольно. 2) $\alpha>1$, β произвольно. 3) $\alpha>1$, $\beta<\alpha-1$. 13.176. 1) а) $\alpha+\beta=1$; б) $\alpha=2$, $\beta=-1$. 2) а) $\alpha+\beta=1$; б) $\alpha=3/2$, $\beta=-1/2$. 3) а) $4\alpha+\beta=1/12$; б) $\alpha=-\left(\pi+2\sqrt{3}\right)/96\pi$, $\beta=\left(3\pi+2\sqrt{3}\right)/24\pi$. 4) а) α, β — произвольные числа; б) $\alpha=5/2$, $\beta=9/5$.

13.177. 1) $\alpha=1$, $\beta=1/2$. 2) $\alpha=\beta$. 13.178. 1) $\alpha=1$, $\beta=\pi/4$. 2) $\alpha=1$, $\beta=(\pi-4)/4$.

13.179. 1) Дифференцируема всюду, кроме точки $x=-2$. 2) Дифференцируема всюду, кроме точек $x=\pi k$, k — целое. 3) Дифференцируема всюду. 4) Дифференцируема всюду. 5) Дифференцируема всюду, кроме точек $x=\pi k$, k — целое. 6) Дифференцируема всюду. 7) Дифференцируема всюду, кроме точек $x=2/(2k+1)$, k — целое. 8) Нигде не дифференцируема.

13.180. 1) Дифференцируема в точке $x=0$; причем $y'(0)=0$. 2) $y'(1)=2$, $y'(-1)=-2$. 13.181. Утверждение неверно. См., например задачу 13.179 7) и 8). 13.182. 1) Утверждение верно. 2) Неверно (контрпример: $f=|x|$, $g=-|x|$, $x=0$). 3) Неверно (контрпример: $f\equiv 0$, $g=|x|$, $x=0$). 4) Неверно (контрпример: $f = |x|$, $g = |x|$, $x = 0$). **13.187.** 1) Утверждение неверно (контрпример: $y = x^2$, $x \in (-1;\ 1)$). 2) Неверно (контрпример: $y = x + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$). 3) Неверно (контрпример: $y = x$, $x \in \mathbb{R}$). 4) Утверждение верно. **13.188.** 1) Утверждение верно. 2) Неверно (контрпример: $y = x + 1$). 3) Верно. 4) Верно. **13.189.** Утверждение верно. Обратное утверждение неверно (контрпример: функция задачи 13.179, 8), x_0 произвольно). **13.190.** 1) Утверждение неверно (контрпример: $y = \sqrt{x}$, $x \in (0;\ 1)$). 2) Неверно $\left(\text{контрпример: } y = \frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x},\ x \in (0;\ 1)\right)$. 3) Неверно $\left(\text{контрпример: } y = \frac{\cos x^2}{x},\ x \in (1;\ +\infty)\right)$. 4) Неверно (контрпример: $y = \sin\ln x$, $x \in (2;\ +\infty)$).

13.191. 1) $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$. 2) $f'_-(2) = f'_-(3) = -1$, $f'_+(2) = f'_+(3) = 1$. 3) $f'_+(1) = \ln 4$, $f'_-(1) = -\ln 4$. 4) $f'(2k) = +\infty$, $f'(2k-1) = -\infty$. 5) $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$, $f'_-(\sqrt{\pi}) = -\infty$, $f'_+(\sqrt{\pi})$ не существует. 6) $f'_-(2\pi k) = f'_+\left(\frac{4k-1}{2}\pi\right) = f'_-((2k+1)\pi) = f'_+\left(\frac{4k+1}{2}\pi\right) = 0$, $f'_+(2\pi k) = f'_-\left(\frac{4k-1}{2}\pi\right) = 2$, $f'_+((2k+1)\pi) = f'_-\left(\frac{4k+1}{2}\pi\right) = -2$. 7) $f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right) = -(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right) = (2k+1)\frac{\pi}{2}$. 8) $f'_-(-1) = f'_+(1) = +\infty$, $f'_+(-1)$ и $f'_-(1)$ не существуют. 9) $f'_-\left(\frac{4k+1}{2}\pi\right) = f'_+\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = 1$, $f'_+\left(\frac{4k+1}{2}\pi\right) = f'_-\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = -1$.

13.192. 1) $f'_-(0) = 1$, $f'_+(0) = 0$. 2) $f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 0$. 3) $f'(0) = 0$.

13.193. 1) $f'_+(0) = 0$, $f'_-(0) = +\infty$. 2) $f'_+(0) = +\infty$, $f'_-(0) = +\infty$. 3) $f'_-(0) = -\infty$, $f'_+(0) = 0$. 4) $f'_-(0) = 0$, $f'_+(0) = -\infty$. 5) $f'_-(0) = 1$, $f'_+(0) = -1$. 6) $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = +\infty$.

13.194. $f'_-(x_0) = -\varphi(x_0)$, $f'_+(x_0) = \varphi(x_0)$. **13.195.** $y = -\operatorname{sign} x$.

13.196. $y = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$

13.197. 1) $x'(0) = 1$, $x'(6/5) = 1/2$. 2) $x'(-1/2) = 1/2$. 3) $x'(1) = 5$. 4) $x'(0) = -\sqrt{2}/8$. 5) $x'\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{2}/2$.

13.198. 1) $x'(y) = x/(x+1)$, $y \in \mathbb{R}$ 2) $x'(y) = 1/(1+y-x)$, $y \in \mathbb{R}$. 3) $x'(y) = x^3/(2y^2)$, $y \in (0;\ 1)$. 4) $x'(y) = 1/\sqrt{y^2-1}$, $y \in (1;\ +\infty)$.

13.199. $(\operatorname{arcth} x)' = 1/(1-x^2)$, $x \in (-1;\ 1)$.

13.200. $y = \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

13.201. 1) $y'_x = -1$, $0 < x < 1$. 2) $y'_x = -3t^2e^t$. 3) $y'_x = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$. 4) $y'_x = \frac{b}{a}\operatorname{cth} t$. 5) $y'_x = 1 - \frac{3}{t} + \frac{9}{t^2}$. 6) $y'_x = \frac{3t-7}{3t-5}$. 7) $y'_x = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$, $x \neq 2\pi ka$, $y'_x(2\pi ka)$ не существует, $k \in \mathbb{Z}$. 8) $y'_x = \frac{2\cos t}{1+\cos t}$.

13.202. 1) $x'_y = \frac{3t+1}{3-3t}$. 2) $x'_y = 1 - \frac{1}{t^2}$. 3) $x'_y = \frac{1}{\sin^3 t\,(3 + 4\cos^2 t)}$.

13.203. $y'(0) = 0$. **13.204.** $y'_x = 2x$. **13.205.** 1) $-2/(3\pi)$. 2) 1. 3) 0.

13.206. $y'_+(0) = 1$, $y'_-(a) = -\infty$. **13.207.** 1) $\frac{1}{5y^4+3y^2+1}$. 2) $\frac{1}{1-e\cos y}$. 3) $\frac{p}{y}$. 4) $\frac{b^2x}{a^2y}$, $|x| > a$. 5) $\frac{(3a-x)y}{(2a-x)x}$, $0 < x < 2a$. 6) $1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$, $0 < x < 4$. 7) $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$, $|x| < a$, $x \neq 0$. 8) $\frac{5}{9}\,\frac{3-x}{y+1}$, $|x-3| < 3$. 9) $\frac{4y-2x-4}{8y-4x-3}$, $x < 3$.

13.208. 1) $1/\sqrt{3}$. 2) $-24/41$. 3) $-1/e$. 4) $-e^2$. **13.209.** 1) $A = 1$, $\alpha(\Delta x) = 3\,\Delta x + \Delta x^2$. 2) $A = 0$, $\alpha(\Delta x) = \Delta x^9$. **13.210.** $3(x-1)\,\Delta x^2 + \Delta x^3$. **13.211.** $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

13.212. Второй, если $x \neq 0$; если $x = 0$, то третий.

13.213. 1) $\left(\frac{1}{x} - e^{-x}\right)dx$. 2) $\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x(x+\sqrt{x})}}\,dx$. 3) $9\sqrt{x}\ln x\,dx$. 4) $-\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$. 5) $-\frac{\cos x}{\sqrt{4\sin^2 x - 1}}\,dx$. 6) $\operatorname{sh}^4(x/35)\operatorname{ch}^3(x/35)\,dx$. 7) $\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$. 8) $\frac{2}{\cos x\sqrt{\sin x}}\,dx$. 9) $x^{x^2}(1 + 2\ln x)\,x\,dx$.

13.214. 1) $-\frac{1}{2}\,dx$. 2) $\frac{2e^2}{e^2+1}\,dx$; 0. 3) $-\frac{89\sqrt{2}}{192}\,dx$. 4) $(2 + \ln 4)\,dx$; 0.

13.215. 1) $\frac{12}{11}\,dx$. 2) $\frac{1}{4}\,dx$. 3) $\frac{y_0^2 - 4x_0^3}{5y_0^4 - 2x_0y_0}\,dx$. 4) $\frac{y_0}{x_0 - y_0}\,dx$. 5) $-\frac{11}{20}\,dx$ 6) $\frac{1}{3}\,dx$. 7) $-2\pi\frac{\ln 3}{3+\ln 3}\,dx$. 8) 0. 9) $\frac{1}{2}\,dx$. 10) $\frac{1}{8}\,dx$.

13.216. dx.

13.217. 1) $u^2\,dv + 2uv\,du$. 2) $2\frac{u}{v}\,du - \frac{u^2}{v^2}\,dv$. 3) $\frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2}(u\,dv - v\,du)$. 4) $e^{uv}(u\,dv + v\,du)$. 5) $\frac{u\,du + v\,dv}{\sqrt{u^2+v^2}}$. 6) $\frac{2}{\sin(2v/u)}\cdot\frac{u\,dv - v\,du}{u^2}$. 7) $u^v\left(\frac{v}{u}\,du + \ln u\,dv\right)$.

13.218. 1) а) 4,0208, б) 5,00177. 2) а) 3,083, б) 1,9938. 3) а) 0,485, б) $-0{,}017$. 4) 0,9942. 5) 0,512. 6) 0,810. 7) 0,079. 8) 0,925. **13.219.** 1) 25,3 2) 5,85. 3) 3,001. 4) 1,9953. **13.220.** 565 см^3. **13.221.** 2%. **13.222.** Уменьшится на 1%. **13.223.** Увеличить на 2,23 см.

§ 14. Геометрический и физический смысл производной

14.1. В точках $x = 2\pi k/3$ угол $\varphi = \operatorname{arctg} 3$, в точках $x = \pi(2k+1)/3$ угол $\varphi = \pi - \operatorname{arctg} 3$. 2) $\pi/4$. 3) В точке $x = 1$ угол $\varphi = \pi/4$, в точке $x = -1$ угол $\varphi = 3\pi/4$. 4) $3\pi/4$. 5) $\operatorname{arctg}\alpha$. 6) В точках $x = 1$ и $x = 2$ угол $\varphi = 0$, в точках $x = 3$ угол $\varphi = \operatorname{arctg} 8$. 7) В точке $x = 1$ угол $\varphi = \pi - \operatorname{arctg}(3/2)$, в точке $x = -2$ угол $\varphi = \pi - \operatorname{arctg}(3/4)$. 8) $\operatorname{arctg}(1/2)$. 9) 0. 10) В точке $x = -3$ угол $\varphi = \operatorname{arctg} 3$, в точке $x = 3$ угол $\varphi = \pi - \operatorname{arctg} 3$. **14.2.** 1) $(-1;\ 14)$, $(2;\ -13)$. 2) $(0;\ -1)$; $(1;\ -6)$; $(-2;\ -33)$. 3) $(-1;\ -58)$; $(1;\ 54)$; $(7;\ -2106)$. 4) $(\pi k;\ 1 - 5(-1)^k)$, $k \in \mathbb{Z}$. 5) $(1;\ 2e)$, $(-3;\ -6e^{-3})$. 6) $(2;\ 0)$, $(5;\ -27/4)$. 7) $(3;\ 0)$, $(9/2;\ 27/16)$. 8) $(1/2;\ -1/2)$. 9. $(-2;\ 1+\sqrt{3})$. **14.3.** 1) $y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$. 2) $y = 2x$. 3) $y = -3x$. 4) $y = -3x + \frac{3\pi}{2}$. 5) $x = 1$. 6) $4x - 9y + 8 = 0$. 7) $29x - 12y - 54 = 0$.

8) $x - 3y = 0$. 9) $(1-t_0)e^{-t_0}x - (1+t_0)e^{t_0}y + 2t_0^2 = 0$. 10) $y = (\operatorname{ctg}(t_0/2))\,x + 2a - at_0\operatorname{ctg}(t_0/2)$. **14.4.** $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$. **14.5.** $(100/x_0;\ 0)$. **14.6.** $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{7}{2}$.

14.7. 1) $x + 2y - \pi - 2 = 0$. 2) $8x + 4y - 8 - \pi = 0$. 3) $x = 6$. 4) $y - \frac{3}{\sqrt[3]{2}} = 2\sqrt[3]{2}\,(x+3)$. 5) $\sqrt{2px_0}\,x + py - \sqrt{2px_0}\,(p+x_0) = 0$.

6) $y - \frac14 e^{\pi/3} = -\sqrt3\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}\left(x - \frac34 e^{\pi/3}\right)$.

14.8. $4x - 7y + 15 = 0$.

14.9. $a^2y_0x + b^2x_0y - x_0y_0(a^2+b^2) = 0$.

14.10. 1) $5x+6y-13=0$; $6x-5y+21=0$. 2) $9x+2y+12=0$; $2x-9y+31=0$. 3) $14x-13y+12=0$; $13x+14y-41=0$. 4) $x+y-2=0$, $y=x$. 5) $y-y_0 = \frac{x_0^2(6-x_0)}{y_0(4-x_0)^2}(x-x_0)$; $y - y_0 = -\frac{y_0(4-x_0)^2}{x_0^2(6-x_0)}(x-x_0)$. 6) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$; $ax - by = a^2-b^2$. 7) $3x-y-4=0$; $x+3y-28=0$. 8) $(\pi+4)x + (\pi-4)y - \frac{\pi^2\sqrt2}{4} = 0$; $(\pi-4)x - (\pi+4)y + \pi\sqrt2 = 0$. 9) $x+y-1=0$; $x-y=0$. 10) $7x-10y+6=0$; $10x+7y-34=0$. 11) $3x-y-1=0$; $x+3y-7=0$.

14.11. 1) $(0;\ 0)$, $\varphi = \operatorname{arctg}(2/3)$. 2) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ (-1)^k\right)$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. 3) $(0;\ 0)$, $\varphi=0$; $(1;\ 1)$, $\varphi = \operatorname{arctg}(1/7)$. 4) $(1;\ 1)$, $\varphi=\operatorname{arctg}3$. 5) $(1;\ 1)$, $\varphi=\pi/4$. 6) $(\sqrt e;\ 1/2)$, $\varphi=0$. 7) $(1;\ 1)$ и $(4;\ 4)$, $\varphi = \operatorname{arctg}(6/7)$. 8) $(3;\ 34)$, $\varphi = 0$; $(-2;\ 4)$, $\varphi=\operatorname{arctg}(25/153)$. 9) $\left(2k+\frac12;\ \varphi\left(2k+\frac12\right)\right)$, $k\in Z$, угол равен нулю.

14.12. 1) $(0;\ 0)$, $\varphi=\pi/2$; $(1;\ 1)$, $\varphi=\operatorname{arctg}(3/4)$. 2) $(1;\ 5/9)$, $\varphi=\operatorname{arctg}(1/3)$. 3) $(2;\ e)$, $\varphi=\operatorname{arctg}(2/e)$. 4) $(1;\ \pm2)$, $\varphi=\operatorname{arctg}3$. 5) $(1/8;\ -1/16)$, $\varphi=\pi/2$. 6) $(1;\ 2)$, $\varphi=\operatorname{arctg}(6/5)$. 7) $(8/5;\ 0)$, $\varphi=\operatorname{arctg}(75/31)$. 8) $(e;\ e)$, $\varphi=\pi/2$.

14.16. 1) $\pi/2$. 2) 0. 3) $\pi/2$. 4) $\pi/3$. 5) $\operatorname{arctg}(3/4)$. 6) $2\pi/3$. 7) 0. 8) $3\pi/4$. 9) $\pi - 2\operatorname{arctg}(1/18)$. 10) 0.

14.17. 1) $2\sqrt2$. 2) $2\sqrt2$. 3) 2. 4) 2. **14.18.** $1/\ln a$. **14.19.** $|x|/n$, $na^2|x|^{2n-1}$. **14.20.** 1) $2|x|$, p. 2) $(x^2-a^2)/|x|$, $|x|$. **14.23.** 1) $2x/3$, $3x^2/2$, $x\ne0$. 2) $2x$, $1/(2x^2)$.

14.24. $2a\sin(t/2)\operatorname{tg}(t/2)$, $2a\sin(t/2)$, $2a\sin^2(t/2)\operatorname{tg}(t/2)$, $a\sin t$.

14.25. a, $a\sin t/|\cos t|$. **14.28.** 1) $\operatorname{arctg}\varphi$. 2) $\operatorname{arctg}\varphi$. 3) $\operatorname{arctg}(1/b)$. 4) $|\pi-\varphi|/2$, $0\leqslant\varphi<\pi$, $\pi<\varphi<2\pi$. 5) $\frac{\pi}{2} - 2\varphi$. **14.29.** $\pi/2$.

14.31. $\frac{a}{\sqrt{1+b^2}}e^{b\varphi}$. **14.32.** $x - y - \frac{1+2\sqrt3}{4}a = 0$, $r = \frac{(1+2\sqrt3)\,a}{4(\cos\varphi - \sin\varphi)}$.

14.33. $\approx 54{,}3$ км/ч. **14.34.** $-\pi/8$. **14.35.** 90,75 Дж. **14.36.** (1/3) м/с.

14.37. 0,05 м³/с. **14.38.** 4π рад/с. **14.39.** 15 м/с. **14.40.** ≈ 3 м/мин.

14.41. $v = (v_0\cos\alpha,\ v_0\sin\alpha - gt)$, $|v| = \sqrt{v_0^2 - 2v_0gt\sin\alpha + g^2t^2}$.

14.42. $\pi/3$ м/с.

14.43. $\frac{2\pi a\varepsilon}{P}\sin\frac{2\pi(t-t_0)}{P}\left(2\varepsilon\cos\frac{2\pi(t-t_0)}{P}+1\right)$.

14.44. 1,013 $\frac{\text{Дж}}{°\text{К}}$. **14.45.** $-\frac{\ln 2}{T}$.

§ 15. Производные и дифференциалы высших порядков

15.1. 1) 2. 2) $9702/x^{100}$. 3) $3x(1-x^2)^{-5/2}$. 4) $-2\cos 2x$. 5) $4\operatorname{ch}2x$. 6) $-x(x^2+1)^{-3/2}$. 7) $-x(1+x^2)^{-2}$. 8) $(x-1)(2x-x^2)^{-3/2}$. 9) $-4x\operatorname{sign}x/(1+x^2)^2$, $x\ne0$. 10) $4x^3(1+x^4)^{-5/4}$. **15.2.** 1) $e^2/32$. 2) 625/1024. 3) 0. 4) 0. **15.3.** 54 м/с². **15.6.** При $t=2$ с: 13 м/с² и 14 м/с², при $t=3$ с: 19 м/с² и 18 м/с². **15.7.** $43H$. **15.8.** 20 м/с².

15.9. 1) $(x^2-3x+1)e^{-x}dx^2$. 2) $\frac{8\operatorname{ctg}2x}{\sin^2 2x}dx^2$. 3) $-\frac{2\sin\ln x}{x}dx^2$. 4) $\left(x(1+\ln x)^2+1\right)x^{x-1}dx^2$. **15.10.** 1) $\frac{15}{2}dx^2$. 2) $\frac{56}{125}dx^2$. 3) $-\frac58dx^2$. 4) dx^2.

15.11. 1) — 4) удовлетворяет при произвольных A и B; 5) не удовлетворяет; 6) — 8) удовлетворяет.

15.12. 1) $\frac{u^2v'' - uvu'' - 2uu'v' + 2v(u')^2}{u^3}$.

2) $(uv'' + 2u'v' + vu'' + (uv'+vu')^2)e^{uv}$.

3) $\frac{(u^2+v^2)(uv''-vu'') + 2uv(u')^2 + 2(v^2-u^2)u'v' - 2uv(v')^2}{(u^2+v^2)^2}$.

4) $\frac{(u^2+v^2)(uu''+vv'') + (v^2-u^2)(u')^2 - 4uvu'v' + (u^2-v^2)(v')^2}{(u^2+v^2)^2}$.

15.13. 1) $(v+2)\,d^2u + 2\,du\,dv + u\,d^2v$.

2) $\ln v\,d^2u + \frac{2}{v}du\,dv + \frac{u}{v}d^2v - \frac{u}{v^2}dv^2$.

3) $\frac{(u^2+v^2)(u\,d^2u+v\,d^2v) + (v\,du - u\,dv)^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}$.

4) $u^v\left(\frac{v}{u}d^2u + \ln u\,d^2v + \frac{v(v-1)}{u^2}du^2 + \frac{2(v\ln u+1)}{u}du\,dv + \ln^2u\,dv^2\right)$.

15.14. 1) $-2/9t^4$. 2) $\frac6t\left(\frac{1+t^3}{2-t^3}\right)^3$. 3) $-8\cos^2t/\cos^2 2t$. 4) $-b/(a^2\sin^3t)$. 5) $1/(\cos^3t\,(3\cos^3t-1))$. 6) $-1/(t\operatorname{sh}^3t)$. 7) $2(1+t)^3/(te^t)$. 8) $\cos^3t/\sin t$. 9) $(3\sin\log_2 t)/(\cos^5\log_2 t)$. 10) $2^{3\sin^2 t-1}$. **15.15.** 1) 2. 2) 1/2. 3) −12. 4) −1/2.

15.16. 1) $-12(t+1)^{-1}(3t+1)^{-3}$. 2) $-\sin^2t\cos t$. 3) $-2\ln5\,\frac{\cos^2t}{\sin^4t}$. 4) $2\sqrt{\cos 2t}\,\frac{\sin^2t-\cos2t}{\sin^3 2t\cos t}$.

15.18. 1) $-\frac{3\cos t}{a^2\sin^5t}$. 2) $\frac{3\operatorname{ch}t}{a^2\operatorname{sh}^5t}$. 3) $\frac{\cos^2t-4\sin^2t}{9a^2\cos^7t\sin^3t}$. 4) $\frac{\cos(t/2)}{4a^2\sin^7(t/2)}$. 5) $\frac{4e^{2t}(2\sin t-\cos t)}{(\sin t+\cos t)^5}$. 6) $\frac{\sin t\,(1+3\sin^2t)}{\cos^7t}$.

15.19. 1) $y'=-b/a$, $y^{(n)}=0$, $n>1$. 2) $y^{(n)} = 2^{n-1}n!$. 3) $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}2^n(2n-3)!!}{(2t-1)^{2n-1}}$. 4) $y'=2x+1$, $y''=2$, $y^{(n)}=0$, $n>2$.

15.20. $x'' = -f''/(f')^3$, $x''' = (3(f'')^2 - f'f''')/(f')^5$. **15.21.** 1) $-a^2/y^3$. 2) $-a^2/y^3$. 3) $-b^4/(a^2y^3)$. 4) $-p^2/y^3$. 5) $4(x+y)/(x+y+1)^3$. 6) $-(3+2\ln x)/(x^2(1+2\ln x)^2)$. 7) $2(x^2+y^2)/(x-y)^3$. 8) $\frac{2x^2y\,(3y^4+2(3-x^4)y^2+3+2x^4)}{(y^2+1)^3}$.

15.22. 1) $-\frac13dx^2$. 2) $-\frac14dx^2$. 3) 0. 4) $\frac38dx^2$.

15.24. 1) $y^{(n)} = 3^ne^{3x}$, $n>3$; $y''' = 6+27e^{3x}$; $y'' = 6x+9e^{3x}$; $y' = 3x^2+1+3e^{3x}$. 2) $a_0\cdot n!$. 3) $2\cdot n!/(1-x)^{n+1}$. 4) $(-1)^{n-1}n!\,c^{n-1}(ad-bc)(cx+d)^{-n-1}$.

5) $(-1)^{n-1}(n-1)!\,a^n/(ax+b)^n$. 6) $-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)$.

7) $\frac{1}{2}(a-b)^n\cos\left((a-b)x+\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{1}{2}(a+b)^n\cos\left((a+b)x+\frac{\pi n}{2}\right)$.

8) $y^{(2k-1)}=\frac{1}{2}(a+b)^{2k-1}\operatorname{sh}(a+b)x+\frac{1}{2}(a-b)^{2k-1}\operatorname{sh}(a-b)x$;

$y^{(2k)}=\frac{1}{2}(a+b)^{2k}\operatorname{ch}(a+b)x+\frac{1}{2}(a-b)^{2k}\operatorname{ch}(a-b)x$.

9) $2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)+4^{n-1}\sin\left(4x+\frac{\pi n}{2}\right)$.

10) $4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{\pi n}{2}\right)$.

11) $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)+2^{2n-3}\cos\left(4x+\frac{\pi n}{2}\right)$.

12) $(2n-1)!!\,(1-2x)^{-(2n+1)/2}$.

13) $\frac{(-1)^n n!}{4}\left(3(x-6)^{-n-1}+(x+2)^{-n-1}\right)$.

14) $n!\left((1-x)^{-n-1}+(-1)^n(1+x)^{-n-1}\right)$.

15) $(-1)^n n!\left(2^n(2x-1)^{-n-1}+(x+2)^{-n-1}\right)$.

15.25. 1) $(\ln^{n-1}2)\,2^{x-1}((\ln 2)(x-1)+n)$.

2) $(\ln 72)^{n-1}72^x((\ln 72)(2x-1)+2n)$.

3) $(-3)^{n-2}(36x^2-12(9+2n)x+81+32n+4n^2)\,e^{2-3x}$

4) $\frac{(n-2)!\,3^{n-1}}{\ln 2}(3x-n)(1-3x)^{-n}$, $n>1$.

5) $(-1)^n 2(n-2)!\,(x-n)(x-1)^{-n}$, $n>1$.

6) $(n-2)!\left((3n-x)(3-x)^{-n}+(-1)^n(3n+x)(3+x)^{-n}\right)$, $n>1$.

7) $(-1)^n(n-2)!\left((x-n)(x-1)^{-n}+(x-2n)(x-2)^{-n}\right)$, $n>1$.

8) $x\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)+n\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$.

9) $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(n\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{2}{3}x\cos\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi n}{2}\right)\right)$, $n>1$.

10) $2^{n-3}\left((4x^2+4x-n^2+n)\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)+2n(2x+1)\sin\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)\right)$, $n>2$.

15.26. 1) $\frac{5^{n-1}(2n-3)!!}{2^n}(2n-5x)(1-5x)^{-(2n+1)/2}$, $n>1$.

2) $(2n-5)!!\,(3x^2-2nx+n^2-n)(1-2x)^{-(2n+1)/2}$, $n>2$.

3) $e^{ax}(a^2+b^2)^{n/2}\cos(bx+c+n\varphi)$, $\cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\varphi=b/\sqrt{a^2+b^2}$.

4) $2^{n-1}e^{2x}\left(1-2^{n/2}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{4}\right)\right)$.

5) $(a^2+b^2)^{n/2}\left(\operatorname{ch}ax\cos\left(n\varphi-\frac{\pi n}{2}\right)\sin\left(bx+\frac{\pi n}{2}\right)+\right.$

$\left.+\operatorname{sh}ax\sin\left(n\varphi-\frac{\pi n}{2}\right)\cos\left(bx+\frac{\pi n}{2}\right)\right)$, $\cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2}$,

$\sin\varphi=b/\sqrt{a^2+b^2}$. 6) $(-1)^n x^{-n-1}e^{1/x}$. 7) $(n-1)!/x$.

8) $(-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x^2)^{-n/2}\sin(n\operatorname{arcctg}x)$.

15.27. 1) а) 12960; б) 0. 2) $-17!!/2^{10}$. 3) $8!$. 4) $-13!\,(2/3)^{14}$. 5) $-2^{-14}\cdot 3^5\cdot 5\cdot 19$. 6) $336/(625\sqrt[3]{5})$. 7) $-2(97!)$. 8) $10109(3^{99})\sin 3$. 9) $-\frac{\pi}{2}(1+3^{100})$. 10) $\left(16-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2}$. 11) а) $2^9\cdot 3^2\cdot 7\cdot 37$, б) 0.

15.28. 1) $1500\,dx^3$. 2) $194\cdot 10!\,3^9\,dx^{10}$. 3) $\frac{27!!\sqrt{2}}{2^{25}}dx^{16}$. 4) $-2^7\cdot 1025\sqrt{3}\,dx^{10}$. 5) $2^9\cdot 29\,dx^8$. 6) а) $(17!!)^2dx^{19}$, б) 0.

15.29. 1) $y'(0)=0$, $y''(0)$ не существует. 2) $y'(0)=2$, $y''(0)=0$, $y'''(0)$ не существует. 3) $y'(0)=0$, $y''(0)=0$, $y'''(0)=1$, $y^{(IV)}(0)=0$, $y^{(V)}(0)$ не существует. 4) $y'(0)=1$, $y''(0)=0$, $y'''(0)$ не существует. 5) $y'(0)=0$, $y''(0)$ — не существует. 6) $y^{(n)}(0)=0$ для $n\leqslant 50$, $y^{(51)}(0)$ — не существует. 7) $y^{(n)}(0)=0$, $n\in\mathbb{N}$. **15.33.** $(-1)^n m^n n!$.

Глава IV. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

§ 16. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

16.2. $x_{1,2}=(2\pm\sqrt{7})/3$. **16.3.** $\xi=\sqrt{3}/3$. **16.23.** Применить теорему Коши о среднем к функциям $f(x)/x$ и $1/x$. **16.29.** Применить теорему Коши о среднем к функциям $f(x)$ и $1/x$.

§ 17. Правило Лопиталя

17.1. 10/7. **17.2.** 1/9. **17.3.** 6/7. **17.4.** 2. **17.5.** 1. **17.6.** α/β. **17.7.** $-a^2/2$. **17.8.** $\alpha a^{\alpha-a-1}/\ln a$. **17.9.** $1-\ln a$. **17.10.** $-1/2$. **17.11.** $-2/\pi$. **17.12.** -1. **17.13.** $-1/4$. **17.14.** -6. **17.15.** 1. **17.16.** 15/4. **17.17.** 0. **17.18.** -2. **17.19.** 16/105. **17.20.** $(-1)^{m-n}(2m+1)/(2n+1)$. **17.21.** -3. **17.22.** 1/2. **17.23.** 1. **17.24.** 4. **17.25.** $1/a$. **17.26.** 2. **17.27.** 9/14. **17.28.** 1/3. **17.29.** $-4/3$. **17.30.** 0. **17.31.** 45. **17.32.** 49/198. **17.33.** $-1/6$. **17.34.** $\alpha(\alpha+1)/2$. **17.35.** $(\alpha-\beta)/2$. **17.36.** 1/2. **17.37.** 1. **17.38.** 3/2. **17.39.** 1. **17.40.** 0. **17.41.** 0. **17.42.** 2. **17.43.** $-1/3$.

17.44. 0 при $\gamma>0$ (α, β — любые), при $\gamma=0$ ($\alpha<0$, β — любое; $\alpha=0$, $\beta<0$); $+\infty$ при $\gamma<0$ (α, β — любые), при $\gamma=0$ ($\alpha>0$, β — любое; $\alpha=0$, $\beta>0$); 1 при $\alpha=\beta=\gamma=0$.

17.45. 0. **17.46.** 0 при $\alpha>1$ и при $\alpha=1$, $\beta>-1$; 1 при $\alpha=1$, $\beta=-1$; $+\infty$ при $\alpha<1$ и при $\alpha=1$, $\beta<-1$. **17.47.** 0. **17.48.** $-2/\pi$. **17.49.** 0. **17.50.** 2. **17.51.** 2. **17.52.** 0. **17.53.** 0. **17.54.** 0 при $0<a<1$ (α — любое), $+\infty$ при $a>1$ (α — любое). **17.55.** 0. **17.56.** 0. **17.57.** $-1/3$. **17.58.** 1/2. **17.59.** 1/3. **17.60.** $+\infty$. **17.61.** $(\alpha-\beta)/2$. **17.62.** e. **17.63.** $e^{-2/\pi}$. **17.64.** $e^{-2/\pi}$. **17.65.** $e^{-1/2}$. **17.66.** 1. **17.67.** $e^{-1/2}$. **17.68.** 1. **17.69.** e. **17.70.** 1. **17.71.** 1. **17.72.** 1. **17.73.** 3. **17.74.** 1. **17.75.** 1. **17.76.** 1) 0. 2) 1. **17.77.** Правило Лопиталя неприменимо, предел не существует. **17.78.** $f''(a)$. **17.79.** $f'''(a)$. **17.80.** $f^{(k)}(0)=0$, $k\in\mathbb{N}$. **17.81.** 1) 0. 2) 0. 3) 4. 4) a.

§ 18. Формула Тейлора

18.1. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{5^k}{e\cdot k!}x^k+o(x^n)$. 2) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k\sin\left(3+k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}x^k+o(x^n)$.

3) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\left(2+k\frac{\pi}{2}\right)}{2^k k!}x^k+o(x^n)$. 4) $\sum\limits_{k=0}^{n}2^k x^k+o(x^n)$.

5) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{3^k}{4^{k+1}}x^k+o(x^n)$. 6) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^k(2k-1)!!}{k!}x^k+o(x^n)$.

7) $\ln 2+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{e}{2}\right)^k x^k+o(x^n)$.

8) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{9(\ln 3)^k}{k!} x^k + o(x^n)$. 9) $\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k+o(x^n)$.

18.2. 1) $-1+\sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k k!}x^k+o(x^n)$. 2) $-x+\sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k k}{(k-1)!}x^k+o(x^n)$.

3) $3+\sum_{k=1}^n \left(3+k(k-1)2^{k-2}\right)\frac{(-1)^k}{k!}x^k+o(x^n)$.

4) $1+\frac{3}{2} x-\frac{9}{8} x^2-\sum_{k=3}^n \frac{3(2k-1)(2k-5)!!}{2^k k!}x^k+o(x^n)$.

5) $-3\ln 6+\left(2\ln 6-\frac{5}{2}\right)x+\sum_{k=2}^n(-1)^k\frac{9k-5}{2k(k-1)}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}x^k+o(x^n)$.

6) $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}2^k+1}{k}x^k+o(x^n)$.

7) $\ln\frac{2}{3}+\sum_{k=1}^n\frac{(-4)^k-9^k}{k6^k}x^k+o(x^n)$.

8) $\ln 2+\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}(1+2^{-k})x^k+o(x^n)$.

9) $\ln 2+\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}-2^{-k}}{k}x^k+o(x^n)$.

18.3. 1) $\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\sum_{k=3}^n\frac{(-1)^{k-1}(k-1)}{k(k-2)}x^k+o(x^n)$.

2) $-2x+\frac{5}{2}x^2+\sum_{k=3}^n\frac{(-1)^k(2k-1)}{k(k-1)}x^k+o(x^n)$.

3) $2x+\sum_{k=2}^n\frac{2k-1}{k(k-1)}\left((-1)^{k-1}+1\right)x^k+o(x^n)$.

4) $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}2^{\frac{5}{3}-k}C_{2/3}^{k-1}x^k+o(x^n)$.

5) $\sum_{k=1}^n 3^{\frac{1}{3}-k}(-1)^{k-1}C_{-2/3}^{k-1}x^k+o(x^n)$.

6) $\ln\frac{2}{3}+\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}4^{-k}+2^{-k}+3^{-k}}{k}x^k+o(x^n)$.

7) $\ln 6+\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}}{k}(1+2^{-k}+3^{-k})x^k+o(x^n)$.

8) $-\sum_{k=0}^n\frac{2\operatorname{ch}((k+1)\ln 2)}{k+1}x^k+o(x^n)$.

18.4. 1) $\sum_{k=0}^n\frac{1}{3}\left((-1)^{k+1}-2^{-(k+1)}\right)x^k+o(x^n)$.

2) $-3+\sum_{k=1}^n 5(-1)^{k-1}x^k+o(x^n)$.

3) $-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}x-\frac{13}{12}\sum_{k=2}^n\left(\frac{2}{3}\right)^k x^k+o(x^n)$.

4) $-\sum_{k=3}^n x^k+o(x^n)$. 5) $\sum_{k=0}^n(-1)^k\left(1+4^{-(k+1)}\right)x^k+o(x^n)$.

6) $\sum_{k=0}^n\left(2(-1)^k3^{-(k+1)}-2^{-(k+1)}\right)x^k+o(x^n)$.

7) $\frac{1}{3}+\sum_{k=1}^n\left((-1)^k3^{-(k+1)}-1\right)x^k+o(x^n)$.

8) $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k+1}-7\cdot2^{-(k+1)}}{3}x^k+o(x^n)$.

9) $\frac{5}{2}+\sum_{k=1}^n\left((-1)^k2^{-(k+1)}-1\right)x^k+o(x^n)$.

18.5. 1) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1}(2k+1)!}+o(x^{2n})$. 2) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3^{2k}}{(2k)!}x^{2k+1}+o(x^{2n})$.

3) $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}2^{4k-1}}{(2k)!}x^{2k+1}+o(x^{2n})$. 4) $x+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k+1}+o(x^{2n})$.

5) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2(2k+1)!}(3^{2k+1}-1)x^{2k+1}+o(x^{2n})$.

6) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3(-1)^k}{4(2k+1)!}(1-3^{2k})x^{2k+1}+o(x^{2n})$.

7) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3^{2k+1}-1}{2(2k+1)!}x^{2k+1}+o(x^{2n})$.

8) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}2^{2k-1}(1-2^{2k})x^{2k+1}+o(x^{2n})$.

18.6. 1) $1-x^2+\sum_{k=2}^n 2(-1)^k x^{2k}+o(x^{2n})$.

2) $-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{3^{k-1}}{4^k}x^{2k}+o(x^{2n})$.

3) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\operatorname{sh}((k+1)\ln 3)}{4}x^{2k}+o(x^{2n})$.

4) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{3+(-1)^k}{2}x^{2k}+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}-3}{2}x^{2k+1}+o(x^{2n})$.

5) $-\frac{x}{3}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{e^{-k}-1}{3k}x^{2k+1}+o(x^{2n})$.

6) $\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{(k-1)\,2^{2k+1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}+o(x^{2n})$.

7) $x+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k(2k+1)\,k!}x^{2k+1}+o(x^{2n})$.

18.7. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 3^{2k}}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1})$.

2) $x^2+\sum\limits_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k-3}}{(2k-2)!}x^{2k}+o(x^{2n+1})$.

3) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!}(1+4^{2k})x^{2k}+o(x^{2n+1})$.

4) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!}(1-2^{2k})x^{2k}+o(x^{2n+1})$.

5) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}(2^{2k}+1)x^{2k}+o(x^{2n+1})$.

6) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{6^{2k}-4^{2k}}{2\cdot(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1})$.

18.8. 1) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1})$.

2) $1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!}(1-2^{2k-2})x^{2k}+o(x^{2n+1})$.

3) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k 2^{2k-5}}{(2k)!}(1-2^{2k+1}-3^{2k})x^{2k}+o(x^{2n+1})$.

4) $1+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{4^{2k}}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1})$.

5) $1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{3(-1)^k 4^{2k-1}}{2(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1})$.

6) $1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k 4^{2(k-1)}}{(2k)!}(7+4^{k-1})x^{2k}+o(x^{2n+1})$.

18.9. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}2^{-(k+1)}-1}{3}x^{2k}+\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1+(-1)^k 2^{-(k+1)}}{3}x^{2k+1}+$
$+o(x^{2n+1})$.

2) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2}(3^{-(k+1)}-5^{-(k+1)})x^{2k}+o(x^{2n+1})$.

3) $\sum\limits_{k=1}^{n}C_{-1/2}^{k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}}x^{2k}+\sum\limits_{k=0}^{n}C_{-1/2}^{k}\frac{(-1)^k}{4^k}x^{2k+1}+o(x^{2n+1})$.

4) $\sum\limits_{k=0}^{n}C_{1/2}^{k+1}2^{-\left(k+\frac{3}{2}\right)}(1+(-1)^k)x^{2k}+o(x^{2n+1})$.

5) $\sum\limits_{k=1}^{n}C_{1/2}^{k+1}x^{2k}+o(x^{2n+1})$.

6) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3k}\left(1+\frac{1+(-1)^{k+1}}{2^k}\right)x^{2k}+o(x^{2n+1})$.

18.10. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2}(2^{-(k+1)}-3^{-(k+1)})x^{3k}+o(x^{3n})$.

2) $\frac{11}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(2(-1)^k-3\cdot 2^{-(k+1)})x^{3k}+o(x^{3n})$.

3) $\sum\limits_{k=0}^{n}x^{3k}-\sum\limits_{k=0}^{n-1}x^{3k+1}+o(x^{3n})$.

18.11. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)x^{3k+1}+o(x^{3n+1})$.

2) $\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{sh}k}{k}x^{3k}+o(x^{3n+1})$.

3) $\sum\limits_{k=0}^{n}((-1)^k 2^{-k}+7^{-k})x^{3k}+o(x^{3n+1})$.

18.12. 1) $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(x-2)^k + o((x-2)^n).$

2) $\sum_{k=0}^{n} C_{1/2}^k (x-1)^k + o((x-1)^n).$

3) $\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k \sin\left(\frac{k\pi}{2}-1\right)}{k!}(x-1)^k + o((x-1)^n)$

4) $-e^{-2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-2}\,2^{k-1}(k-2)}{k!}(x+1)^k + o((x+1)^n).$

5) $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k e^2\, 2^{k-2}}{k!}(k^2+3k+4)(x+1)^k + o((x+1)^n).$

6) $\sum_{k=1}^{n} e^{-2}\,\frac{2^{k-2}(k-5)}{(k-1)!}(x+1)^k + o((x+1)^n).$

7) $\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{(-1)^{k-1}\cos 1\cdot 2^{2k-1}}{(2k)!}(x+1)^{2k} + \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \frac{\sin 1\cdot(-1)^k\, 2^{2k}}{(2k+1)!}\times$

$\times (x+1)^{2k+1} + o((x+1)^n).$

18.13. 1) $\ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(-1)^{k-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^k + o\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\right).$

2) $\frac{\ln(26/3)}{3\ln 3} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(3\ln 3)\,k}\left(\frac{9}{26}\right)^k (x-3)^k + o((x-3)^n).$

3) $\ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}2^{-k}-1}{k}(x-1)^k + o((x-1)^n).$

4) $\ln 6 - \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{-k}+3^{-k}}{k}(x-1)^k + o((x-1)^n).$

18.14. 1) $\frac{\ln 5}{3} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\left(\frac{7}{5}\right)^k \frac{(x-1)^k}{3k} + o((x-1)^n).$

2) $-\frac{\ln 2}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}+2^{-k}}{4k}(x-3)^k + o((x-3)^n).$

3) $-2\ln 12 + \left(\ln 12 + \frac{7}{6}\right)(x+2) -$

$-\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}\left(\frac{k+2}{3^k} + \frac{k+1}{2^{2k-1}}\right)(x+2)^k + o((x+2)^n).$

4) $(x-2) + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{(-1)^k}{k-1}\right)(x-2)^k + o((x-2)^n).$

5) $3 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k(k-2)}{k(k+1)}(x-1)^k + o((x-1)^n).$

6) $-2\sum_{k=1}^{n} \frac{(x+2)^k}{k} + \sum_{k=1}^{[n/2]} (-1)^{k-1}\frac{(x+2)^{2k}}{k} + o((x+2)^n).$

18.15. 1) $3 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (x-2)^k + o((x-2)^n).$

2) $\sum_{k=2}^{n} (x-2)^k + o((x-2)^n).$

3) $\frac{5}{7} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}7^{k+1}}(x-10)^k + o((x-10)^n).$

4) $-\frac{7}{6} + \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{10}{21}\right)^k\left(x+\frac{1}{10}\right)^k + o\left(\left(x+\frac{1}{10}\right)^n\right).$

5) $2 + \frac{3}{2}(x-1) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{2^k} + o((x-1)^n).$

6) $3 + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k (x-3)^k + o((x-3)^n).$

7) $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(-1)^{k+1}2^k}{3^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+1}}\right)(x+2)^k + o((x+2)^n).$

18.16. 1) $\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k(k-1)}{3^k}(x+2)^k + o((x+2)^n).$

2) $1 + \sum_{k=1}^{n} (1-2^{-k})(x-1)^k + o((x-1)^n).$

3) $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(3 - \frac{7}{2^{k+1}}\right)(x-3)^k + o((x-3)^n).$

4) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}\left(1+\frac{1}{3^{k+1}}\right)(x-2)^k + o((x-2)^n).$

5) $\frac{5}{2} + \frac{9}{4}(x-1) + \sum_{k=2}^{n} \left(1+2^{-(k+1)}\right)(x-1)^k + o((x-1)^n).$

6) $-6(x-2) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k\frac{(k+1)(k+4)}{2}(x-2)^k + o((x-2)^n).$

18.17. 1) $\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-2}}{k!}(x+1)^{2k} + o\left((x+1)^{2n}\right)$.

2) $\sum_{k=0}^{n-1} e^{-27}\frac{3^k}{k!}(x+3)^{2k+1} + o\left((x+3)^{2n}\right)$.

3) $(x+2)\ln 3 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}2^k}{3^k k}(x+2)^{2k+1} + o\left((x+2)^{2n}\right)$.

4) $\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{(x-5)^{2k+1}}{k} + o\left((x-5)^{2n}\right)$.

18.18. 1) $1+\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}(x-1)^{2k} + o\left((x-1)^{2n}\right)$.

2) $(x+1)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}(x+1)^{2k+1}+o\left((x+1)^{2n}\right)$.

3) $\frac{(x-2)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^{2k+1}(2k)!!}(x-2)^{2k+1}+o\left((x-2)^{2n}\right)$.

4) $(x-1)^2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1\cdot4\cdot7\ldots(3k-2)}{3^k k!}(x-1)^{2k+2}+o\left((x-1)^{2n}\right)$.

5) $(x+1)^3+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k k!}(x+1)^{2k+3}+o\left((x+1)^{2n}\right)$.

18.19. 1) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{4^{k+1}}(x-1)^{2k+1}+o\left((x-1)^{2n}\right)$.

2) $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{3^k}{2^{k+1}}(x-1)^{2k+1}+o\left((x-1)^{2n}\right)$.

3) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(x-2)^{2k}}{2^{2k+2}}+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{(x-2)^{2k+1}}{2^{2k+2}}+o\left((x-2)^{2n}\right)$.

18.20. 1) $\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-5}2^k}{k!}(x+2)^{2k}+o\left((x+2)^{2n+1}\right)$.

2) $\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-18}2^k}{k!}(x-3)^{2k}+o\left((x-3)^{2n+1}\right)$.

3) $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\sqrt[4]{2}\,(\ln 2)^k}{k!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2k}+o\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right)$.

4) $\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-3}2^k}{k!}\left((x+2)^{2k}+(x+2)^{2k+1}\right)+o\left((x+2)^{2n+1}\right)$.

5) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(\ln 2)^{k-1}}{2(k-1)!}(x+1)^{2k}+o\left((x+1)^{2n+1}\right)$.

6) $-\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(\ln 2)^{k-1}}{4\cdot k!}(k-\ln 2)(x-1)^{2k}+o\left((x-1)^{2n+1}\right)$.

7) $e^3+\sum_{k=1}^{n}\frac{e^3 2^{k-1}(3k+2)}{k!}(x-1)^{2k}+o\left((x-1)^{2n+1}\right)$.

18.21. 1) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-3^{2k})}{4(2k)!}(x-1)^{2k}+o\left((x-1)^{2n+1}\right)$.

2) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{3\cdot 6^{2k}}{(2k+1)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2k+1}+$

$$+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 3^{2k}}{2(2k)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2k}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}\right).$$

3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2}(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^{2k}+o\left(\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\right)$.

4) $\frac{\pi^2}{4}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\frac{\pi^2}{4(2k)!}-\frac{1}{(2k-2)!}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}\right)$.

5) $-\frac{\pi}{8}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2}\left(\frac{\pi^{2k-1}}{(2k-1)!}+\frac{\pi^{2k+1}}{4(2k+1)!}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2k}+$

$$+o\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right).$$

18.22. 1) $1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}3^k}{k2^k\ln 2}(x-4)^{2k}+o\left((x-4)^{2n+1}\right)$.

2) $\ln 3+(x+1)\ln 3-\sum_{k=1}^{n}\frac{(x+1)^{2k}}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(x+1)^{2k+1}}{k}+o\left((x+1)^{2n+1}\right)$.

3) $\frac{2}{3\ln 5}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^{2k-1}}{2k-1}(x-1)^{2k-1}+o\left((x-1)^{2n+1}\right)$.

4) $-2\ln 3+\left(\ln 3+\frac{4}{3}\right)(x+2)^2+\sum_{k=2}^{n}\frac{2^{k-1}(k-4)}{3^k k(k-1)}(x+2)^{2k}+o\left((x+2)^{2n+1}\right)$.

18.23. 1) $\sum_{k=0}^{n}C^k_{-1/3}(x-2)^{2k+1}+o\left((x-2)^{2n+1}\right)$.

2) $\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}(x-2)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{\sqrt{5}\,10^k k!}\left((x-2)^{2k}+(x-2)^{2k+1}\right)+o\left((x-2)^{2n+1}\right)$.

3) $1+(x-1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\left((x-1)^{2k}+(x-1)^{2k+1}\right)+o\left((x-1)^{2n+1}\right)$.

4) $\sum_{k=0}^{n-1}C_{1/2}^{2k+1}2^{2k+\frac{5}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2k+2}+o\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right)$.

5) $-\sum_{k=0}^{n}2^{2k+3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^{2k+1}+o\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^{2n+1}\right)$.

6) $3+\sum_{k=1}^{n}(x-2)^{2k}+o\left((x-2)^{2n+1}\right)$.

7) $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{5\cdot 2^k}-\frac{2^k}{5}\right)(x+1)^{2k}+o\left((x+1)^{2n+1}\right)$.

18.24. $\sum_{k=0}^{n}\frac{2(\ln 2)^k}{k!}(x-1)^{3k}+o\left((x-1)^{3n}\right)$.

18.25. $(x-2)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^{2k}k!}(x-2)^{2k+1}+o\left((x-2)^{2n+2}\right)$.

18.26. $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}C_{-1/3}^{k}}{2^{3k+1}}(x-2)^{3k+1}+o\left((x-2)^{3n+1}\right)$.

18.27. $-1-\frac{1}{2}(x-1)^2-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}+2\frac{(4k-3)!!}{(4k)!!}\right)(x-1)^{4k-2}+o\left((x-1)^{4n+1}\right)$.

18.28. 1) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\cos 2}{(2k+1)!}(x-1)^{4k+2}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\sin 2}{(2k)!}(x-1)^{4k}+o\left((x-1)^{4n}\right)$.

2) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\sin 1}{(2k+1)!}(x-2)^{4k+2}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\cos 1}{(2k)!}(x-2)^{4k}+o\left((x-2)^{4n}\right)$.

3) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k 3^{2k+1}\cos 1}{(2k+1)!}(x+1)^{4k+2}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 3^{2k}\sin 1}{(2k)!}(x+1)^{4k}+o\left((x+1)^{4n}\right)$.

18.29. 1) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{2k+1}\left(\frac{8}{\pi}\right)^{2k+1}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{4k+2}}{(2k+1)!}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{4n+3}\right)$.

2) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2k}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{4k}}{(2k)!}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{4n+3}\right)$.

3) $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\sqrt{\pi}}{(2k+1)!}(x+\sqrt{\pi})^{4k+2}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}(x+\sqrt{\pi})^{4k+3}+o\left((x+\sqrt{\pi})^{4n+3}\right)$.

4) $-\frac{\sin 2}{2}+\frac{\sin 2}{2}(x+1)+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^{2k}}{(2k+1)!}(x+1)^{4k+3}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k}}{(2k+1)!}(x+1)^{4k+2}+o\left((x+1)^{4n+3}\right)$.

18.30. 1) $1-x^2+o(x^3)$. 2) $1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. 3) $o(x^{2k})$.

18.31. 1) -120. 2) 0. 3) $60!$.

18.33. 1) $1+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3$. 2) $1+(x+2)^4$. 3) $2(x+1)-2(x+1)^2+(x+1)^3$. 4) $144(x-2)^2+144(x-2)^3+60(x-2)^4+12(x-2)^5+(x-2)^6$.

18.36. 1) $1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$. 2) $e+ex+o(x^2)$. 3) $1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$. 4) $1-\frac{x^2}{10}+o(x^2)$. 5) $1-3x+6x^2+o(x^2)$. 6) $-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$.

18.37. 1) $1-2x+2x^2+o(x^3)$. 2) $2x+\frac{7}{3}x^3+o(x^3)$. 3) $1-x-x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$. 4) $x-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$. 5) $1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$. 6) $-\frac{x^3}{8}+o(x^3)$. 7) $e-\frac{e}{2}x+\frac{11e}{24}x^2-\frac{7e}{16}x^3+o(x^3)$. 8) $1+x-x^2+\frac{3}{2}x^3+o(x^3)$. 9) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)$.

18.38. 1) $e+\frac{e}{6}x^2+\frac{e}{30}x^4+o(x^4)$. 2) $1-x+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{6}x^3+\frac{19}{8}x^4+o(x^4)$. 3) $3x+\frac{27}{2}x^3+o(x^4)$. 4) $x-\frac{x^3}{2}+o(x^4)$. 5) $1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{720}x^4+o(x^4)$. 6) $1-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}+o(x^4)$. 7) $1-\frac{x^2}{6}-\frac{17}{360}x^4+o(x^4)$. 8) $1+\frac{x^2}{3}-\frac{4}{45}x^4+o(x^4)$. 9) $1+x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^4)$.

18.39. 1) $1-6x+21x^2-32x^3+15x^4+66x^5+o(x^5)$. 2) $x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+o(x^5)$. 3) $1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^5)$. 4) $1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{24}x^4+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$. 5) $-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+o(x^5)$. 6) $1+x^2-x^3+\frac{23}{12}x^4-\frac{17}{6}x^5+o(x^5)$. 7) $1+x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{2}{3}x^4+\frac{2}{3}x^5+o(x^5)$.

18.40. 1) $x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)$. 2) $e\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2-e^2\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^4+e^3\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^6-\frac{4}{3}e^4\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^8+o\left(\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^9\right)$. 3) $5+5x^4-10\ln 5\cdot x^6+\frac{25}{2}x^8+o(x^9)$. 4) $2^{1973}(x-1)^{1973}+o\left((x-1)^{1973}\right)$.

18.41. 1) $A=1$, $B=1$. 2) $A=4/3$, $B=-1/3$. 3) $A=1$, $B=-1$. 4) $A=-1/15$, $B=-2/5$.

18.42. 1) 5,027. 2) 3,019. 3) 3,017. 4) 1,396. 5) 0,996. 6) 0,309. 7) 0,262. 8) 0,675.

18.43. 1) $e/(n+1)!$. 2) $1/7!$. 3) $1/(2^8 8!)$. 4) $2\cdot 10^{-6}$. 5) $2\cdot 10^{-6}$. 6) $1,5\cdot 10^{-3}$.

18.44. 1) 2,7182818. 2) 3,162. 3) 0,017452. 4) 0,99619. 5) 3,1072. 6) 1,0414.

§ 19. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

19.1. 1) $-1/2$. 2) 1. 3) $1/2$. 4) $1/24$. 5) $27/4$. 6) $1/2$. 7) $4/3$. 8) 0. **19.2.** 1) -2. 2) -1. 3) -1. 4) $8/15$. 5) -1. 6) -2. 7) $7/6$. 8) 0. **19.3.** 1) $-e/2$. 2) 1. 3) $11e/24$. 4) $\pi/4$. **19.4.** 1) $3/2$. 2) $4/3$. 3) $-1/8$. 4) $-1/2$. 5) -4. **19.5.** 1) 2. 2) $7/8$. 3) $1/8$. 4) 44. 5) $40/3$. **19.6.** 1) 0. 2) 3. 3) $-11/12$. 4) $-13/12$. **19.7.** 1) -1. 2) 2. 3) -4. 4) $1/8$. 5) 3. 6) $-1/4$. 7) -10. 8) -1. **19.8.** 1) -3. 2) $1/8$. 3) $-1/6$. 4) $5/2$. 5) $7/5$. 6) $11/4$. **19.9.** 1) $3/4$. 2) -1. 3) $1/4$. 4) $1/8$. 5) $-1/6$. 6) $-1/8$. **19.10.** 1) $4/9$. 2) -1. 3) -6. 4) $7/6$. 5) -6. 6) $21e/20$. 7) $2/5$. 8) -4. **19.11.** 1) $7/4$. 2) $3/2$. 3) $3/2$. 4) $13/15$. 5) 4. 6) 1. **19.12.** 1) $15/2$. 2) $3/4$. 3) $3/7$. 4) 23. 5) $9/2$. 6) 5. **19.13.** 1) $1/18$. 2) -1. 3) $5/(12e^3)$. 4) $1/7$. 5) $-\dfrac{11}{12}\cos^2 1$. 6) $-2e^2$. **19.14.** 1) $-32/3$. 2) $9/16$. 3) 9. 4) $28/3$. 5) $-72/5$. 6) $1/4$. 7) -1. 8) $24/7$. **19.15.** 1) 2. 2) 0. 3) $-27/5$. 4) $\dfrac{5}{2}\cos 1$. **19.16.** 1) 1. 2) $1/2$. 3) $1/2$. 4) $7/24$. **19.17.** 1) $-7/5$. 2) $7/45$. 3) $1/12$. 4) $72/5$. **19.18.** 1) $5e/8$. 2) $1/7$. 3) $14/3$. 4) $4/3$. **19.19.** $\alpha = -1/2$, $n = 4$. **19.20.** 1) $e^{-1/2}$. 2) $e^{-1/2}$. 3) $e^{1/2}$. 4) e^{-5}. 5) $e^{-7/2}$. 6) Не существует. **19.21.** 1) $e^{1/6}$. 2) $e^{-1/6}$. 3) $e^{-1/3}$. 4) $e^{2/3}$. **19.22.** 1) $e^{1/4}$. 2) $e^{7/3}$. 3) $e^{-2/3}$. 4) e^{-2}. **19.23.** 1) e. 2) $e^{-7/3}$. 3) $e^{7/3}$. **19.24.** 1) e^{-1}. 2) $e^{1/9}$. 3) $e^{-1/18}$. 4) $e^{-1/6}$. **19.25.** 1) $e^{-1/2}$. 2) $e^{2/3}$. 3) $e^{-3/8}$. 4) $e^{-1/4}$. **19.26.** 1) $e^{-1/24}$. 2) $e^{1/6}$. 3) $e^{-5/4}$. 4) $e^{-3/4}$. **19.27.** 1) $e^{8/15}$. 2) $e^{-3/10}$. 3) $e^{-23/30}$. 4) $e^{9/20}$. **19.28.** 1) $e^{-5/6}$. 2) $e^{-1/8}$. 3) $e^{7/12}$. **19.29.** 1) $e^{7/12}$. 2) $e^{-25/3}$. 3) $e^{-5/2}$. 4) e^{-4}. **19.30.** 1) $e^{5/2}$. 2) $e^{43/81}$. 3) $e^{-5/12}$. 4) $e^{-1/12}$. **19.31.** 1) $e^{2/3}$. 2) $e^{7/6}$. 3) $e^{2/3}$. 4) $e^{7/6}$. **19.32.** 1) $e^{1/12}$. 2) $e^{-1/6}$. 3) $e^{7/6}$. 4) $e^{28/3}$. **19.33.** 1) $e^{1/6}$. 2) $e^{-3/16}$. 3) e. 4) $e^{-1/2}$. **19.34.** 1) $e^{-4/9}$. 2) $e^{-(\pi^2+4)/(3\pi^3)}$. 3) $e^{-7/6}$. **19.35.** 1) $e^{-7/6}$. 2) e^2. 3) e^{-4}. **19.36.** 1) $e^{-25/81}$. 2) $e^{-5/3}$. 3) $e^{-7/4}$. **19.37.** 1) e^2. 2) $e^{-1/2}$. 3) $e^{-13/4}$. 4) e^{24}. **19.38.** 1) e^{-2}. 2) $e^{-3/8}$. 3) $e^{-1/15}$. **19.39.** 1) e^{-1}. 2) e^{-4}. 3) 1. **19.40.** 1) $e^{1/2}$. 2) $e^{5/24}$. 3) $e^{-1/8}$. **19.41.** 1) $e^{14/15}$. 2) e^e. 3) e^9. 4) $e^{7/16}$. **19.42.** 1) $e^{-8/9}$. 2) e. **19.44.** 1) e^{-1}. 2) $e^{-5/6}$. **19.45.** 1) $e^{2/3}$. 2) $e^{13/90}$. 3) e^2. **19.46.** 1) $e^{-1/8}$. 2) $e^{\pi/6}$. **19.47.** 1) e^3. **19.48.** 1. **19.49.** 1) e^{-2}. 2) e. 3) $e^{1/(8\cos 2/1)}$. **19.50.** 1) $e^{1/(2\cos^2 1)}$. 2) Предел не существует. 3) $e^{1/6}$. **19.51.** $e^{-1/3}$. **19.52.** $-2/5$ **19.53.** 1) $7/6$. 2) $3/2$. **19.54.** 1) $-\pi$. 2) $-\pi$. 3) $1/6$. **19.55.** -3. **19.56.** 1) 0. 2) 0. 3) $1/3$. 4) $-1/2$. **19.57.** 1) $1/2$. 2) $2+\ln 2$. 3) $1/3$. **19.58.** $5/18$. **19.59.** 1) 1. 2) $17/12$. **19.60.** 1) $2/5$. 2) $11/6$. 3) $-4/3$. 4) $1/2$.

§ 20. Исследование функций

20.1. 1) $(-\infty; 1/2)$, $(3; +\infty)$ — интервалы возрастания, $(1/2; 3)$ — интервал убывания. 2) $(-\infty; 6)$ — интервал возрастания, $(6; +\infty)$ — интервал убывания. 3) $(-\infty; 1)$, $(3; +\infty)$ — интервалы возрастания, $(1; 3)$ — интервал убывания. 4) $(-\infty; -3/2)$, $(-1/2; +\infty)$ — интервалы возрастания, $(-3/2; -1/2)$ — интервал убывания.

20.2. 1) $(-\infty; 1/3)$ — интервал возрастания, $(1/3; +\infty)$ — интервал убывания. 2) $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ — интервалы убывания, $(1; +\infty)$ — интервал возрастания. 3) $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$ — интервалы возрастания, $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$ — интервалы убывания. 4) $(0; \alpha)$ — интервал возрастания, $(\alpha; +\infty)$ — интервал убывания. 5) $(0; \sqrt{5})$ — интервал убывания, $(\sqrt{5}; +\infty)$ — интервал возрастания. 6) $(0; 1/\sqrt{e})$ — интервал убывания, $(1/\sqrt{e}; +\infty)$ — интервал возрастания. 7) $(0; 1)$, $(1; e)$ — интервалы убывания, $(e; +\infty)$ — интервал возрастания. 8) $(-\infty; 3)$, $(3; +\infty)$ — интервалы убывания. 9) $(0; +\infty)$ — интервал убывания.

10) $\left(2k - \dfrac{3}{4};\ 2k + \dfrac{1}{4}\right)$, $k \in Z$, — интервалы возрастания, $\left(2k + \dfrac{1}{4};\ 2k + \dfrac{5}{4}\right)$, $k \in Z$, — интервалы убывания.

20.3. 1) $(-\infty; -2)$, $(-2; -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}; +\infty)$ — интервалы возрастания, $(-\sqrt{2}; -1)$, $(-1; \sqrt{2})$ — интервалы убывания 2) $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$ — интервалы убывания. 3) $(-\infty; -3)$, $(3; +\infty)$ — интервалы убывания, $(-3; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; 3)$ — интервалы возрастания. 4) $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$ — интервалы убывания, $(0; 2)$ — интервал возрастания.

20.4. 1) $(-\infty; -50)$, $(-50; 25)$ — интервалы возрастания, $(25; +\infty)$ — интервал убывания. 2) $(-2\sqrt{2}; -2)$, $(0; 2)$ — интервалы возрастания, $(-2; 0)$, $(2; 2\sqrt{2})$ — интервалы убывания. 3) $\left(-\dfrac{9}{2}; -3\right)$, $(0; +\infty)$ — интервалы возрастания, $(-3; 0)$ — интервал убывания. 4) $(-1; -2/5)$ — интервал убывания, $(-2/5; +\infty)$ — интервал возрастания. 5) $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; +\infty)$ — интервалы возрастания, $(-\sqrt{3}; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; \sqrt{3})$ — интервалы убывания. 6) $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$ — интервалы возрастания. 7) $(-\infty; -1)$; $(0; +\infty)$ — интервалы возрастания.

20.5. 1) $(-2; 0)$ — интервал возрастания, $(-\infty; -2)$, $(0; +\infty)$ — интервалы убывания. 2) $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in Z$, — интервалы возрастания, $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in Z$, — интервалы убывания.

20.6. 1) $(-\infty; 0)$ — интервал возрастания, $(0; +\infty)$ — интервал убывания. 2) $(0; 1)$ — интервал возрастания, $(1; +\infty)$ — интервал убывания.

20.7. $(-\infty; -e^{-2})$ — интервал возрастания, $(-e^{-2}; 0)$ — интервал убывания.

20.8. 1) $a \leqslant 0$. 2) $a \leqslant -3$, $a \geqslant 1$. 3) $a \geqslant 1$. 4) $a \geqslant 5$. 5) $a \geqslant 6$. 6) $-1 \leqslant a \leqslant 7$.

20.11. Нет, не следует; контрпример $f(x) = x + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

20.13. 1) $x = 0$ — точка максимума, $x = 8/3$ — точка минимума. 2) $x = (3 - \sqrt{17})/4$ и $x = 3$ — точки минимума, $x = (3 + \sqrt{17})/4$ — точка максимума. 3) $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k$ — точки максимума, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ — точки минимума, $k \in Z$. 4) $x = (2 + \sqrt{7})/3$ — точка максимума, $x = (2 - \sqrt{7})/3$ — точка минимума. 5) $x = 4$ — точка минимума. 6) $x = 1/2$ — точка минимума. 7) $x = 1$ — точка максимума, $x = 2$ — точка минимума. 8) $x = -5/4$ — точка максимума.

20.14. $x = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. **20.15.** $x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

20.16. 1) Максимум $y = 12$ при $x = 0$, минимум $y = -4$ при $x = \pm 2$. 2) Максимум $y = 2$ при $x = 0$. 3) Максимум $y = 1$ при $x = 2$, минимумы $y = 3/4$ при $x = 1$ и $x = 3$. 4) Минимум $y = 4$ при $x = 1$. 5) Минимум $y = -324$ при $x = 1$, максимум $y = 0$ при $x = -5$. 6) Минимум $y = -108$ при $x = 0$, максимум $y = 0$ при $x = -2$.

20.17. 1) Максимум $y = -4$ при $x = 1/2$. 2) Минимум $y = -1/4$ при $x = -2$, максимум $y = 1/4$ при $x = 2$. 3) Максимум $y = -8$ при $x = -3$, минимум $y = 0$ при $x = 1$. 4) Максимум $y = -27/4$ при $x = 5$. 5) Минимум $y = 0$ при $x = 0$, минимум $y = 32/3$ при $x = 4$, максимум $y = 1/4$ при $x = -1$. 6) Минимум $y = 0$ при $x = 0$, максимум $y = -256/27$ при $x = -4$.

20.18. 1) Минимумы $y = -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ при $x = 2\pi k - \dfrac{\pi}{3}$, максимумы $y = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ при $x = 2\pi k + \dfrac{\pi}{3}$, $k \in Z$. 2) Максимумы $y = 1$ при $x = 2\pi k$ и $x = 2\pi k + \dfrac{\pi}{2}$, максимумы $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ при $x = 2\pi k + \dfrac{5\pi}{4}$, минимумы $y = -1$ при $x = 2\pi k + \pi$

и $x=2\pi k+\frac{3\pi}{2}$, минимумы $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x=2\pi k+\frac{\pi}{4}$, $k\in Z$. 3) Максимумы $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$ при $x=2\pi k+\frac{2\pi}{3}$, минимумы $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ при $x=2\pi k-\frac{2\pi}{3}$, $k\in Z$. 4) Экстремумов нет. 5) Максимумы $y=\frac{\pi+6\sqrt{3}-12}{12}+\pi k$ при $x=\frac{\pi}{12}+\pi k$, минимумы $y=\frac{5\pi-6\sqrt{3}-12}{12}+\pi k$ при $x=\frac{5\pi}{12}+\pi k$, $k\in Z$. 6) Максимум $y=\frac{\pi}{2}-1$ при $x=-1$, минимум $y=1-\frac{\pi}{2}$ при $x=1$. 7) Минимумы $y=-2n$ при $x=2-2n$, минимумы $y=1-2n$ при $x=1+2n$, максимумы $y=2n-1$ при $x=3-2n$, максимумы $y=2n$ при $x=2+2n$, $n\in \mathrm{N}$. 8) Минимум $y=\frac{\pi}{4}-1$ при $x=1$, максимум $y=0$ при $x=0$.

20.19. 1) Минимум $y=-e^2/3$ при $x=2/3$. 2) Минимум $y=-6e^{-3}$ при $x=-3$, максимум $y=2e$ при $x=1$. 3) Минимум $y=-4e^2$ при $x=-2$, максимум $y=8e^{-4}$ при $x=4$. 4) Максимум $y=27e^{-3}/64$ при $x=3/4$. 5) Максимумы $y=4e^{-2}$ при $x=\pm\sqrt{2}$, минимум $y=0$ при $x=0$. 6) Максимум $y=5^5e^{-4}$ при $x=4$. 7) Максимум $y=6$ при $x=0$. 8) Максимум $y=1/e$ при $x=-1$, минимум $y=4\sqrt{e}$ при $x=2$.

20.20. 1) Минимум $y=-2/e$ при $x=e^{-2}$. 2) Минимум $y=0$ при $x=1$, максимум $y=4e^{-2}$ при $x=e^2$. 3) Максимум $y=1/\ln 3$ при $x=-3$. 4) Минимумы $y=-4$ при $x=1$ и $x=3$. 5) Максимумы $y=-1$ при $x=2k\pi$, $k\in Z$. 6) Минимум $y=\ln 2-\pi/2$ при $x=1$.

20.21. 1) Максимум $y=13/4$ при $x=11/4$, односторонний минимум $y=3$ при $x=3$. 2) Минимум $y=0$ при $x=1$, максимум $y=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ при $x=1/3$. 3) Минимум $y=0$ при $x=0$; максимум $y=4/27$ при $x=8/27$. 4) Минимум $y=-3\sqrt[3]{2}/8$ при $x=3/4$. 5) Минимум $y=1$ при $x=0$, максимумы $y=\sqrt[3]{4}$ при $x=\pm\sqrt{2}/2$. 6) Минимум $y=\sqrt{3}$ при $x=2\sqrt{3}$, максимум $y=-\sqrt{3}$ при $x=-2\sqrt{3}$. 7) Минимумы $y=0$ при $x=2$ и $x=4$, максимум $y=1$ при $x=3$. 8) Минимум $y=-\sqrt[3]{4}/3$ при $x=4/3$, максимум $y=0$ при $x=2$. 9) Минимум $y=\sqrt[3]{12}$ при $x=4/3$, максимум $y=0$ при $x=2/3$. 10) Максимум $y=1$ при $x=-1$.

20.22. 1) Минимум $y=e^{-1/e}$ при $x=1/e$. 2) Максимум $y=e^{1/e}$ при $x=e$.

20.23. 1) Максимум $y=27/16$ при $x=9/2$, минимум $y=0$ при $x=5$. 2) Максимум $y=49/24$ при $x=7/12$, минимум $y=0$ при $x=0$, минимум $y=1$ при $x=1$. 3) Максимум $y=1/\sqrt{21}$ при $x=1/3$, максимум $y=1/\sqrt{33}$ при $x=7/3$, минимум $y=1/7$ при $x=1$. 4) Максимум $y=2\sqrt[3]{4}/3$ при $x=4/3$, минимумы $y=0$ при $x=0$ и $x=2$. 5) Максимум $y=9\sqrt[3]{6}/8$ при $x=-5/4$, минимум $y=0$ при $x=1$. 6) Максимумы $y=2(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}-1}$ при $x=\pm(1-\sqrt{2})$, минимумы $y=0$ при $x=\pm 1$, минимум $y=1$ при $x=0$. 7) Максимумы $y=2(\sqrt{5}+1)e^{-1-\sqrt{5}}$ при $x=\pm(1+\sqrt{5})$, максимум $y=4$ при $x=0$, минимумы $y=0$ при $x=\pm 2$. 8) Максимум $y=1/2$ при $x=1$, минимум $y=1/e$ при $x=0$.

20.24. 1) Максимум $y=\cos 1$ при $x=\pi/2$. 2) Максимум $y=2\sin((\pi+6)/4)$ при $x=(6-\pi)/4$, минимум $y=\cos 3$ при $x=3$. 3) Минимум $y=2-\sqrt{3}$ при $x=\pi/2$.

20.25. 1) Максимум $y=0$ при $x=0$, минимум $y=-1/e$ при $x=1/e$. 2) Максимум $y=1$ при $x=0$, минимум $y=e^{-1/(3e)}$ при $x=1/\sqrt[3]{e}$. 3) Максимум $y=e^{1/e^2}$ при $x=1/e$, минимум $y=1$ при $x=1$.

20.26. 1) Максимум $y=n^ne^{1-n}$ при $x=n-1$, $n\in \mathrm{N}$; если n — четное, то минимум $y=0$ при $x=-1$. 2) Если n — нечетное, то максимум $y=1$ при $x=0$; если n — четное, экстремумов нет. 3) Максимум $y=k^kn^n/(k+n)^{k+n}$ при $x=k/(k+n)$; если k — четное, то минимум $y=0$ при $x=0$; если n — четное, то минимум $y=0$ при $x=1$. 4) Если $ab>0$, $a>0$, то минимум $y=2\sqrt{ab}$ при $x=\frac{1}{2p}\ln\frac{b}{a}$; если $ab>0$, $a<0$, то максимум $y=-2\sqrt{ab}$ при $x=\frac{1}{2p}\ln\frac{b}{a}$.

20.27. Если $\varphi(a)>0$ и n — четное, то минимум $y=0$; если $\varphi(a)<0$ и n — четное, то максимум $y=0$; если n — нечетное, то экстремума нет.

20.28. 1) Максимум $y=\sqrt[3]{4}$ при $x=2$, минимум $y=0$ при $x=0$. 2) Максимум $y=\sqrt{2}-1$ при $x=-1$, минимум $y=1-\sqrt{2}$ при $x=1$. 3) Максимум $y=\sqrt{2}$ при $x=0$, минимумы $y=\sqrt{(2+\sqrt{3})/2}$ при $x=\pm\sqrt{2}/2$. 4) Минимум $y=3/\sqrt[3]{32}$ при $x=-1/\sqrt[3]{32}$.

20.29. 1) Минимум $y=4$ при $x=1/2$. 2) Максимум $y=0$ при $x=-\ln 2/2$.

20.37. 1) 9; -7. 2) 80; 0. 3) Наибольшее значение не существует; -204. 4) 3; -13. 5) 2; -10.

20.38. 1) Наибольшее значение не существует; 64; 2) 1; 3/5. 3) 2; 2/3. 4) 1; $2\sqrt{2}-2$.

20.39. 1) $5-2\sqrt{5}$; -1. 2) $e-2$; $2-2\ln 2$. 3) 0; $-5/e$. 4) $5+1{,}5\ln 2$; 0. 5) e^5; $-e^3$. 6) 1; $1/e^{1/e}$.

20.40. 1) $3\sqrt{3}/2$; -2. 2) 3/4; 3/4. 3) 13π; $12\pi-1$. 4) π; $-\pi$.

20.41. 1) Минимум $y=0$ при $x=3$, минимум $y=9$ при $x=0$, максимум $y=4e$ при $x=1$; $m=0$, $M=e^4$. 2) Минимум $y=-27e$ при $x=0$, максимум $y=-65$ при $x=-1$, $m=-125e$, $M=e^5$. 3) Минимумы $y=1$ при $x=0$ и $x=-1$, максимум $y=e^{2\sqrt{3}/9}$ при $x=-2/3$; $m=1$, $M=e^2$. 4) Минимумы $y=0$ при $x=0$ и $x=-1$, максимум $y=\ln\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ при $x=-1/3$; $m=0$, $M=\ln 3$. 5) Минимумы $y=0$ при $x=0$ и $x=1$, максимум $y=\operatorname{arctg}(2\sqrt{3}/9)$ при $x=1/3$; $m=0$, $M=\operatorname{arctg} 2$. 6) Минимум $y=\operatorname{arcctg}(2\sqrt{3}/9)$ при $x=2/3$, максимумы $y=\pi/2$ при $x=0$ и $x=1$; $m=\operatorname{arcctg} 2$, $M=\pi/2$.

20.42. 1) Минимум $y=-2$ при $x=1/e$, максимум $y=0$ при $x=0$; $m=-2$, $M=4e\ln 2$. 2) Минимум $y=e^{-1/(2e)}$ при $x=e^{-1/2}$, максимум $y=1$ при $x=0$; $m=-2$; $M=16$. 3) Минимум $y=2/\sqrt{3}$ при $x=\sqrt{3}$, минимум $y=4/\sqrt{6}$ при $x=\sqrt{6}$, максимум $y=5/3$ при $x=2$; $m=2/\sqrt{3}$, $M=2$.

20.43. 1) Минимум $y=-2$ при $x=-2\pi/3$, максимум $y=3/2$ при $x=0$; $m=-2$, $M=3/2$. 2) Минимум $y=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x=0$, минимум $y=-\sqrt{2}$ при $x=-\pi/2$, максимумы $y=0$ при $x\in(0;\pi)$; $m=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $M=0$. 3) Минимум $y=-\sqrt{2}$ при $x=-5\pi/12$, минимум $y=-2\sin(\pi/12)$ при $x=\pi/4$, минимум $y=-1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ при $x=0$; $m=-1-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $M=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

20.44. 1) $n=7$. 2) $n=1985$. 3) $n=10$. 4) $n=7$. 5) $n=12$. 6) $n=14$.

20.45. 1) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$; $+\infty$. 2) $-\infty$; -1. 3) $-\infty$; 1. 4) $\sqrt{2}-3\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$; $+\infty$.

20.46. 1) 0; 4. 2) $-(\sqrt{2}/2)\,e^{-3\pi/4}$; 1. 3) 0; $1/e$. 4) $1/e^{1/e}$; 1.

20.47. 1) 5; $+\infty$. 2) 5/2; $+\infty$. 3) 0; $\sqrt{3}$.

$$4)\ \inf f = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & a \leqslant 0, \\ \dfrac{a^2+1}{a^2+3}, & 0 < a, \end{cases} \qquad \sup f = 1.$$

20.48. 1) Выпукла вниз. 2) Выпукла вверх. 3) Выпукла вниз. 4) Выпукла вверх. 5) Выпукла вниз. 6) Выпукла вверх при $x > 0$, выпукла вниз при $x < 0$.

20.49. 1) Выпукла вверх на интервале $(-1/2;\ 1/2)$, выпукла вниз на интервалах $(-\infty;\ -1/2)$ и $(1/2;\ +\infty)$; точки перегиба $x = \pm 1/2$. 2) $(-\infty;\ 1)$ — интервал выпуклости вверх, $(1;\ +\infty)$ — интервал выпуклости вниз; точка перегиба $x = 1$. 3) $(-\infty;\ -1)$ и $(1;\ +\infty)$ — интервалы выпуклости вверх, $(-1;\ 1)$ — интервал выпуклости вниз; точек перегиба нет. 4) $(-\infty;\ -6)$ и $(0;\ 6)$ — интервалы выпуклости вниз, $(-6;\ 0)$ и $(6;\ +\infty)$ — интервалы выпуклости вверх; точки перегиба $x = 0$, $x = \pm 6$. 5) $(-\infty;\ -3)$ — интервал выпуклости вниз, $(-3;\ +\infty)$ — интервал выпуклости вверх; точка перегиба $x = -3$. 6) $\left(0;\ (2+\sqrt{3})/\sqrt{3}\right)$ — интервал выпуклости вверх, $\left((2+\sqrt{3})/\sqrt{3};\ +\infty\right)$ — интервал выпуклости вниз; точка перегиба $x = (2+\sqrt{3})/\sqrt{3}$. 7) $(-\infty;\ -\sqrt{3})$ и $(0;\ \sqrt{3})$ — интервалы выпуклости вниз, $(-\sqrt{3};\ 0)$ и $(\sqrt{3};\ +\infty)$ — интервалы выпуклости вверх; точки перегиба $x=0$, $x = \pm\sqrt{3}$. 8) $(-\infty;\ -3)$, $(-1;\ 0)$, $(1;\ 3)$ — интервалы выпуклости вниз, $(-3;\ -1)$, $(0;\ 1)$, $(3;\ +\infty)$ — интервалы выпуклости вверх; точки перегиба $x = 0$, $x = \pm 3$.

20.50. 1) $(\pi(4k+1)/2;\ \pi(4k+3)/2)$ — интервалы выпуклости вниз, $(\pi(4k+3)/2;\ \pi(4k+5)/2)$ — интервалы выпуклости вверх, точки перегиба $x = \pi(2k+1)/2$, $k \in Z$. 2) $(2k\pi;\ (2k+1)\pi)$ — интервалы выпуклости вверх, $((2k+1)\pi;\ (2k+2)\pi)$ — интервалы выпуклости вниз; точки перегиба $x = k\pi$, $k \in Z$. 3) $(-\infty;\ -1/\sqrt{2})$ и $(1/\sqrt{2};\ +\infty)$ — интервалы выпуклости вниз, $(-1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2})$ — интервал выпуклости вверх; точки перегиба $x = \pm 1/\sqrt{2}$. 4) $(-\infty;\ -1/2)$ — интервал выпуклости вверх, $(-1/2;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$ — интервалы выпуклости вниз; точка перегиба $x = -1/2$. 5) $(0;\ 10e\sqrt{e})$ — интервал выпуклости вверх, $(10e\sqrt{e};\ +\infty)$ — интервал выпуклости вниз; точка перегиба $x = 10e\sqrt{e}$. 6) $\left(e^{\pi(8k-3)/4};\ e^{\pi(8k+1)/4}\right)$ — интервалы выпуклости вниз, $\left(e^{\pi(8k+1)/4};\ e^{\pi(8k+5)/4}\right)$ — интервалы выпуклости вверх: точки перегиба $x = e^{\pi(4k+1)/4}$, $k \in Z$. 7) $(-\infty;\ 0)$ — интервал выпуклости вверх, $(0;\ +\infty)$ — интервал выпуклости вниз; точек перегиба нет. 8) $(-\infty;\ 1/2)$ — интервал выпуклости вниз, $(1/2;\ +\infty)$ — интервал выпуклости вверх; точка перегиба $x = 1/2$.

20.51. 1) $x = \pm 1$. 2) $x = 2$, $x = 4$. 3) Точек перегиба нет. 4) $x = \pm 1$, $x = \pm 1/\sqrt{5}$.

20.52. 1) $x = -\sqrt[3]{2}/2$. 2) $x = -2 \pm \sqrt{3}$. 3) $x = \pm 2$. 4) $x = 1$. 5) $x = 3$.

20.53. 1) $x = -3$, $x = -1$. 2) $x = 0$, $x = (3 \pm \sqrt{3})/4$. 3) $x = 1/e\sqrt{e}$. 4) $x = e^{8/3}$. 5) $x = 2k\pi \pm \arccos\left((\sqrt{5}-1)/2\right)$, $k \in Z$.

20.54. 1) $(1;\ 0)$, $(1/2;\ -9/4)$. 2) $(-3;\ 294)$, $(2;\ 114)$. 3) $(1/\sqrt{3};\ 23/18)$, $(-1/\sqrt{3};\ 23/18)$. 4) $(4;\ -1024/5)$. 5) $(8/7;\ -31/9)$. 6) У графика функции точек перегиба нет.

20.55. 1) $(0;\ 1)$, $(1;\ 0)$. 2) $(-1;\ -1)$, $(0;\ -1)$. 3) $(5;\ 5)$. 4) $(\sqrt[3]{2};\ \sqrt[3]{2})$.

20.56. 1) $((2+\sqrt{2})/2;\ \sqrt{e})$, $((2-\sqrt{2})/2;\ \sqrt{e})$.

2) $(0;\ 0)$, $\left(\sqrt{6};\ \dfrac{1}{e}\sqrt{\dfrac{6}{e}}\right)$, $\left(-\sqrt{6};\ -\dfrac{1}{e}\sqrt{\dfrac{6}{e}}\right)$. 3) $\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2} - \ln 2\right)$.

4) $\left((6k + (-1)^k)\,\pi/12;\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}\,e^{-(6k+(-1)^k)\,\pi/6}\right)$, $k \in Z$.

20.57. 1) $x = \pm\sigma$. 2) $x = 0$, $x = \pm b\sqrt{3}$.

20.58. 1) Одна точка перегиба $x = -b/(3a)$. 2) Если $3b^2 - 8ac > 0$, то две точки перегиба $x = (-3b \pm \sqrt{9b^2 - 24ac})/12a$; если $3b^2 - 8ac \leqslant 0$, то точек перегиба нет.

20.59. $a \in \left(-\infty;\ -\dfrac{e}{6}\right)$, $a \in (0;\ +\infty)$. **20.63.** 1) Не может. 2) Не может. **20.67.** 1) $\left(\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}};\ \sqrt{2}\,e^{-\sqrt{2}}\right)$. 2) $(9/2;\ 27/2)$. 3) $(5;\ 21/2)$. 4) $(1/10;\ 1/4)$.

20.73. Указание. Можно либо воспользоваться неравенством из задачи 20.72, положив в нем $x = a/b$, $\alpha = 1/p$, $p/(p-1) = q$, либо, прологарифмировав неравенство Юнга, использовать выпуклость вверх функции $\ln x$.

20.74. Указание. В неравенстве Юнга (задача 20.73) положить

$$a = \frac{x_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p}, \qquad b = \frac{y_i^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q}$$

и просуммировать полученные неравенства по i от 1 до n.

20.75. Указание. Применить неравенство Гёльдера (задача 20.74) к суммам правой части тождества:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^{n} x_i (x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i (x_i + y_i)^{p-1}.$$

§ 21. Построение графиков

21.3. 1) Точки пересечения с осями координат: $(-1;\ 0)$, $(2;\ 0)$, $(0;\ 4)$; минимум $y = 0$ при $x = 2$, максимум $y = 4$ при $x = 0$; точка перегиба $(1;\ 2)$. (2 Точки пересечения с осями координат: $(1;\ 0)$, $((-1 \pm \sqrt{13})/2;\ 0)$, $(0;\ -3)$; минимум $y = -16\sqrt{3}/9 - 3$ при $x = -2\sqrt{3}/3$, максимум $y = 16\sqrt{3}/9 - 3$ при $x = 2\sqrt{3}/3$; точка перегиба $(0;\ -3)$. 3) Точки пересечения с осями координат: $(1;\ 0)$, $(-2;\ 0)$, $(0;\ 2)$; минимум $y = 0$ при $x = 1$, максимум $y = 4$ при $x = -1$; точка перегиба $(0;\ 2)$. 4) Точки пересечения с осями координат: $(2;\ 0)$, $(-4;\ 0)$, $(0;\ 4)$; минимум $y = 0$ при $x = 2$, максимум $y = 8$ при $x = -2$; точка перегиба $(0;\ 4)$. 5) Точки пересечения с осями координат: $(0;\ 0)$, $(1;\ 0)$; минимум $y = -27/256$ при $x = 1/4$; точки перегиба $(1/2;\ -1/16)$, $(1;\ 0)$. 6) Точки пересечения с осями координат: $(-2;\ 0)$, $(1;\ 0)$, $(0;\ 4)$; минимумы $y = 0$ при $x = -2$ и $x = 1$, максимум $y = 81/16$ при $x = -1/2$; точки перегиба $(0;\ 4)$, $(-1;\ 4)$. 7) Точки пересечения с осями координат: $(-1;\ 0)$, $(1;\ 0)$, $(0;\ -1)$; максимум $y = 0$ при $x = -1$, минимум $y = -864/3125$ при $x = -1/5$; точки перегиба функции $x = 1$, $x = (\sqrt{34} - 2)/10 \approx 0{,}4$, $x = -(\sqrt{34} + 2)/10 \approx -0{,}8$. 8) График симметричен относительно оси ординат; точки пересечения с осями координат: $(0;\ 0)$, $(\pm 1;\ 0)$; минимумы $y = -27/8$ при $x = \pm 1/2$, максимум $y = 0$ при $x = 0$; точки перегиба функции

$$x = \pm 1, \quad x = \pm\sqrt{(17 + \sqrt{177})/56} \approx \pm 0{,}7,$$

$$x = \pm\sqrt{(17 - \sqrt{177})/56} \approx \pm 0{,}3.$$

21.4. 1) Область определения: вся числовая ось, кроме $x = 1$; точки пересечения с осями координат $((\pm\sqrt{5} - 1)/2;\ 0)$, $(0;\ -1)$; асимптоты $y = 1$ и

$x = 1$; минимум $y = -5/4$ при $x = 1/3$; точка перегиба $(0; -1)$. 2) Область определения: $x \neq 2$; точки пересечения с осями координат: $((1 \pm \sqrt{33})/4; 0)$, $(0; 1)$; асимптоты $y = -1$ и $x = 2$; максимум $y = 33/8$ при $x = 10/7$; точка перегиба $(8/7; 31/9)$. 3) Область определения: $x \neq 1$; точка пересечения с осями координат $(0; 0)$; асимптоты $y = 0$ и $x = 1$; максимум $y = 0$ при $x = 0$, минимум $y = -80/27$ при $x = -2$; точка перегиба функции $x = -2 \pm \sqrt{3}$. 4) Область определения: $x \neq -1$; точки пересечения с осями координат $(1; 0)$, $(0; 1)$; асимптоты $y = 0$ и $x = -1$; минимум $y = 0$ при $x = 1$, максимум $y = 2/27$ при $x = 5$; точки перегиба функции $x = 5 \pm 2\sqrt{3}$. 5) область определения: $x \neq 1$; точка пересечения с осями координат $(0; 0)$; асимптота $x = 1$; максимум $y = 27/4$ при $x = 3/2$; точка перегиба $(0; 0)$. 6) Область определения: $x \neq 0$; точки пересечения с осями координат $(2; 0)$, $(\pm 1; 0)$; асимптота $x = 0$; минимум $y \approx -0{,}3$ при $x \approx 1{,}5$; точка перегиба функции $x = -\sqrt[3]{2}$. 7) Точка пересечения с осью ординат $(0; 0{,}2)$; асимптота $y = 1$; минимум $y = 3 - 2\sqrt{2}$ при $x = 1 - \sqrt{2}$, максимум $y = 3 + 2\sqrt{2}$ при $x = 1 + \sqrt{2}$; точки перегиба $(-\sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$, $(3; 5)$. 8) Точки пересечения с осями координат: $(0; 5{,}5)$, $((-21 \pm 2\sqrt{14})/5; 0)$; асимптота $y = 5$; минимум $z = -4\sqrt{2}$ при $x = -1 - 2\sqrt{2}$, максимум $y = 4\sqrt{2}$ при $x = 2\sqrt{2} - 1$; точки перегиба $(-3; -2)$, $(\pm\sqrt{21}; 1 \pm \sqrt{21})$.

21.5. 1) Область определения: $x \neq \pm 1$; график симметричен относительно начала координат; точка пересечения с осями координат $(0; 0)$; асимптоты $y = x$, $x = \pm 1$; минимум $y = 3\sqrt{3}/2$ при $x = \sqrt{3}$, максимум $y = -3\sqrt{3}/2$ при $x = -\sqrt{3}$; точка перегиба $(0; 0)$. 2) Область определения: $x \neq 2$; точки пересечения с осями координат: $(1; 0)$, $(0; -1/4)$; минимум $y = 27/4$ при $x = 4$; асимптоты $y = x + 1$, $x = 2$; точка перегиба $(1; 0)$. 3) Область определения: $x \neq 7$; точки пересечения с осями координат $(5; 0)$, $(0; -125/49)$; асимптоты $y = x - 1$, $x = 7$; минимум $y = 13{,}5$ при $x = 11$; точка перегиба $(5; 0)$. 4) **Область определения**: $x \neq 1$; точки пересечения с осями координат $(0; 0)$, $(-2; 0)$; асимптоты $y = x + 4$, $x = 1$; минимумы $y = 0$ при $x = 0$ и $y = 32/3$ при $x = 4$, максимум $y = 1/4$ при $x = -1$; точка перегиба $(-2/7; 16/189)$. 5) Область определения: $x \neq 0$; асимптоты $y = x$ и $x = 0$; минимум $y = 19/4$ при $x = 2$, максимумы $y = 5$ при $x = 1$ и $y = -17/3$ при $x = -3$; точка перегиба $(9/7, 929/189)$. 6) Область определения: $x \neq 2$; точки пересечения с осями координат $(1; 0)$, $(-1; 0)$, $(0; 1/4)$; асимптоты $y = x + 3$, $x = 2$; максимум $y = 1/4$ при $x = 0$, минимумы $y = 0$ при $x = 1$ и $y = 32/3$ при $x = 5$; точка перегиба $(5/7; 16/185)$.

21.6. 1) Область определения: $x \neq -\sqrt[3]{2}$; точка пересечения с осями $(0; 0)$; асимптоты $y = x$, $x = -\sqrt[3]{2}$; минимум $y = 0$ при $x = 0$; максимум $y = -8/3$ при $x = -2$; точка перегиба $(\sqrt[3]{4}; 5\sqrt[3]{25}/3)$. 2) Область определения: $x \neq -1$; точка пересечения с осями координат $(0; 0)$; асимптоты $y = x - 3$, $x = -1$; минимум $y = 0$ при $x = 0$, максимум $y = -256/27$ при $x = -4$. 3) Область определения: $x \neq 0$; график симметричен относительно начала координат; точки пересечения с осями координат $x = \pm\sqrt{2/\sqrt{3} - 1} \approx \pm 0{,}4$; асимптоты $y = 3x$, $x = 0$; точки перегиба $(1; 8)$, $(-1; -8)$; функция возрастает всюду в области определения. 4) Область определения: $x \neq 1$; точки пересечения с осями координат: $(-1; 0)$, $(0; 1)$; асимптоты $y = 1, x = 1$; минимум $y = 0$ при $x = -1$; точка перегиба $(-4; 81/625)$. 5) Область определения: $x \neq \pm 1$; график симметричен относительно начала координат; точка пересечения с осями координат $(0; 0)$; асимптоты $y = x$, $x = \pm 1$; минимум $y = 25\sqrt{5}/16$ при $x = \sqrt{5}$, максимум $y = -25\sqrt{5}/16$ при $x = -\sqrt{5}$; точка перегиба $(0; 0)$. 6) Область определения: $x \neq 2$; точки пересечения с осями координат $(1; 0)$, $(0; -1/16)$; асимптоты $y = x + 3$, $x = 2$; минимум $y = 5^5/4^4$ при $x = 6$; точка перегиба $(1; 0)$. 7) Область определения: $x \neq 0$; точка пересечения с осью абсцисс $(\sqrt[5]{8}; 0) \approx (1{,}52; 0)$; асимптота $y = x$; минимум $y = -2{,}5$ при $x = -2$. 8) Область определения: $x \neq \pm 1$; график

симметричен относительно начала координат; точка пересечения с осями координат $(0; 0)$; асимптота $y = x$; максимум $y = -5\sqrt[4]{5}/4 \approx -1{,}87$ при $x = -\sqrt[4]{5} \approx -1{,}49$, минимум $y = 5\sqrt[4]{5} \approx 1{,}87$ при $x = \sqrt[4]{5} \approx 1{,}49$; точка перегиба $(0; 0)$.

21.7. 1) Область определения: $|x| \geqslant 1$; асимптоты $y = 2x$ при $x \to +\infty$ и $y = 0$ при $x \to -\infty$; функция убывает при $x \leqslant -1$ и возрастает при $x \geqslant 1$; выпукла вверх. 2) Область определения: $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 2$; точка пересечения с осями координат $(0; 0)$; асимптоты $y = 1$ при $x \to +\infty$ и $y = 2x - 1$ при $x \to -\infty$; функция возрастает при $x \leqslant 0$ и убывает при $x \geqslant 2$; выпукла вниз. 3) Область определения $\mathbb{R}$; симметрия относительно оси ординат; точка пересечения с осью ординат $(0; 2)$; минимумы $y = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$ при $x = \pm 1$, максимум $y = 2$ при $x = 0$; функция выпукла вверх. 4) Область определения $\mathbb{R}$; симметрия относительно начала координат; точка пересечения с осями координат $(0; 0)$; асимптота $y = 0$; максимум $y = \sqrt[3]{16} \approx 2{,}5$ при $x = 2$, минимум $y = -\sqrt[3]{16} \approx -2{,}5$ при $x = -2$; точка перегиба $(0; 0)$. 5) Область определения: $x \geqslant -1$; точки пересечения с осями координат $(0; -1)$, $(2 \pm \sqrt{7}; 0)$; минимум $y = -\sqrt{2}$ при $x = 1$; функция выпукла вниз. 6) Область определения: $x \geqslant 0$; общая точка с осью ординат $(0; 1/3)$; функция строго возрастающая; точка перегиба $x_0 = (\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1{,}62$, $y(x_0) \approx 8$.

21.8. 1) Область определения: $x \geqslant -9/2$, точки пересечения с осями координат $(0; 0)$, $(-9/2; 0)$; минимумы $y = 0$ при $x = 0$ и $x = -9/2$, максимум $y = 3\sqrt{3}$ при $x = -3$; функция выпукла вниз при $x > 0$ и выпукла вверх при $-9/2 < x < 0$; угловая точка $(0; 0)$. 2) Область определения: $x \leqslant 1$; точки пересечения с осями координат $(0; 0)$ и $(1; 0)$; максимум $y = 2/(3\sqrt{3}) \approx 0{,}38$ при $x = 2/3$, минимумы $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 1$; $(0; 0)$ — угловая точка; функция выпукла вниз при $x \leqslant 0$ и выпукла вверх при $0 \leqslant x \leqslant 1$. 3) Область определения: $-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant 0$ и $x \geqslant \sqrt{3}$; точки пересечения с осями $(0; 0)$, $(\pm\sqrt{3}; 0)$; максимум $y = \sqrt{2}$ при $x = -1$; точка перегиба функции $x = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$. 4) Область определения: $x \geqslant -1$; точки пересечения с осями координат $(-1; 0)$ и $(0; 0)$; минимумы $y = 0$ при $x = -1$ и $x = 0$, максимум $y = 16/(25\sqrt{5}) \approx 0{,}29$ при $x = -4/5$; точка перегиба функции $x = (\sqrt{5} - 5)/5 \approx -0{,}55$, $y = (6 - 2\sqrt{5})/5\sqrt[4]{5} \approx 0{,}21$. 5) Область определения: $x \geqslant -1$; минимум $y \approx -6\sqrt{15}/125 \approx -0{,}19$ при $x = -2/5$; точка перегиба $(-4/5; -4/(25\sqrt{5}))$. 6) Область определения: $x \leqslant 0$, $x \geqslant 4$; точки пересечения с осями координат $(0; 0)$ и $(4; 0)$; асимптоты $y = x - 1$ при $x \to +\infty$ и $y = 1 - x$ при $x \to -\infty$; функция убывает и выпукла вверх при $x \leqslant 0$, возрастает и выпукла вверх при $x \geqslant 4$.

21.9. 1) Область определения: $\mathbb{R}$; точки пересечения с осями координат $(0; \sqrt{2})$ и $(-2; 0)$; асимптоты $y = -1$ при $x \to -\infty$ и $y = 1$ при $x \to +\infty$; максимум $y = \sqrt{3}$ при $x = 1$; точки перегиба $(-0{,}5; 1)$ и $(2; 2\sqrt{6}/3)$. 2) Область определения: $\mathbb{R}$; точки пересечения с осями координат $(0; 2)$ и $(-8; 0)$; асимптоты: $y = -1$ при $x \to -\infty$ и $y = 1$ при $x \to +\infty$; максимум $y = 2$ при $x = 0$; точки перегиба функции $x_1 = -(1 + \sqrt{33})/2 \approx -3{,}4$ и $x_2 = (\sqrt{33} - 1)/2 \approx 2{,}4$, $y(x_1) \approx 1{,}2$, $y(x_2) \approx 1{,}9$. 3) Область определения: $|x| > 2$; симметрия относительно начала координат; асимптоты $y = 8$, $x = \pm 2$; функция строго убывающая на интервалах $(-\infty; -2)$ и $(2; +\infty)$. 4) Область определения: $|x| \geqslant 1/2$; симметрия относительно начала координат; точки пересечения с осями $(\pm 1/2; 0)$; асимптоты $y = 2$ при $x \to +\infty$ и $y = -2$ при $x \to -\infty$; функция возрастающая. 5) Область определения: $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 4$; точки пересечения с осями координат $(0; 0)$, $(4; 0)$; асимптоты $y = -1$ при $x \to +\infty$ и $y = 1$ при $x \to -\infty$; функция убывающая. 6) Область определения: $|x| \geqslant 1$; симметрия относительно оси ординат; точки пересечения с осями координат $(\pm 1; 0)$; асимптоты $y = x/2$ при $x \to +\infty$ и $y = -x/2$ при $x \to -\infty$; убывает на интервале $(-\infty; -1)$ и возрастает на

$(1; +\infty)$. 7) область определения $|x| > 1$; асимптоты: $y = 3$ при $x \to +\infty$, $y = -3$ при $x \to -\infty$, $x = 1$ при $x \to 1 + 0$, $x = -1$ при $x \to -1 - 0$; минимум $y = \sqrt{5}$ при $x = 3/2$; точка перегиба $(2; 4/\sqrt{3})$. 8) Область определения: $|x| > 2$; асимптоты $y = 1$ при $x \to \infty$, $x = -2$ и $x = 2$ $(y \to +\infty)$; точка пересечения с осью абсцисс $(-6; 0)$; минимум $y = 0$ при $x = -6$; функция выпукла вверх при $x < -6$ и выпукла вниз при $-6 < x < -2$ и $2 < x$. 9) Область определения: $x > 0$; асимптоты $y = 0$ при $x \to +\infty$, $x = 0$ $(y \to +\infty)$; минимум $y = 0$ при $x = 1$, максимум $y = 8/(3\sqrt{3}) \approx 1{,}5$ при $x = 3$; точка перегиба функции $x = 5$, $y(5) \approx 1{,}4$, на $(0; 1)$ и $(5; +\infty)$ функция выпукла вниз. 10) Область определения: $-2/\sqrt{3} \leqslant x < 0$, $x \geqslant 2/\sqrt{3}$; асимптоты $y = 0$ при $x \to +\infty$, $x = 0$ $(y \to +\infty)$; минимум $y = 0$ при $x = \pm 2/\sqrt{3} \approx \pm 1{,}2$, максимум $y = 1$ при $x = 2$; точки перегиба $x_1 = -2\sqrt{11 - 2\sqrt{19}}/3 \approx -1{,}0$, $x_2 \approx 2\sqrt{11 + 2\sqrt{19}}/3 \approx 3{,}0$, $y(x_1) \approx 1{,}0$, $y(x_2) \approx 0{,}9$, функция выпукла вверх на $(-2/\sqrt{3}; x_1)$ и $(2/\sqrt{3}; x_2)$. 11) Область определения: $x < 0$, $x \geqslant \sqrt[3]{2}$; точка пересечения с осью абсцисс $x = \sqrt[3]{2}$; асимптоты: $y = \sqrt{3}\,x/3$ при $x \to +\infty$, $y = -\sqrt{3}\,x/3$ при $x \to -\infty$, $x = 0$ при $x \to -0$; минимум $y = 1$ при $x = -1$. 12) Область определения: $x \leqslant 0$, $x > 2$; асимптоты $y = -(x+1)/3$ при $x \to -\infty$, $y = (x+1)/3$ при $x \to +\infty$, $x = 2 (y \to +\infty)$; минимумы $y = 0$ при $x = 0$ и $y = \sqrt{3}$ при $x = 3$; функция выпукла вверх при $x < 0$ и $x > 2$. 13) Область определения: $\mathbb{R}$; точка $(0; 0)$ — центр симметрии; асимптоты $y = -(x+8)/2$ при $x \to -\infty$, $y = -(x-8)/2$ при $x \to +\infty$; точки пересечения с осями координат $(0; 0)$, $(0; \pm 3\sqrt{7})$; минимум $y = -3\sqrt{3}/2$ при $x = -\sqrt{3}$, максимум $y = 3\sqrt{3}/2$ при $x = \sqrt{3}$; точка перегиба $(0; 0)$, на $(0; +\infty)$ функция выпукла вверх.

21.10. 1) Область определения $\mathbb{R}$; точки пересечения с осями координат $(1; 0)$, $(0; 1)$; асимптота $y = -x$; функция убывающая; точки перегиба $(1; 0)$, $(0; 1)$. 2) Область определения $\mathbb{R}$; точки пересечения с осями координат $(0; 0)$, $(3; 0)$; асимптота $y = 1 - x$; минимум $y = 0$ при $x = 0$, максимум $y = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$ при $x = 2$; точка перегиба $(3; 0)$. 3) Область определения $\mathbb{R}$; точки пересечения с осями координат $(0; 0)$, $(1; 0)$; асимптота $y = x - 2/3$; минимум $y = 0$ при $x = 1$, максимум $y = \sqrt[3]{4}/3 \approx 0{,}5$ при $x = 1/3$; точка перегиба $(0; 0)$. 4) Область определения $\mathbb{R}$; симметрия относительно начала координат; точки пересечения с осями $(0; 0)$, $(\pm 2; 0)$; асимптота $y = x$; минимум $y = -2\sqrt[3]{2}/\sqrt{3} \approx -1{,}5$ при $x = 2/\sqrt{3}$, максимум $y = 2\sqrt[3]{2}/\sqrt{3} \approx 1{,}5$ при $x = -2/\sqrt{3}$; точки перегиба $(0; 0)$, $(\pm 2; 0)$. 5) Область определения $\mathbb{R}$; точки пересечения с осями координат $(0; 0)$, $(5; 0)$; минимум $y = 0$ при $x = 5$, максимум $y = 3\sqrt[3]{4} \approx 4{,}8$ при $x = 3$; точка перегиба $(6; 6)$. 6) Область определения $\mathbb{R}$; точки пересечения с осями координат $(-1; 0)$ $(1; 0)$, $(0; 1)$; минимум $y = 0$ при $x = 1$, максимум $y = \frac{2^4 3^6}{11^3}\sqrt[3]{\frac{2}{121}} \approx 2{,}2$ при $x = \frac{7}{11}$; точки перегиба функции $x = -1$, $x = (7 + 3\sqrt{3})/11 \approx 1{,}1$, $x = (7 - 3\sqrt{3})/11 \approx 0{,}2$. 7) Область определения: $\mathbb{R}$; точки пересечения с осями координат $(0; 0)$ и $(-1; 0)$; минимум $y = 0$ при $x = 0$, максимум $y = 3\sqrt[3]{20}/25 \approx 0{,}3$ при $x = -2/5$; точка перегиба функции $x = 1/5$, $y(1/5) = 0{,}4$, функция выпукла вверх на $(-\infty; 0)$ и $(0; 1/5)$. 8) Область определения: $\mathbb{R}$; точки пересечения с осями координат $(0; 0)$ и $(1; 0)$; минимум $y = 0$ при $x = 1$, максимум $y = 9^3\sqrt[3]{44}/11^4 \approx 0{,}2$ при $x = 9/11$; точки перегиба функции $x_1 = 0$, $x_2 = (27 - 3\sqrt{37})/44 \approx 0{,}2$, $x_3 = (27 + 3\sqrt{37})/44 \approx 1{,}03$, функция выпукла вверх на $(-\infty; 0)$, $(x_2; 1)$, $(1; x_3)$. 9) Область определения $\mathbb{R}$; ось ординат — ось симметрии; точки пересечения с осями координат $(\pm 2; 0)$, $(0; 2\sqrt[3]{2})$; минимумы $y = 0$ при $x = \pm 2$, максимум $y = 2\sqrt[3]{2} \approx 2{,}5$ при $x = 0$; точки перегиба функции $x_1 = -x_2 = -2\sqrt{3}$, $y(x_1) = y(x_2) = 4$, функция выпукла вверх на $(x_1; -2)$, $(-2; 2)$ и $(2; x_2)$. 10) Область определения: $\mathbb{R}$; прямая $x = -4$ — ось симметрии; точки пересечения с осями координат $(-6; 0)$, $(-2; 0)$, $(0; 2\sqrt[3]{18})$; минимумы $y = 0$ при $x = -6$, $x = -2$, максимум $y = 2\sqrt[3]{2} \approx 2{,}5$ при $x = -4$; точки перегиба функции $x_{1,2} = -4 \mp 2\sqrt{3}$, $y(x_1) = y(x_2) = 4$, функция выпукла вверх на $(x_1; -6)$, $(-6; -2)$, $(-2; x_2)$. 11) Область определения $\mathbb{R}$; асимптота $y = -2$ при $x \to \infty$; точки пересечения с осями координат $(0; 0)$, $(3/2; 0)$; минимум $y = -3$ при $x = 3$, максимум $y = 1$ при $x = 1/3$; точка перегиба $(0; 0)$, функция выпукла вверх на $(0; 3)$, $(3; +\infty)$. 12) Область определения: $\mathbb{R}$; центр симметрии — $(0; 0)$; асимптота $y = 0$ при $x \to \infty$; точка пересечения с осями координат $(0; 0)$; минимум $y = -\sqrt[3]{4} \approx -1{,}6$ при $x = -1$, максимум $y = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$ при $x = 1$; точка перегиба $(0; 0)$, функция выпукла вниз на $(0; 1)$, $(1; +\infty)$.

21.11. 1) Область определения: $x \neq \pm 1$; симметрия относительно начала координат; точка пересечения с осями $(0; 0)$; асимптоты $x = \pm 1$; минимум $y = \sqrt{3}/\sqrt[3]{2} \approx 1{,}4$ при $x = \sqrt{3}$, максимум $y = -\sqrt{3}/\sqrt[3]{2} \approx -1{,}4$ при $x = -\sqrt{3}$; точки перегиба $(0; 0)$, $(3; 3/2)$, $(-3; -3/2)$. 2) Область определения: $x \neq -1$; точка пересечения с осями координат $(0; 0)$; асимптота $x = -1$; минимум $y = 3\sqrt[3]{2}/2 \approx 1{,}9$ при $x = -3/2$; точка перегиба $(-3; 3\sqrt[3]{4}/2)$. 3) Область определения: $x \neq 2$; точка пересечения с осями координат $(0; 0)$; асимптота $x = 2$; минимум $y = 3/\sqrt[3]{2} \approx 2{,}4$ при $x = 6$; точка перегиба $(12; 12/\sqrt[3]{100})$. 4) Область определения: $x \neq -1$; точка пересечения с осями координат $(0; 0)$; асимптота $x = -1$; минимум $y = 0$ при $x = 0$, максимум $y = -\sqrt[3]{4} \approx -1{,}6$ при $x = -2$; точки перегиба функции $x = \sqrt{3} - 2 \approx -0{,}3$, $x = -\sqrt{3} - 2 \approx -3{,}7$. 5) Область определения: $x \neq 1$, точки пересечения с осями координат $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$, $(0; -\sqrt[3]{4})$, асимптота $x = 1$, минимум $y = \sqrt[3]{12} \approx 2{,}3$ при $x = 4/3$, максимум $y = 0$ при $x = 2/3$, точки перегиба функции $x = (4 \pm \sqrt{3})/3$. 6) Область определения: $x \neq -2$; точки пересечения с осями координат $(-1; 0)$, $(0; 1/\sqrt[3]{4})$; асимптоты $y = 1$, $x = -2$; минимум $y = 0$ при $x = -1$; точка перегиба $(-7/6; 1/\sqrt[3]{25})$. 7) Область определения: $x \neq -2$; асимптоты $y = 0$ при $x \to \infty$, $x = -2$; точка пересечения с осями координат $(0; 0)$; минимум $y = 0$ при $x = 0$, максимум $y = \sqrt[3]{2}/3$ при $x = 4$; точки перегиба $x_1 = 4 - 3\sqrt{2} \approx -0{,}2$, $x_2 = 4 + 3\sqrt{2} \approx 8{,}2$, $y(x_1) \approx 0{,}2$, $y(x_2) \approx 0{,}4$, функция выпукла вверх на $(-\infty; -2)$, $(x_1; 0)$, $(0; x_2)$. 8) Область определения: $x \neq 0$; асимптоты $y = 0$ при $x \to \infty$, $x = 0$; точка пересечения с осью абсцисс $(-1; 0)$; минимум $y = 0$ при $x = -1$, максимум $y = \sqrt[3]{16}/9 \approx 0{,}3$ при $x = -1{,}5$; точки перегиба $x_1 = -(21 + 3\sqrt{7})/14 \approx -2{,}1$, $x_2 = -(21 - 3\sqrt{7})/14 \approx -0{,}9$, $y(x_1) \approx 0{,}2$, $y(x_2) \approx 0{,}1$. функция выпукла вверх на $(x_1; -1)$, $(-1; x_2)$.

21.12. 1) Область определения: $|x| \leqslant 1$; симметрия относительно оси ординат; точки пересечения с осями $(-1; 0)$, $(0; 0)$, $(1; 0)$; минимум $y = 0$ при $x = 0$, максимумы $y = 1/2$ при $x = \pm\sqrt{2}/2$. 2) Область определения $\mathbb{R}$; симметрия относительно начала координат; точки пересечения с осями $(0; 0)$, $(\pm 1; 0)$; максимумы $y = 0$ при $x = -1$ и $y = 1/2$ при $x = \sqrt{2}/2$, минимумы $y = 0$ при $x = 1$ и $y = -1/2$ при $x = -\sqrt{2}/2$; точки перегиба $(0; 0)$, $(\sqrt{3/2}; \sqrt{3/2})$, $(-\sqrt{3/2}; -\sqrt{3/2})$. 3) Область определения: $x \neq 2$; асимптоты $y = 0$ при $x \to \infty$, $x = 2$; точки пересечения с осями координат $(0; -2)$, $(1; 0)$; максимум $y = 0$ при $x = 1$, минимум $y = -2$ при $x = 0$; точки перегиба функции $x_1 = -x_2 = -2\sqrt{3}/3$, $y(x_1) = y(x_2) = -\sqrt{2\sqrt{3}} \approx -1{,}9$, функция выпукла вниз на $(x_1; 1)$, $(1; x_2)$, $(2; +\infty)$. 4) Область определения: $\mathbb{R}$; точки пересечения с осями координат $(0; 0)$, $(3; 0)$; минимумы $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 3$, максимум $y = 2$ при $x = 2$; точка перегиба $(4; 4)$, на $(-\infty; 0)$ и $(4; +\infty)$ функция выпукла вниз, на $(0; 3)$ и $(3; 4)$ — вверх. 5) Область определения: $\mathbb{R}$; точки пересечения с осями координат $(-1; 0)$, (0; 1), (1; 0); максимум $y=3\sqrt{3}/4\approx 1{,}3$ при $x=0{,}5$, минимум $y=0$ при $x=1$; точки перегиба функции $x_1=-1$, $x_2=(1-\sqrt{3})/2\approx -0{,}4$, $x_3==(1+\sqrt{3})/2\approx 1{,}4$, $y(x_1)=0$, $y(x_2)\approx 1{,}2$, $y(x_3)\approx 2{,}2$, функция выпукла вверх на $(-\infty;\ -1)$, $(x_2;\ 1)$, $(1;\ x_3)$. 6) Область определения: $\mathbb{R}$; асимптота $y=0$; точка пересечения с осью ординат $(0;\ \sqrt{3})$; максимумы $y=\sqrt{3}$ при $x=0$ и $y=\sqrt[4]{2}/4$ при $x=3$, минимум $y=1/3$ при $x=2$; точка перегиба функции $x_0=(9+4\sqrt{3})/3\approx 5{,}3$, $y(x_0)=\sqrt[4]{3}/4\approx 0{,}3$, функция выпукла вниз на $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ 2)$, $(x_0;\ +\infty)$. 7) Область определения $\mathbb{R}$; точки пересечения с осями координат $(\pm 1;\ 0)$, $(0;\ -1)$; минимум $y=-\dfrac{24}{25}\sqrt{\dfrac{6}{5}}\approx$ $\approx -1{,}1$ при $x=1/5$; точки перегиба $(-1;\ 0)$, $\left(-\dfrac{3}{5};\ -\dfrac{16}{25}\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)$. 8) Область определения: $|x|\geqslant 1$; точки пересечения с осями $(\pm 1;\ 0)$; асимптоты $y=0$, $x=2$; минимум $y=-\sqrt{3}/6$ при $x=-4$; точки перегиба функции $x=2/\sqrt{3}$, $x=-4-2\sqrt{3}$. 9) Область определения: $\mathbb{R}$; точки пересечения с осями координат (0; 0), (−1/3; 0); минимум $y=0$ при $x=0$, максимум $y=\sqrt[3]{2}/8$ при $x=-1/4$; точки перегиба $(-1/3;\ 0)$, $(-1/2;\ 1-1/(4\sqrt[3]{2}))$. 10) Область определения: $\mathbb{R}$; точки пересечения с осями (0; 0), (2; 0); асимптоты $y=x-2/3$ при $x\to+\infty$, $y=-x+2/3$ при $x\to-\infty$; минимумы $y=0$ при $x=0$ и $x=2$, максимум $y=2\sqrt[3]{4}/3$ при $x=4/3$; функция выпукла вверх.

21.13. 1) Асимптота $y=-x$ при $x\to-\infty$; минимум $y=1$ при $x=0$; функция выпукла вниз. 2) Точка пересечения с осями координат (0; 0); асимптота $y=0$ при $x\to+\infty$, максимум $y=1/(2e)\approx 0{,}2$ при $x=0{,}5$; точка перегиба $(1;\ e^{-2})$. 3) Область определения: $\mathbb{R}$; асимптота $y=0$ при $x\to+\infty$; точка пересечения с осями координат (0; 0); минимум $y=0$ при $x=0$, максимум $y=4e^{-2}\approx 0{,}54$ при $x=2$; точки перегиба функции $x_1=\sqrt{3}-1$, $x_2=\sqrt{3}+1$, $y(x_1)\approx 0{,}3$, $y(x_2)\approx 0{,}47$, на $(x_1;\ x_2)$ функция выпукла вверх. 4) Область определения: $\mathbb{R}$; асимптота $y=0$ при $x\to+\infty$; точка пересечения с осями координат (0; 0); максимум $y=27e^{-3}\approx 1{,}3$ при $x=3$; точки перегиба функции $x_1=3-\sqrt{3}$, $x_2=3+\sqrt{3}$, $y(x_1)\approx 0{,}2$, $y(x_2)\approx 0{,}9$, на $(x_1;\ x_2)$ функция выпукла вверх. 5) Точки пересечения с осями координат $(-\sqrt{2};\ 0)$, $(\sqrt{2};\ 0)$, $(0;\ -2)$; асимптота $y=0$ при $x\to+\infty$, минимум $y=-e^2\approx -7{,}4$ при $x=-1$, максимум $y=2e^{-4}\approx 0{,}04$ при $x=2$; точки перегиба функции $x=1-\sqrt{10}/2\approx -0{,}6$ и $x=1+\sqrt{10}/2\approx 2{,}6$. 6) Область определения: $\mathbb{R}$; асимптота $y=0$ при $x\to-\infty$; точки пересечения с осями координат $(0;\ e)$, (1; 0); максимум $y=e^3/3\approx 6{,}7$ при $x=2/3$; точка перегиба (−1/3; 4/3), на $(-\infty;\ -1/3)$ функция выпукла вниз. 7) График симметричен относительно оси ординат; асимптота $y=0$; максимум $y=e$ при $x=0$; точки перегиба функции $x=\pm 1/\sqrt{2}$. 8) График симметричен относительно прямой $x=2$; асимптота $y=0$; максимум $y=e^4$ при $x=2$; точки перегиба функции $x=2\pm 1/\sqrt{2}$. 9) График симметричен относительно начала координат; асимптота $y=0$; минимум $y=-\dfrac{1}{\sqrt{e}}\approx -0{,}6$ при $x=-1$, максимум $y=1/\sqrt{e}$ при $x=1$; точки перегиба функции $x=\pm\sqrt{3}$. 10) График симметричен относительно оси ординат; асимптота $y=0$; максимум $y=2$ при $x=0$; точки перегиба $(-1;\ 3/e)$, $(1;\ 3/e)$. 11) Область определения: $x=1$; асимптоты: $x=1$ и $y=0$ при $x\to+\infty$; максимум $y=1$ при $x=0$; функция выпукла вверх при $x>1$ и выпукла вниз при $x<1$.

21.14. 1) Область определения: $x\neq -1$; асимптоты: $y=1/e$ и $x=-1$ при $x\to-1+0$, $y(-1-0)=0$; точка перегиба $(-2;\ e^{-3})$. 2) Область определения: $x\neq 0$; асимптота $x=0$ при $x\to+0$, $y(-0)=0$; минимум $y=e^2/4$ при $x=1/2$; функция выпукла вниз при $x<0$ и при $x>0$. 3) Область определения: $x\neq 0$; точка пересечения с осью абсцисс (2; 0); асимптоты: $y=x-3$ и $x=0$ при $x\to-0$, $y(+0)=0$, $y'(+0)=0$; максимум $y=-4\sqrt{e}$ при $x=-2$ и минимум $y=-1/e$ при $x=1$; точка перегиба $(2/5;\ -8e^{-5/2}/5)$. 4) Область определения: $x\neq 0$; точки пересечения с осью абсцисс (−3; 0) и (1; 0); асимптоты $y=x+3$ и $x=0$ при $x\to+0$; $y(-0)=0$, $y'(-0)=0$; максимум $y=4/e$ при $x=-1$; точка перегиба функции $x=-5\pm\sqrt{22}$. 5) Область определения: $x\neq 0$; начало координат — центр симметрии; асимптоты $x=0$, $y=x$ при $x\to\infty$; максимум $y=-\sqrt{2e}\approx -2{,}3$ при $x=-\sqrt{2}$, минимум $y=\sqrt{2e}$ при $x=\sqrt{2}$; на $(0;\ +\infty)$ функция выпукла вниз.

21.15. 1) Область определения: $x>0$; асимптота $x=0$ при $x\to+0$; максимум $y=0$ при $x=1$; функция выпукла вверх. 2) Область определения: $x>0$; точка пересечения с осью абсцисс (1; 0); асимптоты $y=0$ при $x\to+\infty$ и $x=0$ при $x\to+0$; максимум $y=1/e$ при $x=e$; точка перегиба $(e^{3/2};\ 1{,}5e^{-3/2})$. 3) Область определения: $x>0$; точка пересечения с осью абсцисс (1; 0); асимптоты $y=0$ и $x=0$, максимум $y=2/e$ при $x=e^2$; точка перегиба $(e^{8/3};\ 8e^{-4/3}/3)$. 4) Область определения: $x>0$; $y(+0)=0$, $y'(+0)=0$; точка пересечения с осью абсцисс (1; 0); минимум $y=-e\ln 2$ при $x=\sqrt{e}$; точка перегиба $(e^{-3/2};\ -3/(2e^3))$. 5) Область определения: $x>0$; $y(+0)=0$, $y'(+0)=+\infty$, максимум $y=4/e^2$ при $x=1/e^2$; минимум $y=0$ при $x=1$; точка перегиба $(1/e;\ 1/e)$. 6) Область определения: $x>0$; асимптоты $x=0$ и $y=0$; минимум $y=0$ при $x=1$, максимум $y=4/e^2\approx 0{,}6$ при $x=e^2\approx 7{,}4$; точки перегиба функции $x=e^{(3\pm\sqrt{5})/2}$. 7) Область определения: $x>0$, $x\neq 1$; асимптота $x=1$; $y(+0)=0$, $y'(+0)=0$; минимум $y=e$ при $x=e$; точка перегиба $(e^2;\ e^2/2)$. 8) Область определения: $x\neq\pm 1$; асимптоты $x=-1$, $x=1$, $y=0$; точки пересечения с осями координат ($\approx 0{,}9$; 0), ($\approx 1{,}2$; 0), (0; 6); максимум $y=2-\ln 3$ при $x=2$; точки перегиба $(0{,}5;\ 4-\ln 3)$, $(3;\ 1{,}5-\ln 2)$. 9) Область определения: $x>0$; асимптота $x=0$ $(y\to+\infty)$; минимум $y=1$ при $x=1$; функция выпукла вниз.

21.16. 1) Функция периодическая с периодом 2π; точки пересечения с осями координат (0; 1), $(\pi/2;\ 0)$, $(3\pi/2;\ 0)$; максимум $y=3\sqrt{3}/4$ при $x=\pi/6$, минимум $y=-3\sqrt{3}/4$ при $x=5\pi/6$; точки перегиба $(\pi/2;\ 0)$, $(\pi+\arcsin(1/4);\ -3\sqrt{15}/16)$, $(3\pi/2;\ 0)$, $(2\pi-\arcsin(1/4);\ 3\sqrt{15}/16)$. 2) Функция периодическая с периодом 2π; график симметричен относительно начала координат; максимум $y=3\sqrt{3}/4$ при $x=\pi/3$, минимум $y==-3\sqrt{3}/4$ при $x=-\pi/3$; точки перегиба $(-\pi;\ 0)$, $(-\pi+\arccos(1/4);\ -3\sqrt{15}/16)$, (0; 0), $(\pi-\arccos(1/4);\ 3\sqrt{15}/16)$, $(\pi;\ 0)$. 3) Функция периодическая с периодом 2π; $y(0)=y(\pi/2)=y(\pi)=0$; максимумы $y=1/4$ при $x=\pi/6$ и $x=5\pi/6$, минимумы $y=0$ при $x=\pi/2$ и $y=-2$ при $x=\dfrac{3}{2}\pi$. Точки перегиба функции $x=\arcsin\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$, $x=\pi-\arcsin\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$, $x=\pi+\arcsin\dfrac{\sqrt{33}-1}{8}$, $x=2\pi-\arcsin\dfrac{\sqrt{33}-1}{8}$. 4) Функция периодическая с периодом 2π; график симметричен относительно оси ординат; $y\left(\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)=0$, максимумы $y=3/4$ при $x=\pm\pi/3$, минимумы $y=1/2$ при $x=0$ и $y=-3/2$ при $x=\pm\pi$; точки перегиба функции $x=\pm\arccos\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$, $x=\pm\left(\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{33}-1}{8}\right)$. 5) Функция периодическая с периодом 2π; $x=0$ — ось симметрии, $(\pi/2;\ 0)$ — центр симметрии; на $[0;\ \pi]$ максимум $y=4$ при $x=0$, минимум $y=-4$ при $x=\pi$; на $[0;\ \pi]$ точки перегиба функции $x_1=\arcsin(1/\sqrt{3})$, $x_2=\pi/2$, $x_3==\pi-\arcsin(1/\sqrt{3})$, $y(x_1)=-y(x_3)=8\sqrt{6}/9\approx 2{,}2$, $y(x_2)=0$.

21.17. 1) Периодическая с периодом π функция; график симметричен относительно оси ординат; $y(0)=y(\pi/3)=y(-\pi/3)=0$, минимумы $y=0$ при $x=0$ и $y=-1$ при $x=\pm\pi/2$, максимумы $y=9/16$ при $x=\pm\arccos(1/4)$; точки перегиба $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{129}+1}{16}$, $x=\pm\frac{1}{2}\left(\pi-\arccos\frac{\sqrt{129}-1}{16}\right)$.
2) Периодическая с периодом 2π функция; график симметричен относительно оси ординат: $y(\pi/4)=y(\pi/2)=y(3\pi/4)=0$; на отрезке $[0;\ \pi]$ максимумы $y=1$ при $x=0$, $y=2/(3\sqrt{6})$ при $x=\pi-\arcsin\sqrt{5/6}$, минимумы $y=-2/(3\sqrt{6})$ при $x=\arcsin\sqrt{5/6}$, $y=-1$ при $x=\pi$; точки перегиба $\left(\arccos\sqrt{\frac{13}{18}};\ \frac{4}{9}\sqrt{\frac{13}{18}}\right)$, $(\pi/2;\ 0)$, $\left(\pi-\arccos\sqrt{13/18};\ -\frac{4}{9}\sqrt{13/18}\right)$.
3) Периодическая с периодом 2π функция, график симметричен относительно начала координат; $y(0)=y(\pi)=0$; на отрезке $[0;\ \pi]$ максимумы $y=(3+4\sqrt{2})/6$ при $x=\pi/4$ и $y=\sqrt{2}-1/2$ при $x=3\pi/4$, минимум $y=\sqrt{3}/4$ при $x=2\pi/3$; точки перегиба функции $x=0$, $x=\pi$, $x=\arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{6}$, $x=\pi-\arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{6}$.

21.18. 1) Область определения $x\neq\pi/2+\pi n$, $n\in Z$, периодическая с периодом 2π функция; асимптоты $y=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; на интервале $(-\pi/2;\ 3\pi/2)$ максимум $y=1$ при $x=0$, минимум $y=-1$ при $x=\pi$; функция убывает на интервалах $(0;\ \pi/2)$ и $(\pi/2;\ \pi)$, возрастает на интервалах $(-\pi/2;\ 0)$ и $(\pi;\ 3\pi/2)$. 2) Периодическая с периодом π функция; асимптоты $x=\pi n$, $n\in Z$; точки перегиба $(\pi/2+\pi n;\ 1/\sqrt{2})$, $n\in Z$; функция возрастает на интервале $(0;\ \pi)$. 3) График симметричен относительно начала координат; асимптоты $x=\pi/2+\pi n$, $n\in Z$; максимум $y=\pi/2+2n\pi-1$ при $x=\pi/4+\pi n$, $n\in Z$; минимум $y=3\pi/2+2\pi n+1$ при $x=3\pi/4+\pi n$, $n\in Z$; точки перегиба $(\pi n;\ 2\pi n)$, $n\in Z$.

21.19. 1) График симметричен относительно начала координат; асимптоты: $y=(x-\pi)/2$ при $x\to+\infty$ и $y=(x+\pi)/2$ при $x\to-\infty$; максимум $y=1$ при $x=(2-\pi)/4$, минимум $y=-1$ при $x=(\pi-2)/4$; точка перегиба $(0;\ 0)$. 2) Область определения: R; асимптоты $y=1/\pi$ при $x\to-\infty$, $y=x$ при $x\to+\infty$; точка пересечения с осью ординат $(0;\ 2/\pi)$; функция выпукла вниз. 3) Область определения: R; $(0;\ 0)$ — центр симметрии; асимптоты $y=(\pi x+2)/2$ при $x\to-\infty$, $y=(\pi x-2)/2$ при $x\to+\infty$; точка перегиба $(0;\ 0)$, на $(-\infty;\ 0)$ функция выпукла вверх. 4) Область определения: R; $(0;\ \pi)$ — центр симметрии; асимптоты $y=(x+4\pi)/2$ при $x\to-\infty$, $y=x/2$ при $x\to+\infty$; $y(0)=\pi($ $y=0$ при $x\approx 12{,}2$; максимум $y=(10\pi-3\sqrt{3})/6\approx 4{,}4$ при $x=-\sqrt{3}$, минимум $y=(2\pi+3\sqrt{3})/6\approx 1{,}9$ при $x=\sqrt{3}$; точка перегиба $(0;\ \pi)$, на $(-\infty;\ 0)$ функция выпукла вверх. 5) Область определения: $|x|\geqslant 1$; $(0;\ -\pi/2)$ — центр симметрии; асимптота $y=(3x-\pi)/2$ при $x\to\infty$; максимум $y=-(6\sqrt{3}+5\pi)/6\approx-4{,}4$ при $x=-2\sqrt{3}/3$, минимум $y=(6\sqrt{3}-\pi)/6\approx 1{,}2$ при $x=2\sqrt{3}/3$; на $(-\infty;\ -1)$ функция выпукла вверх. 6) Область определения: R; график симметричен относительно начала координат; асимптота $y=0$ максимум $y=\pi/2$ при $x=1$, минимум $y=-\pi/2$ при $x=-1$; $y'(1-0)=1$, $y'(1+0)=-1$; точка перегиба $(0;\ 0)$. 7) Область определения: R; график симметричен относительно оси ординат; асимптота $y=\pi$; функция возрастает при $x>0$, $y'(+0)=2$. 8) Область определения: R; точки пересечения с осями координат $(0;\ -\pi/2)$, $(x_0,\ 0)$, где $x_0\approx 0{,}7$; асимптота $y=(x-\pi)/2$; максимумы $y=1$ при $x=1$ и $y=-(3\sqrt{3}+5\pi)/6$ при $x=-\sqrt{3}$, минимумы $y=-1/2-\pi$ при $x=-1$ и $y=(3\sqrt{3}-\pi)/6$. при $x=\sqrt{3}$; функция выпукла вверх на интервалах $(-\infty;\ -1)$ и $(0;\ 1)$, выпукла вниз на интервалах $(-1;\ 0)$ и $(1;\ +\infty)$; точка перегиба $(0;\ -\pi/2)$; $y'(-1-0)=-1/2$, $y'(-1+0)=3/2$, $y'(1-0)=3/2$, $y'(1+0)=-1/2$.

21.20. 1) Периодическая с периодом 2π функция, график симметричен относительно оси ординат; максимум $y=e$ при $x=0$, минимум $y=1/e$ при $x=\pi$; точки перегиба функции $x=\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $x=2\pi-\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
2) Асимптоты: $y=e^{\pi/2}$ при $x\to-\infty$, $y=e^{-\pi/2}$ при $x\to+\infty$; функция убывает; $(-1/2;\ e^{\operatorname{arctg}(1/2)})$ — точка перегиба. 3) Область определения: $2k\pi<x<(2k+1)\pi$, $k\in Z$, периодическая с периодом 2π; асимптоты $x=n\pi$, $n\in Z$; минимум $y=1$ при $x=\pi/2+2\pi n$, $n\in Z$. 4) Область определения: $x>0$; минимум $y=(1/e)^{1/e}\approx 0{,}69$ при $x=1/e$; $y(+0)=1$; функция выпукла вниз. 5) Область определения: $x>-1$; $x\neq 0$; $y(+0)=y(-0)=e$; асимптоты $x=-1$, $y=1$; функция выпукла вниз. 6) Область определения: $x<-1$, $x>0$, асимптоты $y=e$ при $x\to\infty$, $x=-1$ $(y\to+\infty)$; на $(-\infty;\ -1)$ функция выпукла вниз, на $(0;\ +\infty)$ — вверх.

21.21. 1) Область определения: $x>0$; асимптота $y=1$; максимум $y=e^{1/e}\approx 1{,}44$ при $x=e$; $y(+0)=0$. 2) Асимптота $y=e(x-1/2)$; $y(+0)=0$. 3) Периодическая функция с периодом 2π; максимумы $y=1$ при $x=0$ и $x=\pi/2$, $y=-1/\sqrt{2}$ при $x=5\pi/4$, минимумы $y=1/\sqrt{2}$ при $x=\pi/4$, $y=-1$ при $x=\pi$ и $x=3\pi/2$. 4) Функция периодическая с периодом 2π; $x=\pi/2$ — ось симметрии, $(0;\ 0)$ — центр симметрии; на $[0;\ \pi]$ минимумы $y=-3\sqrt{3}$ при $x=\pi/3$ и $x=2\pi/3$, максимум $y=-4$ при $x=\pi/2$. 5) Периодическая с периодом 2π функция; максимумы $y=1$ при $x=\pi/2$, $y=1/3$ при $x=3\pi/2$, минимумы $y=0$ при $x=0$, $x=\pi$. 6) Периодическая с периодом 2π функция, график симметричен относительно оси ординат; максимумы $y=11/6$ при $x=0$, $y=-5/12$ при $x=2\pi/3$, минимумы $y=-1/2$ при $x=\pi/2$ и $y=-5/6$ при $x=\pi$. 7) Область определения: $x>0$; асимптота $x=0$; максимум $y=-2\ln 2-5\operatorname{arctg}(1/2)$ при $x=1/2$, минимум $y=2\ln 2-5\operatorname{arctg} 2$ при $x=2$. 8) Область определения: $x\neq\pm 1$, график симметричен относительно оси ординат; асимптоты $x=-1$ при $x\to-1+0$, $x=1$ при $x\to 1-0$, $y=0$; минимум $y=e$ при $x=0$, максимум $y=1/(4\sqrt{e})\approx 0{,}15$ при $x=\pm\sqrt{3}$. 9) Область определения: $x\neq 0$, $x\neq\pm 2$; асимптоты $x=2$, $x=-2$, $y=1$, $x=0$ при $x\to+0$; $y(-0)=0$; минимум $y\approx 0{,}94$ при $x=-4-2\sqrt{5}\approx-8{,}48$, максимум $y\approx-0{,}5$ при $x=-4+2\sqrt{5}\approx 0{,}48$, функция возрастает на интервалах $(-4-2\sqrt{5};\ 2)$, $(-2;\ 0)$, $(0;\ -4+2\sqrt{5})$, убывает на интервалах $(-\infty,\ -4-2\sqrt{5})$, $(-4+2\sqrt{5};\ 2)$, $(2;\ +\infty)$.

21.22. 1) Область определения: R; максимум $(-3;\ 3)$, минимум $(5;\ -1)$; точка перегиба $(1;\ 1)$. 2) Область определения: R; асимптоты $y=x$, $y=x+6\pi$; максимум $(-3\pi-1;\ 3\pi/2-1)$, минимум $(-3\pi+1;\ 1-3\pi/2)$; точка перегиба $(-3\pi;\ 0)$. 3) Область определения: R; точки пересечения с осями координат $(0;\ 0)$, $(8/5;\ 0)$; асимптота $y=x-2$; максимум $(0;\ 0)$, минимум $(1/2;\ -1/2)$; выпуклость вниз. 4) Область определения: $x<0$; асимптоты $y=x+\ln 2$, $x=0$; максимум $(-\ln 2/2;\ 0)$; выпуклость вверх. 5) Область определения: R; функция периодическая с периодом 2π; прямые $x=\pi n$, $n\in Z$, — оси симметрии; на $[0;\ 2\pi)$ минимум $y=0$ при $x=0$, максимум $y=2$ при $x=\pi$; на $(0;\ 2\pi)$ выпуклость вверх. 6) Область определения: R; ось ординат — ось симметрии; асимптота $y=0$ при $x\to\infty$; максимум $y=1$ при $x=0$; функция выпукла вниз на $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$.

21.23. 1)

t	$-\infty$	-1	$-1/3$	0	1	$+\infty$
x	$-\infty$	0	$-4/27$	0	4	$+\infty$
y	$+\infty$	-4	$-80/27$	-2	0	$-\infty$

$(0;\ -4)$ — точка возврата.

2)

t	$-\infty$	1	$5/3$	2	$7/3$	3	$+\infty$
x	$-\infty$	0	$-4/27$	0	$16/27$	4	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-16/27$	-1	$-32/27$	0	$+\infty$

$(0;\ 0)$ — точка возврата.

3) Асимптоты: $y = x + 3$, $y = 0$, $x = 0$.

t	$-\infty$	$-1-0$	$-1+0$	$-1/2$	-0	$+0$	1	$+\infty$
x	$+0$	$+\infty$	$-\infty$	-4	$-\infty$	$+\infty$	$1/2$	$+0$
y	$-\infty$	-0	-0	$-1/2$	$-\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$

4) Асимптоты: $y = x - 1$, $y = 0$, $x = 0$; точка самопересечения $(-1;\ 1)$.

t	$-\infty$	-0	$+0$	$1-0$	$1+0$	2	$+\infty$
x	$-\infty$	-0	-0	$-\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$
y	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	-0	$+0$	$3/2$	$+\infty$

5) Асимптоты: $y = 1$, $y = 1/2$, $x = -1/2$.

t	$-\infty$	$-2-0$	$-2+0$	-1	-0	$+0$	1	$+\infty$
x	$-\infty$	$-1/2-0$	$-1/2+0$	0	$-\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$
y	$1+0$	$+\infty$	$-\infty$	0	$1/2-0$	$1/2+0$	$2/3$	$1-0$

6) Асимптоты: $y = 2$, $y = 2/3$, $x = 1$, $x = 4/3$.

	$-\infty$	$-2-\sqrt{5}$	$-2-0$	$-2+0$	$-1-0$	$-1+0$	0	$-2+\sqrt{5}$	$1-0$	$1+0$	$+\infty$
x	$1+0$	$\approx 1{,}1$	$\frac{4}{3}-0$	$\frac{4}{3}+0$	$+\infty$	$-\infty$	0	$\approx 0{,}1$	$-\infty$	$+\infty$	$1+0$
y	$-\infty$	$\approx -8{,}5$	$-\infty$	$+\infty$	$2+0$	$2-0$	$1/2$	$\approx 0{,}5$	$\frac{2}{3}-0$	$\frac{2}{3}+0$	$+\infty$

7) Асимптота $y = x$ при $x \to \infty$; точки перегиба (приближенно) $(-2{,}4;\ 3{,}0)$, $(2{,}2;\ 3{,}0)$, $(3{,}2;\ 3{,}0)$.

t	$-\infty$	-1 ∓ 0	∓ 0	1 ∓ 0	$\sqrt[3]{2} \mp 0$	$+\infty$
x	$-\infty$	$-2-0$	$\mp\infty$	$2+0$	$\frac{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2} \mp 0 \approx 2{,}1 \mp 0$	$+\infty$
y	$-\infty$	∓ 0	$+\infty$	2 ± 0	$\frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + 0 \approx 1{,}9 + 0$	$+\infty$

21.24. 1) Асимптота $x = 5/3$, точка возврата $(-4/3,\ 27/2)$, точка перегиба $(77/3;\ 27/2)$.

t	$-\infty$	-3	-0	$+0$	$+\infty$
x	$+\infty$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}-0$	$\frac{5}{3}+0$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\frac{27}{2}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

2) Асимптота $y = (4x-1)/8$, точка возврата $(0;\ 0)$, точка перегиба $(-9/8;\ -27/16)$.

t	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}-0$	$\frac{1}{2}+0$	$\frac{3}{4}$	1	$+\infty$
x	$+\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\frac{9}{8}$	-1	$-\infty$
y	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\frac{27}{32}$	-1	$-\infty$

3) Асимптота $y = -x + 1/3$, точка возврата $(0;\ 0)$.

t	$-\infty$	$-1-0$	$-1+0$	0	$\sqrt[3]{2}$	$+\infty$
x	-0	$-\infty$	$+\infty$	0	$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	$+0$
y	$1+0$	$+\infty$	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	$1-0$

4) Асимптоты: $y = 1$, $x = 0$, точка возврата $(-2;\ 0)$, точка перегиба $(117/64;\ 49/9)$, при $t = (-3 \pm \sqrt{21})/4$ точка самопересечения с координатами $x \approx -1{,}1$, $y \approx 2{,}4$.

t	$-\infty$	-1	-0	$+0$	1	$+\infty$
x	$-\infty$	2	$+0$	-0	-2	$+\infty$
y	$1+0$	4	$+\infty$	$+\infty$	0	$1-0$

5) Асимптоты: $y = (2x+1)/4$, $y = x - 1$, $x = -1/2$.

t	$-\infty$	$-1-0$	$-1+0$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-0	$+0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$1-0$	$1+0$	$+\infty$
x	-0	$-\frac{1}{2}+0$	$-\frac{1}{2}-0$	$\approx -1{,}1$	$-\infty$	$+\infty$	4	$\approx 4{,}1$	$+\infty$	$-\infty$	-0
y	$+0$	$+\infty$	$-\infty$	$\approx -2{,}6$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{8}{3}$	$\approx 2{,}6$	$+\infty$	$-\infty$	-0

6) Асимптота $y = x + 1$, точка перегиба $(-27/2; -9/2)$

t	$-\infty$	-0	$+0$	$1/2$	$2/3$	$1-0$	$1+0$	$+\infty$
x	-0	$-\infty$	$-\infty$	-8	$-27/4$	$-\infty$	$+\infty$	$+0$
y	$+0$	$+\infty$	$-\infty$	-4	$-9/2$	$-\infty$	$+\infty$	$+0$

7) Кривая симметрична относительно оси ординат, асимптоты $y = \pm x - 5/4$, $y = 0$.

t	$+0$	$1/\sqrt[4]{5}$	$1-0$	$1+0$	$+\infty$
x	$+\infty$	$5\sqrt[4]{5}/4$	$+\infty$	$-\infty$	-0
y	$+0$	$1/4$	$+\infty$	$-\infty$	$-1-0$

8) Оси координат — оси симметрии; (0; 0) — точка перегиба.

t	$-\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \mp 0$	-1 ∓ 0	$-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \mp 0$	-0
x	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm 0$	$-\sqrt{2}+0$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \mp 0$	-0
y	$\frac{1}{2}-0$	± 0	$-\frac{1}{2}+0$	-0

21.25.

1) Асимптота $y = 2x$ при $x \to +\infty$; (1; 1) — точка возврата.

t	$-\infty$	∓ 0	$+\infty$
x	$+\infty$	$1+0$	$+\infty$
y	$+\infty$	$1+0$	$+\infty$

2) Асимптоты $y = 0$, $x = 0$; точки перегиба $(\sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\, e^{-\sqrt{2}})$, $(-\sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}}; -\sqrt{2}\, e^{-\sqrt{2}})$.

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-0	$-1/e$	0	e	$+\infty$
y	$-\infty$	$-e$	0	$1/e$	$+0$

3) $(-4; 4)$ — точка перегиба.

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-0	$-10/e$	-4	$-2e$	$+\infty$
y	-0	$-11/e$	-4	$-e$	$+\infty$

4) Асимптота $y = 1$, точка возврата $(e; 0)$, точка перегиба $\left(-\frac{3}{2}e^{-2/3}; \frac{25}{9}e^{-2/3}\right)$.

t	$-\infty$	-1	-0	$+0$	1	$+\infty$
x	-0	$-1/e$	$-\infty$	$+\infty$	e	$+\infty$
y	$+0$	$4/e$	$1+0$	$1-0$	0	$+\infty$

5) Асимптоты: $y = e^2x - 2e$, $y = 0$, $x = 0$.

t	$-\infty$	-2	$-1-0$	$-1+0$	0	$+\infty$
x	-0	$-1/e^2$	$-\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	$-e^2$	$-\infty$	$+\infty$	1	$+0$

6) Асимптота $y = x - 1$ при $x \to -\infty$.

t	$-\infty$	0	$1/2$	$1-0$	$1+0$	$+\infty$
x	$-\infty$	0	$1-\ln 2$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}-\ln 2$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

7) Асимптоты: $y = 0$, $x = 0$; точки перегиба $(-\sqrt{2}\, e^{-\sqrt{2}}; -\sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}})$, $(\sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\, e^{-\sqrt{2}})$.

t	$+0$	$1/e$	1	e	$+\infty$
x	-0	$-1/e$	0	e	$+\infty$
y	$-\infty$	$-e$	0	$1/e$	$+0$

7) та же кривая, что и в задаче 2)).

8) Асимптоты $y = x/4$, $x = 2$, угловая точка (0; 0).

t	$-\infty$	$-1-0$	$-1+0$	0	$1-0$	$1+0$	2	$+\infty$
x	$+\infty$	$2+0$	$2-0$	0	$2-0$	$2+0$	8	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$2+3\ln 3$	$+\infty$

9) Кривая симметрична относительно оси абсцисс; асимптоты: $y = x - 1$, $y = 1 - x$; точки самопересечения (0; 0), (2; 0).

t	$+0$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi-0$	$\pi+0$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$2\pi-0$
x	$+\infty$	2	1	0	$-\infty$	$+\infty$	2	1	0	$-\infty$
y	$+\infty$	0	-1	0	$+\infty$	$-\infty$	0	1	0	$-\infty$

10) Кривая симметрична относительно осей координат; асимптоты $y = \pm 3x$, $y = \pm 1/2$; точки самопересечения $(\pm\sqrt{3}/3; 0)$, $(0; \pm\sqrt{2}/2)$.

t	$+0$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2-0$
x	$+\infty$	$\sqrt{3}/3$	0	$-\infty$
y	$\frac{1}{2}-0$	0	$-\sqrt{2}/2$	$-\infty$

11) Ось абсцисс — ось симметрии; (1; 0) — точка возврата.

t	$-\pi+0$	$-2\pi/3\mp 0$	$-\pi/3\mp 0$	-0
x	$-3+0$	$-1/2\mp 0$	$3/2-0$	$1+0$
y	-0	$-3\sqrt{3}/2+0$	$-\sqrt{3}/2\mp 0$	-0

12) Ось абсцисс — ось симметрии.

t	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0
x	2	1	0	-1	-2	-1	0	1	2
y	-2	0	$\sqrt{2}$	2	0	-2	$-\sqrt{2}$	0	2

13) Оси координат — оси симметрии; точки самопересечения $(\pm 1/2;\ \pm 1/\sqrt{2})$ (знаки произвольны).

t	$+0$	$\frac{\pi}{6}\mp 0$	$\frac{\pi}{4}\mp 0$	$\frac{\pi}{3}\mp 0$	$\frac{\pi}{2}\mp 0$
x	$+0$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\mp 0$	$1-0$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pm 0$	± 0
y	$+0$	$1-0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\pm 0$	± 0	$-1+0$

14) Эта кривая — эвольвента единичной окружности; касательные параллельны оси абсцисс в точках $((-1)^n;\ \pi n(-1)^n)$, касательные параллельны оси ординат в точках $((-1)^n\pi(1+2n)/2;\ (-1)^n)$, $n\in\mathbf{Z}$.

15) Касательные параллельны оси абсцисс в точках с координатами $x_n'=-y_n'=\frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}e^{\pi(4n-1)/4}$, касательные параллельны оси ординат в точках с координатами $x_n''=y_n''=\frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}e^{\pi(4n+1)/4}$

21.26. 1) $y=-x$ — ось симметрии; асимптота $y=x$; точки пересечения с осями координат $(0;\ -1)$, $(1;\ 0)$, они же и точки перегиба. 2) Оси координат и прямые $y=\pm x$ — оси симметрии; $(\pm 1;\ 0)$, $(0;\ \pm 1)$ — точки пересечения с осями координат; максимум $x=1$ и минимум $x=-1$ при $y=0$; максимум $y=1$ и минимум $y=-1$ при $x=0$. 3) Ось абсцисс — ось симметрии; асимптота $x=1$; точки пересечения с осями координат $(0;\ 0)$ и $(-1;\ 0)$; $(0;\ 0)$ — точка самопересечения; минимум $x=-1$ при $y=0$; максимум $y\approx 0{,}3$ при $x=(1-\sqrt{5})/2\approx 0{,}6$. 4) Ось абсцисс — ось симметрии; асимптоты $y=\pm x$; точка пересечения с осью абсцисс $(\sqrt[3]{2};\ 0)$; минимум $x=\sqrt[3]{2}$ при $y=0$; минимум $y=1$ при $x=-1$, максимум $y=-1$ при $x=1$. 5) Ось абсцисс — ось симметрии; $(0;\ 0)$, $(2;\ 0)$ — точки пересечения с осями координат; $(0;\ 0)$ — точка возврата; максимум $x=2$ при $y=0$, минимум $x=0$ при $y=0$; максимум $y=27/16$ и минимум $y=-27/16$ при $x=3/2$; точки перегиба $x=(3-\sqrt{3})/2\approx 0{,}23$, $y\approx\pm 0{,}35$. 6) Оси координат — оси симметрии; $(\pm 1;\ 0)$, $(0;\ 0)$ — точки пересечения с осями координат; $(0;\ 0)$ — точка самопересечения; максимум $x=1$ и минимум $x=-1$ при $y=0$; максимумы $y=2/\sqrt{3}$ и минимумы $y=-2/\sqrt{3}$ при $x=\pm\sqrt{2/3}$; точки перегиба (приближенно) $(\pm 0{,}52;\ \pm 0{,}70)$. 7) Ось абсцисс — ось симметрии; асимптота $y=0$ при $x\to+\infty$; точка пересечения с осью абсцисс $(1;\ 0)$; максимум $x=1$ при $y=0$; максимум $y=1$ и минимум $y=-1$ при $x=2$; точки перегиба $x=(6+2\sqrt{3})/3\approx 3{,}15$, $y=\pm\sqrt{\sqrt{3}/2}\approx\pm 0{,}93$. 8) Ось абсцисс — ось симметрии; асимптота $x=2$; $(0;\ 0)$ — точка возврата; минимум $x=0$ при $y=0$. 9) Оси координат — оси симметрии; асимптоты $y=\pm x$; $(\pm 1;\ 0)$ — точки пересечения с осью абсцисс; минимум $x=1$ и максимум $x=-1$ при $y=0$. 10) Оси координат — оси симметрии; асимптоты $y=\pm x$, $x=\pm 1$; $(0;\ 0)$, $(\pm 2;\ 0)$ — точки пересечения с осями координат; $(0;\ 0)$ — точка самопересечения; минимум $x=2$ и максимум $x=-2$ при $y=0$. 11) Ось абсцисс — ось симметрии; асимптоты $y=\pm(x+2)/3$ и $x=1$, максимум $x=-3$ при $y=0$; минимум $y\approx 2{,}54$ и максимум $y\approx -2{,}54$ при $x=\sqrt{3}$.

21.27. 1) Гипербола с осями $x=0$ и $y=1$ и с асимптотами $y=1\pm x$. 2) Эллипс с осями на прямых $y=-2x$ и $x=2y$. 3) Ось ординат — ось симметрии; асимптоты $x=0$, $y=0$; $(0;\ 1)$ — точка пересечения с осью ординат; максимум $y=1$ при $x=0$; точки перегиба $x=\pm\sqrt{\sqrt{3}/8}\approx\pm 0{,}47$, $y=(6-2\sqrt{3})/3\approx 0{,}85$. 4) Прямая $y=x$ — ось симметрии; асимптоты $x=0$, $y=0$, $y=-x$; максимум $x=-\sqrt[3]{4}$ при $y=-\sqrt[3]{4}/2$; максимум $y=-\sqrt[3]{4}$ при $x=-\sqrt[3]{4}/2$. 5) $(0;\ 0)$ — центр симметрии; асимптоты $y=0$, $y=x$, $x=0$; минимумы $y=1\pm\sqrt{2}$ при $x=1$, максимумы $y=-1\pm\sqrt{2}$ при $x=-1$. 6) Асимптота $y=2-x$; $(0;\ 0)$, $(6;\ 0)$ — точки пересечения с осями координат; $(0;\ 0)$ — точка возврата; максимум $y=2\sqrt[3]{4}$ при $x=4$; $(6;\ 0)$ — точка перегиба.

21.28. 1) $x=4t/(1-t^4)$, $y=4t^2/(1-t^4)$ *); ось ординат — ось симметрии; асимптоты $y=\pm x-1$; $(0;\ 0)$ — точка самопересечения и точка возврата; точки перегиба $\left(\pm 6/\sqrt[4]{3};\ 2\sqrt{3}\right)$. 2) $x=(t-1)/t^3$, $y=(t-1)^2/t^3$; прямая $y=x$ — ось симметрии; $(0;\ 0)$ — точка самопересечения; максимум $x=4/27$ при $y=2/27$; максимум $y=4/27$ при $x=2/27$. 3) $x=t\left(1\pm\sqrt{8t^2-1}\right)$, $y=t\left(1\mp\sqrt{8t^2-1}\right)$; прямые $y=\pm x$ — оси симметрии; точки пересечения с осями координат: $(0;\ 0)$, $(0;\ \pm 1)$, $(\pm 1;\ 0)$; $(0;\ 0)$ — изолированная точка; ближайшие к началу координат точки $(1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2};\ -1/\sqrt{2})$; точки перегиба $x=1/y=\pm(\sqrt{2}-1)$, $x=1/y=\pm(\sqrt{2}+1)$. 4) $x=t^3/(1-2t^2)$, $y=t^4/(1-2t^2)$; ось ординат — ось симметрии; асимптота $y=-(4\sqrt{2}\,x+1)/8$; максимум $x=-3\sqrt{3}/(4\sqrt{2})$ и минимум $x=3\sqrt{3}(/4\sqrt{2})$ при $y=-9/8$; максимумы $y=-1$ при $x=\pm 1$, минимум $y=0$ при $x=0$; точки перегиба $(\pm 3\sqrt{3}/5;\ -9/5)$. 5) $x=\pm\sqrt{(t-2)/(1-t^3)}$, $y=\pm t\sqrt{(t-2)/(1-t^3)}$; $(0;0)$ — центр симметрии; асимптота $y=x$; три точки перегиба, $(0;\ 0)$ одна из них. 6) $x=(t^2+1/t)/2$, $y=(t^2-1/t)/2$; прямая $y=x$ — ось симметрии; асимптоты $y=\pm x$; точки пересечения с осями координат $(0;\ 1)$, $(1;\ 0)$; минимум $x=3/\sqrt[3]{32}$ при $y=-1/\sqrt[3]{32}$, минимум $y=3/\sqrt[3]{32}$ при $x=-1/\sqrt[3]{32}$. 7) Астроида; $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$; оси координат и прямые $y=\pm x$ — оси симметрии; $(\pm 1;\ 0)$, $(0;\ \pm 1)$ — точки возврата. 8) $x=\pm\operatorname{ch}^{3/2}t$, $y=\operatorname{sh}^{3/2}t$; оси абсцисс — оси симметрии; асимптоты $y=\pm x$; максимум $x=-1$ и минимум $x=1$ при $y=0$.

21.29. 1) $r=\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}$; $(0;\ 0)$ — центр симметрии; асимптота $x=0$; максимум $x=1/\sqrt[4]{2}$ при $y=1/\sqrt[4]{2}$, минимум $x=-1/\sqrt[4]{2}$ при $y=-1/\sqrt[4]{2}$ точки перегиба: $x_1=y_1=0$, $x_2=-x_3=\sqrt[4]{8\sqrt{3}-12}/2\approx 0{,}6$, $y_2=-y_3=\sqrt[4]{24\sqrt{3}+36}\approx 1{,}5$. 2) Лемниската; $r=\sqrt{\sin 2\varphi/2}$; прямые $y=\pm x$ — оси симметрии; $(0;\ 0)$ — точка самопересечения; максимум $x=\sqrt[4]{27}/4$ при $y=$

*) Указан один из возможных вариантов параметризации.

$=\sqrt[4]{3}/4$, минимум $x=-\sqrt[4]{27}/4$ при $y=-\sqrt[4]{3}/4$; максимумы $r=1/\sqrt{2}$ при $\varphi=\pi/4$ и $\varphi=5\pi/4$.

3) Бисквит; $r=2/\sqrt{3+\cos 4\varphi}$; оси координат и прямые $y=\pm x$ — оси симметрии; $(0;\ 0)$ — изолированная точка; $(\pm 1;\ 0)$, $(0;\ \pm 1)$ — точки пересечения с осями координат; максимумы $x=\sqrt{(\sqrt{2}+1)/2}\approx 1{,}1$ и минимумы $x=-\sqrt{(\sqrt{2}+1)/2}$ при $y=\pm 1/\sqrt{2}$; максимумы $y=\sqrt{(\sqrt{2}+1)/2}$ и минимумы $y=-\sqrt{(\sqrt{2}+1)/2}$ при $x=\pm 1/\sqrt{2}$; точки перегиба (приближенно) $(\pm 1{,}05;\ \pm 0{,}35)$, $(\pm 0{,}35;\ \pm 1{,}05)$ (знаки произвольны). 4) $r=\sqrt{2\sin 2\varphi/(2-\sin^2 2\varphi)}$; прямые $y=\pm x$ — оси симметрии; максимум $x=\sqrt[8]{27/16}$ при $y=\sqrt[8]{3/16}$, минимум $x=-\sqrt[8]{27/16}$ при $y=-\sqrt[8]{3/16}$; максимум $y=\sqrt[8]{27/16}$ при $x=\sqrt[8]{3/16}$, минимум $y=-\sqrt[8]{27/16}$ при $x=-\sqrt[8]{3/16}$; максимум $r=\sqrt{2}$ при $\varphi=\pi/4$ и $\varphi=5\pi/4$. 5) $r=\sqrt{\operatorname{tg} 2\varphi/2}$; $(0;\ 0)$ — центр симметрии; асимптоты $y=\pm x$; $(0;\ 0)$ — точка самопересечения; точки перегиба (приближенно): $x_1=-x_3\approx 1{,}11$, $y_1=-y_3\approx 0{,}68$, $x_2=-x_4\approx -0{,}68$, $y_2=-y_4\approx 1{,}11$. 6) $r=\sqrt{(3\cos 2\varphi-1)/2\cos 2\varphi}$; оси координат — оси симметрии; асимптоты $y=\pm x$; $(0;\ 0)$ — точка самопересечения; максимум $x=1$ и минимум $x=-1$ при $y=0$; максимум $y=\sqrt{2}$ и минимум $y=-\sqrt{2}$ при $x=0$, максимумы $y=(\sqrt{3}-1)/2$ и $y=-(\sqrt{3}+1)/2$ и минимумы $y=(\sqrt{3}+1)/2$ и $y=-(\sqrt{3}-1)/2$ при $x=\pm 1/\sqrt{2}$. 7) Улитка Паскаля: $r=2\cos\varphi\pm 1$; ось абсцисс — ось симметрии; $(0;\ 0)$ — точка самопересечения; $(3;\ 0)$, $(1;\ 0)$, $(0;\ \pm 1)$ — точки пересечения с осями координат; максимумы $x=3$ и $x=1$ при $y=0$, минимумы $x=-1/8$ при $y=\pm\sqrt{15}/8\approx\pm 0{,}48$; максимум $y\approx 1{,}76$ и минимум $y\approx -1{,}76$ при $x=(15+\sqrt{33})/16\approx 1{,}3$, максимум $y\approx 0{,}37$ и минимум $y\approx -0{,}37$ при $x=(15-\sqrt{33})/16\approx 0{,}58$. 8) Улитка Паскаля: $r=2+\cos\varphi$, $r=0$; ось абсцисс — ось симметрии; $(0;\ 0)$ — изолированная точка; максимум $x=3$ и минимум $x=-1$ при $y=0$; максимум $y\approx 2{,}2$ и минимум $y\approx -2{,}2$ при $x=\sqrt{3}/2\approx 0{,}87$.

21.30. 1) Ось ординат — ось симметрии; $(0;\ 0)$ — точка самопересечения; $(0;\ 6)$ — точка пересечения с осью ординат; максимум $y=6$ при $x=0$, минимумы $y=-2$ при $x=\pm 2\sqrt{2}$; имеются два максимума и два минимума x. 2) Четырехлепестник; оси координат и прямые $y=\pm x$ — оси симметрии; $(0;\ 0)$ — точка самопересечения; максимумы $x=2$ и минимумы $x=-2$ при $y=\pm\sqrt{2}$; максимумы $y=2$ и минимумы $y=-2$ при $x=\pm\sqrt{2}$; $(0;\ 0)$ — точка перегиба. 3) Ось ординат — ось симметрии; $(0;\ 0)$ — точка самопересечения; максимум $x=\sqrt{2/3}$ и минимум $x=-\sqrt{2/3}$ при $y=16/9$ максимумы $y=2$ при $x=\pm 2$. 4) Асимптота $y=1-x$; $(0;\ 0)$ — точка возврата; $(4;\ 0)$ — точка пересечения с осью абсцисс; максимум $x=27/8$ при $y=-9/8$; точка перегиба $(27/4;\ 9/4)$. 5) Каппа; оси координат—оси симметрии; асимптоты $y=\pm 2$; $(0;\ 0)$ — точка самопересечения и перегиба. 6) Прямая $y=x$ — ось симметрии; асимптота $y=(2-3x)/3$; точки пересечения с осями координат $(1;\ 0)$, $(0;\ 1)$; $(0;\ 0)$ — изолированная точка; максимум $x\approx 1{,}1$ при $y=2/3$, минимум $x=1$ при $y=0$; максимум $y\approx 1{,}1$ при $x=2/3$, минимум $y=1$ при $x=0$; точки перегиба $\left(2(3\mp\sqrt{3})/9;\ 2(3\pm\sqrt{3})/9\right)$. 7) Прямая $y=-x$ — ось симметрии; $(0;\ 0)$ — точка пересечения с осями координат; минимум $x=3\sqrt[3]{2}/2$ при $y=-3\sqrt[3]{4}/2$; максимум $y=-3\sqrt[3]{2}/2$ при $x=3\sqrt[3]{4}/2$; точки перегиба $\left(3\sqrt[3]{(3\mp\sqrt{5})/2};\ -3\sqrt[3]{(3\pm\sqrt{5})/2}\right)$, приближенно $(2{,}18;\ -4{,}13)$, $(4{,}13;\ -2{,}18)$. 8) Прямая $y=x$ — ось симметрии; асимптоты $y=1$, $y=x$, $x=1$; точка самопересечения $(e;\ e)$.

21.31. 1) Четырехлепестковая роза; оси координат и прямые $y=\pm x$ — оси симметрии; точка самопересечения $(0;\ 0)$; максимумы $r=1$ при

$\varphi=\pi(1+2k)/4$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$; при $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ максимум $x=4\sqrt{3}/9$ при $y=2\sqrt{6}/9$ ($\varphi=\arccos\sqrt{2/3}$); максимум $y=4\sqrt{3}/9$ при $x=2\sqrt{6}/9$ ($\varphi=\arcsin\sqrt{2/3}$). 2) Трехлепестковая роза; прямые $y=0$, $y=\pm\sqrt{3}\,x$ — оси симметрии; $(0;\ 0)$ — точка самопересечения; максимумы $r=1$ при $\varphi=0$, $\pm 2\pi/3$; максимум $x=1$ при $y=0$ ($\varphi=0$), минимумы $x=-9/16$ при $y=\pm 3\sqrt{15}/16\approx\pm 0{,}73$ ($\varphi=\pm\arccos(-\sqrt{6}/4)$); максимум $y\approx 0{,}185$ и минимум $y\approx -0{,}185$ при $x\approx 0{,}63$, максимум $y\approx 0{,}88$ и минимум $y\approx -0{,}88$ при $x=-0{,}44$. 3) $(0;\ 0)$ — центр симметрии, точка самопересечения и точка перегиба; асимптоты $y=\pm x-1/\sqrt{2}$ при $x\to+\infty$ и $y=\pm x+1/\sqrt{2}$ при $x\to-\infty$. 4) Прямые $x=0$ и $y=\pm x\sqrt{3}$ — оси симметрии; асимптоты $y=0$, $y=\pm x\sqrt{3}$; минимумы $r=1$ при $\varphi=\pi(1+4k)/6$, $k=0,\ 1,\ 2$; минимум $x\approx 0{,}83$ и максимум $x\approx -0{,}83$ при $y\approx 0{,}68$; максимум $y\approx -1$ при $x=0$. 5) Кривая из задачи **21.29.** 8) без изолированной точки $(0;\ 0)$. 6) Кардиоида; ось абсцисс — ось симметрии; $(0;\ 0)$ — точка возврата; $(2;\ 0)$, $(0;\ \pm 1)$ — точки пересечения с осями координат; максимум $x=2$ при $y=0$, минимумы $x=-1/4$ при $y=\pm\sqrt{3}/4$ ($\varphi=\pm 2\pi/3$); максимум $y=3\sqrt{3}/4$ и минимум $y=-3\sqrt{3}/4$ при $x=3/4$ ($\varphi=\pm\pi/3$). 7) Часть кривой из задачи **21.29.** 7). 8) Кривая, симметричная кривой 7) относительно оси ординат. 9) Ось абсцисс — ось симметрии; асимптота $x=2$; минимум $x=1$ при $y=0$ ($\varphi=0$). 10) $(0;\ 0)$ — центр симметрии; асимптоты $x=\pm 1$; точки пересечения с осями координат $(\pm 1;\ 0)$, $(0;\ 0)$; максимум $x=\sqrt{2}$ при $y=\sqrt{2}$, минимум $x=-\sqrt{2}$ при $y=-\sqrt{2}$; максимум $y\approx 0{,}23$ при $x\approx -0{,}5$, минимум $y\approx -0{,}23$ при $x\approx 0{,}5$; точки перегиба $(0;\ 0)$ и (приближенно) $(\pm 1{,}35;\ \pm 2{,}58)$.

§ 22. Задачи на нахождение наибольших и наименьших значений

22.1. 1) Квадрат со стороной $\sqrt{S}$. 2) Квадрат со стороной $\sqrt{S}$. **22.2.** $2R^2$. **22.3.** $(2;\ 1)$, $(2;\ -1)$. **22.4.** $(1;\ 1)$. **22.5.** 2. **22.6.** -2. **22.7.** $\sqrt{s/\sin\alpha}$. **22.8.** $2x+4y=5$. **22.9.** $\pi/3$ и $\pi/6$. **22.10.** $a/\sqrt{2}$. **22.11.** $(\pi-\alpha)/2$, $(\pi-\alpha)/2$. **22.12.** $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$. **22.13.** $R^2\sqrt{27}/4$. **22.14.** $p/(\pi+4)$. **22.15.** $(a/\sqrt{2};\ b/\sqrt{2})$. **22.16.** $\left(a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}\right)/6$. **22.17.** $\pi/3$. **22.18.** $2R/\sqrt{3}$. **22.19.** Расстояние от центра круга до стороны прямоугольника, параллельной прямой l, равно $\left(h+\sqrt{8R^2+h^2}\right)/4$. **22.20.** $\pi a^3/216$. **22.21.** $S^{3/2}/(3\sqrt{6\pi})$. **22.22.** 1. **22.23.** Котел должен иметь форму шара с внутренним радиусом $\sqrt[3]{3v/(4\pi)}$. **22.24.** 1/2. **22.25.** $\pi\left(\sqrt{5}+1\right)R^2$. **22.26.** Высота цилиндра $a/\sqrt{3}$, радиус его основания $a/\sqrt{6}$. **22.27.** $4R/3$. **22.28.** $4R$. **22.29.** Радиус основания $2R/3$, высота $H/3$. **22.30.** $2\pi\sqrt{2/3}$. **22.31.** $3^{7/6}(\pi v^2/2)^{1/3}$. **22.32.** $2\pi l^3\sqrt{3}/27$. **22.33.** $\pi r^3\sqrt{3}/2$. **22.34.** $(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$. **22.35.** $\pi/4$. **22.36.** r. **22.37.** Угол наклона стержня к горизонту равен $\arccos\left(\left(l+\sqrt{l^2+128R^2}\right)/16R\right)$. **22.38.** $(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$. **22.40.** $\sqrt{2}$. **22.41.** $h/2$. **22.42.** $BD=b-\dfrac{a}{\sqrt{k^2-1}}$, если $b>a/\sqrt{k^2-1}$; $BD=0$, если $b\leqslant a/\sqrt{k^2-1}$. **22.43.** $R/\sqrt{2}$. **22.44.** $r_1^2/r_2^2=R_1^3/R_2^3$, где r_1 и r_2 — расстояния от светящейся точки до центров шаров с радиусами R_1 и R_2 соответственно. **22.45.** $\operatorname{arctg} k$. **22.46.** $\sqrt{ab}$.

§ 23. Численное решение уравнений

23.1. 1) $(-3;\ -2{,}5)$ *), $(0{,}5;\ 1)$, $(2;\ 2{,}5)$. 2) $(-0{,}5;\ 0)$, $(1;\ 1{,}5)$. 3) $(-2;\ -1{,}5)$. 4) $x_1=-1{,}5$, $x_2=0{,}5$, $x_3=1$. 5) $x=1{,}5$. 6) $(2{,}5;\ 3)$. 7) $(1;\ 1{,}5)$. 8) $(-1{,}5;\ -1)$, $(2{,}5;\ 3)$. **23.2.** 1) $(-0{,}6;\ -0{,}5)$. 2) $(1{,}2;\ 1{,}3)$.

*) Здесь и далее указан один из возможных интервалов изоляции корня.

3) $(-0{,}6;\ -0{,}5)$. 4) $(1{,}9;\ 2)$. 5) $(0{,}8;\ 0{,}9)$. 6) $(-0{,}9;\ -0{,}8)$, $(0{,}8;\ 0{,}9)$. 7) $(0{,}5;\ 0{,}6)$, $(2{,}2;\ 2{,}3)$. 8) $(2{,}5;\ 2{,}6)$. **23.13.** $(-0{,}5;\ 0)$, $(1;\ 1{,}5)$, $(2{,}5;\ 3)$. **23.16.** 1) $(2{,}3;\ 2{,}4)$. 2) $(-1{,}1;\ -1)$, $(0{,}9;\ 1)$. **23.21.** 1) $[0{,}5;\ 3{,}7]$. 2) $[0{,}74;\ 22]$. **23.22.** $[-11/3;\ -1/9]$, $[0{,}27;\ 2{,}64]$; $(1;\ 1{,}5)$. **23.23.** $(0{,}4;\ 0{,}5)$. **23.24.** 2) $4b^3 + 27c^2 + 4a^3c - a^2b^2 - 18abc \leqslant 0$. **23.25.** $p^5 \geqslant q^2$. **23.26.** $4q \leqslant p^2$ при $m = 2$, $n = 1$; $0 < 27q^2 \leqslant -4p^3$ при $m = 3$, $n = 1$; $-4p^3 \leqslant 27q < 0$ или $0 < 27q \leqslant -4p^3$ при $m = 3$, $n = 2$; $p < 0$ и $0 < 4q \leqslant p^2$ при $m = 4$, $n = 2$; при всех остальных m и n при любых p и q уравнение будет иметь хотя бы один комплексный корень. **23.28.** 1) Два корня. 2) Один корень при $a < 1$, три корня при $a > 1$, два корня, из которых один двукратный, при $a = 1$. **23.29.** 1) $a < -175$, $a > 188/27$. 2) $a = 7{,}5$, $a = 104/9$. 3) $a < 16$, $a \neq 0$. 4) $0 < a < 23/16$. **23.30.** $(0;\ 0{,}2)$. **23.31.** 1) Один корень при $a \leqslant 0$, два корня при $0 < a < 1/e$, один двукратный корень при $a = 1/e$, нет корней при $a > 1/e$. 2) Нет корней при $a < -1/e$, один двукратный корень при $a = -1/e$, два корня при $-1/e < a < 0$, один корень при $a \geqslant 0$. 3) Нет корней при $a \leqslant 0$, один корень при $0 < a < e^2/4$, один простой и один двукратный корень при $a = e^2/4$, три корня при $a > e_2/4$. 4) Нет корней при $|a| < \operatorname{sh} x_0 \approx 1{,}5$, один двукратный корень при $|a| = \operatorname{sh} x_0$, два корня при $|a| > \operatorname{sh} x_0$, где x_0 — положительный корень уравнения $\operatorname{cth} x = x$. 5) Нет корней при $|a| > 3\sqrt{3}/16$, один двукратный корень при $|a| = 3\sqrt{3}/16$, два корня при $0 < |a| < 3\sqrt{3}/16$, три корня, из которых один трехкратный, при $a = 0$. **23.32.** 1) $a > 1$. 2) $a = -(3 + \ln 16)/4$. 3) $a > 2e$. 4) $|a| < 3\pi/2 - 1$. **23.33.** 2) Нет корней при $b > e^{-1-a}$, один двукратный корень при $b = e^{-1-a}$, два корня при $0 < b < e^{-1-a}$, один корень при $b \leqslant 0$.

23.34. 2) Границей областей в плоскости $(a;\ b)$ служат прямая $b = 0$ и параметрически заданная кривая $a = e^x(3 - x)/3$, $b = e^x/3x^2$. **23.36.** Если n — четное число, то: один корень при $a > (n/e)^n$, два корня, из которых один двукратный, при $a = (n/e)^n$, три корня при $0 < a < (n/e)^n$, один n-кратный корень при $a = 0$, нет корней при $a < 0$; если n — нечетное число, то: нет корней при $a > (n/e)^n$, один двукратный корень при $a = (n/e)^n$, два корня при $0 < a < (n/e)^n$, один n-кратный корень при $a = 0$, один корень при $a < 0$. **23.37.** 1) $(1;\ 2)$. 2) $(-5;\ -4)$, $(-1;\ 0)$, $(5;\ 6)$. 3) $(4;\ 5)$. 4) $(-2;\ -1)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(3;\ 4)$. 5) $(2;\ 3)$, $(3;\ 4)$. 6) $(-7;\ -6)$, $(-1;\ 0)$. 7) $(-4;\ -3)$, $(-1;\ -0{,}5)$, $(-0{,}5;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(3;\ 4)$. 8) $(-2;\ -1)$, $(0;\ 0{,}5)$, $(0{,}5;\ 1)$. 9) $(-2;\ -1)$. 10) $(-3;\ -2)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ 2)$. **23.38.** $(-a^2,\ -b^2)$, $(-b^2;\ -c^2)$, $(-c^2;\ +\infty)$. **23.39.** 1) $(-1;\ -0{,}9)$, $(0{,}9;\ 1)$. 2) $(-3{,}6;\ -3{,}5)$, $(-2{,}2;\ -2{,}1)$, $(1{,}2;\ 1{,}3)$. 3) $(-0{,}9;\ -0{,}8)$, $(0{,}6;\ 0{,}7)$. 4) $(-0{,}8;\ -0{,}7)$. 5) $(-0{,}5;\ -0{,}4)$. **23.40.** 1) $x_1 = -1{,}86$, $x_2 = 1{,}70$. 2) $x_1 = -3{,}06$, $x_2 = -0{,}69$, $x_3 = 3{,}76$. 3) $x = 3{,}63$. 4) $x_1 = -0{,}435$, $x_2 = 0{,}381$. 5) $x_1 = -0{,}867$, $x_2 = 1{,}867$. 6) $x_1 = 0{,}27$, $x_2 = 2{,}25$. 7) $x = 0{,}21$. 8) $x = 1{,}088$. 9) $x_1 = 0{,}776$, $x_2 = 2{,}223$. 10) $x = 0{,}567$. **23.41.** 652,7 мм. **23.42.** $(-1{,}10;\ -0{,}48)$, $(1{,}71;\ 1{,}39)$. **23.44.** 1) $x_1 \in (3;\ 3{,}1)$, $x_2 \in (4{,}7;\ 4{,}8)$. 2) $x_1 = 3{,}028$. 3) $x_2 = 4{,}728$. **23.45.** 1) $x = 9{,}9667$. 2) $x = -0{,}88677$. 3) $x = -0{,}19994$. 4) $x = 0{,}091$. 5) $x = 0{,}15495$. 6) $x = -0{,}5283$. 7) $x = 2{,}0945514815$. 8) $x = 0{,}4816$. 9) $x = 1{,}172$. **23.46.** 1) $a \leqslant e^{1/e}$. 2) $e^{-e} < a \leqslant e^{1/e}$. **23.47.** 1) 3,4368. 2) $x_1 = 4{,}7300$; $x_2 = 7{,}8532$. **23.48.** $x' = 0{,}5896$, $x_{n+1} = e^{0{,}8x_n - 1}$; $x'' = 2{,}2805$, $x_{n+1} = 1{,}25(1 + \ln x_n)$. **23.49.** 1) $x_1 = -2{,}214$, $x_2 = 0{,}539$, $x_3 = 1{,}675$. 2) $x_1 = -1{,}221$, $x_2 = 0{,}724$. 3) 2,259. 4) $x = -2{,}087$. 5) $x_1 = -x_2 = -0{,}824$. 6) $x_1 = -2{,}33006$, $x_2 = 0{,}20164$, $x_3 = 2{,}12842$. **23.50.** 1) $x = \pm 3{,}60555127$. 2) $x_1 = -2{,}666667$, $x_2 = 0{,}292893$, $x_3 = 1{,}707107$. 3) 0,84375. **23.51.** 1) $x = 1{,}76926$. 2) $x = 1{,}21341$. 3) $x_1 = -0{,}951$, $x_2 = 1{,}756$, $x_3 = 2{,}694$. 4) $x_1 = 0{,}472$, $x_2 = 9{,}999$. 5) $x = 0{,}739087$. 6) $x = 2{,}5062$. 7) $x = -0{,}56715$. 8) $x = \pm 1{,}199678$. 9) $x = 4{,}49341$. 10) $x_1 = 2{,}081$, $x_2 = 5{,}940$. **23.52.** $x = -10{,}261$. **23.53.** $z = \pm i0{,}9320$. **23.54.** 1) $x = 0{,}675$. 2) $x = 0{,}6705$. 3) $x = 0{,}6705$. **23.55.** Сходится к $\operatorname{sign} x_0$, если $|x_0| > 1/\sqrt{3}$; сходится к 0, если $|x_0| < 1/\sqrt{5}$; не сходится при $|x_0| = 1/\sqrt{5}$; при $|x_0| = 1/\sqrt{3}$ последовательность не определена; при $1/\sqrt{5} < |x_0| < 1/\sqrt{3}$, если последовательность определена, то она сходится либо к $+1$, либо к -1. **23.58.** $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$. **23.61.** $|\xi - x_2| < 10^{-7}$. **23.62.** 1) $x = 0{,}325$. 2), 3), 4) $x = 0{,}3295$. **23.63.** $x = 1{,}0448$. **23.64.** $x_1 = -10{,}2610$, $x_2 = 9{,}8860$. **23.65.** $x = 0{,}740841$. **23.66.** 1) $x = 0{,}78669$. 2) $x = 1{,}755581$.

§ 24. Вектор — функции. Кривые

24.6. 1) $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, 2) $-\mathbf{i} - \mathbf{j}/\pi = \mathbf{k}$. **24.11.** 1) $\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$; $x - t_0 = (y - t_0^2)/(2t_0) = (z - t_0^3)/(3t_0^2)$. 2) $\cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j}$; $(x - \sin t_0)/\cos t_0 = -(y - \cos t_0)/\sin t_0$, $z + 1 = 0$. 3) $\omega \sin 2\omega t(a\mathbf{i} - b\mathbf{j}) + \mathbf{k}$;

$$\frac{x - a\sin^2 \omega t_0}{a\omega \sin 2\omega t_0} = -\frac{y - b\cos^2 \omega t_0}{b\omega \sin 2\omega t_0} = z - t_0.$$

24.12. 1) $2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. 2) $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')/\sqrt{\mathbf{r}^2}$. 3) $[[\mathbf{r}, \mathbf{r}''], \mathbf{r}''] + [[\mathbf{r}, \mathbf{r}'], \mathbf{r}''']$. 4) $(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}''')$. **24.23.** 1) $(\mathbf{r}')^2[\mathbf{r}', \mathbf{a}]^2$. 2) $-(\mathbf{r}', \mathbf{a})[\mathbf{r}', \mathbf{a}]^2$.

24.29. 1) $\cos\alpha = \dfrac{\left(\sqrt{\rho^2 + z^2}\right)'}{\sqrt{(\rho')^2 + (\rho\varphi')^2 + (z')^2}} = \dfrac{\rho\rho' + zz'}{\sqrt{\rho^2 + z^2}\sqrt{(\rho')^2 + (\rho\varphi')^2 + (z')^2}}$.

2) $|\mathbf{r}''| = \sqrt{\rho_0^2[(\varphi')^4 + (\varphi'')^2] + (z'')^2}$.

24.30. $|\mathbf{r}'| = \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2[(\theta')^2 + (\varphi' \cos\theta)^2]}$. **24.35.** $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$. **24.36.** 1) $x = ae^{k\varphi}\cos\varphi$, $y = ae^{k\varphi}\sin\varphi$, $z = be^{k\varphi}$. 2) $x = at\cos t$ $y = at\sin t$, $z = bt$. **24.41.** (a_{ij}) — вырожденная матрица. **24.43.** $\rho = e^{\varphi}$ $(t = \varphi)$. **24.46.** 1) $(x - e)/e = (y - e^{-1})/(-e^{-1}) = (z - 1)/2$. 2) $x = y + 1 = z$. **24.47.** $x + a(4 - \pi)/2 = y = z/\sqrt{2} - a$; $\varphi = \pi/4$. **24.48.** Если $t_0 \neq 0$, то $(x - t_0^4)/(4t_0^2) = (y - t_0^3)/(3t_0) = (z - t_0^2)/2$, $4t_0^2(x - t_0^4) + 3t_0 (y - t_0^3) + 2(z - t_0^2) = 0$, а если $t_0 = 0$, то $x = y = 0$ — касательная прямая, $z = 0$ — нормальная плоскость.

24.49. $x + (-1)^m z\sqrt{2} = (0{,}5 + (-1)^n)R$, $2y - (-1)^n R = 0$, $m, n = 0, 1$. **24.50.** $(-2;\ 12;\ 14)$, $(-2;\ 3;\ -4)$. **24.51.** $8(x + y + z) - 5 = 0$.

24.52. $x + 3y = 10$, $3y + 4z = 25$. **24.53.** $\cos\alpha = \sqrt{a}/c$, $\cos\beta = \sqrt{b}/c$, $\cos\gamma = \sqrt{2z}/c$, $c = \sqrt{a + b + 2z}$. **24.54.** $(p + q)/\sqrt{2}$. **24.59.** $(x - 1)/1 = (y - 1)/2 = (z - 1)/3$, $x + 2y + 3z - 6 = 0$, парабола $y = 3x^2/4$. **24.60.** $x/x_0 - y/y_0 + z/z_0 = 1$, $x_0y_0z_0 \neq 0$.

24.71. 1) $\operatorname{ch}(x/a)$. 2) $\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$. 3) $\sqrt{a^2\operatorname{sh}^2 t + b^2\operatorname{ch}^2 t}$. 4) $3a|\sin 2t|/2$. 5) $2a|\cos(t/2)|$. 6) $\sqrt{a^2 + b^2}$. 7) $R\sqrt{1 + \sin^2 t}$

24.73. 1) $a\sqrt{1 + \varphi^2}$. 2) $a\sqrt{1 + \varphi^2}/\varphi^2$. 3) $ae^{b\varphi}\sqrt{1 + b^2}$.

24.76. 1) $k = R^{-1} = 2|a|/(1 + 4a^2x^2)^{3/2}$. 2) $k = R^{-1} = 6|x|/(1 + 9x^4)^{3/2}$. 3) $k = \dfrac{1}{R} = \dfrac{|\sin x|}{(1 + \cos^2 x)^{3/2}}$. 4) $k = \dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x/a)}$. 5) $k = \dfrac{1}{R} = |\cos(x/a)|/a$.

24.77. 1) $k = \dfrac{a^4b^4}{(b^4x^2 + a^4y^2)^{3/2}} = \dfrac{ab}{(\varepsilon^2x^2 - a^2)^{3/2}}$, $\xi = x^3c^2/a^4$, $\eta = -y^3c^2/b^4$, где $c^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = c/a$ — эксцентриситет. 2) $k = \sqrt{\dfrac{3a^2}{x(2a + 3x)^3}}$, $\xi = -x(a + 3x)/a$, $\eta = 2y(a + 2x)/x$. 3) $k = 1/3\sqrt[3]{a|xy|}$, $\xi = x^{1/3}(3a^{2/3} - 2x^{2/3})$, $\eta = y^{1/3}(a^{2/3} + 2x^{2/3})$. 4) $k = |x + 2a|(a - x)^2/a(2a^2 - x^2)^{3/2}$, $\xi = a(x^3 - 2a^3)/(x + 2a)(a - x)^2$, $\eta = 2ay(x + a)/x(x + 2a)$.

24.78. 1) $ab/(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}$.
2) $ab/(a^2\operatorname{sh}^2 t + b^2\operatorname{ch}^2 t)^{3/2}$. 3) $1/(4a|\sin(t/2)|)$.

24.79. 1) $\xi = -(9t^2 + 2)t^2/2$, $\eta = 4(3t^2 + 1)t/3$. 2) $\xi = \dfrac{a^2 + b^2}{a}\operatorname{ch}^3 t$, $\eta = -\dfrac{a^2 + b^2}{b}\operatorname{sh}^3 t$. 3) $\xi = \pi a + a(t - \sin t)$, $\eta = -2a + a(1 - \cos t)$. 4) $x^2 + y^2 = a^2$.

24.80. p. **24.81.** 1) $2/(3\sqrt{3})$. 2) $2/a$, $a > 0$. 3) $1/a$, $a > 0$.

24.86. 1) $a^2/3\rho$. 2) $\frac{4}{3}a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|$. 3) $a\cos^2\varphi\left(1+8\sin^2\varphi\right)^{3/2}/(4+8\sin^2\varphi)$. 4) $a\left(1+\varphi^2\right)^{3/2}/(2+\varphi^2)$. 5) $a\left(\varphi^2+1\right)^{3/2}/\varphi^4$. 6) $\rho\sqrt{1+b^2}$.

24.88. 1) $y=a\,\mathrm{ch}(x/a)$. 2) При том же полюсе и соответствующем повороте оси: $\rho=\lambda e^{a\varphi_1}$, $\varphi_1=\varphi+\pi/2$. 3) Кардиоида. **24.92.** $\ln a=a^{\pi/2}$. **24.105.** $y=\sqrt{2}\left(x-1+\sqrt{1-x}\right)$. **24.106.** $y=-x^2/2+\pi x/2+1-\pi^2/8$.

24.108. 1) $8a$. 2) $3a/2$. 3) $8a$. **24.109.** 1) $x\sin t_0-y\cos t_0+\frac{a}{b}z-at_0=0$; $x\sin t_0-y\cos t_0-\frac{b}{a}z+\frac{b^2}{a}t_0=0$; $x\cos t_0+y\sin t_0-a=0$. 2) $3t_0^2x-3t_0y+z-t_0=0$; $x+2t_0y+3t_0^2z-t_0\left(1+2t_0^2+3t_0^4\right)=0$; $t_0\left(9t_0^2+2\right)x+\left(9t_0^4-1\right)y-3t_0\left(2t_0^2+1\right)z-t_0^2\left(1+6t_0^2+3t_0^4\right)=0$. 3) $e^{-t_0}x-e^{t_0}y-\sqrt{2}z+2t_0=0$; $e^{t_0}x-e^{-t_0}y+\sqrt{2}z+2\left(t_0+\mathrm{sh}\,2t_0\right)=0$; $x+y-\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,t_0z+2\left(t_0\,\mathrm{sh}\,t_0-\mathrm{ch}\,t_0\right)=0$. 4) $(\sin t_0-\cos t_0)x-(\sin t_0+\cos t_0)y+2z-e^{t_0}=0$; $(\cos t_0-\sin t_0)x+(\cos t_0+\sin t_0)y+z-2e^{t_0}=0$; $(\sin t_0+\cos t_0)x+(\sin t_0-\cos t_0)y-e^{t_0}=0$. 5) $6y_0^2(x-x_0)-8y_0^3(y-y_0)-(z-z_0)=0$; $2y_0(x-x_0)+(y-y_0)+4y_0^3(z-z_0)=0$; $\left(1-32y_0^6\right)(x-x_0)-2y_0\left(12y_0^4+1\right)(y-y_0)+2y_0^2\left(8y_0^2+3\right)(z-z_0)=0$. 6) $ay-z+b=0$, $x+\varphi'(x_0)y+a\varphi'(x_0)z=x_0+(a^2+1)\varphi(x_0)\varphi'(x_0)+ab\varphi'(x_0)$, $(a^2+1)\times\varphi'(x_0)x-y-az=(a^2+1)\varphi'(x_0)x_0-(a^2+1)\varphi(x_0)-ab$.

24.110. 1) $xy_0-x_0y=0$, $z=z_0$; $x_0x+y_0y=a^2$, $a^2(x-x_0)=by_0(z-z_0)$.

2) $\dfrac{x-x_0}{1-32y_0^6}=-\dfrac{y-y_0}{2y_0\left(12y_0^4+1\right)}=\dfrac{z-z_0}{2y_0\left(8y_0^2+3\right)}$; $\dfrac{x-x_0}{6y_0^2}=-\dfrac{y-y_0}{8y_0^3}=-(z-z_0)$.

3) $\dfrac{x-x_0}{t_0^3+2t_0}=\dfrac{y-y_0}{1-t_0^4}=-\dfrac{z-z_0}{t_0\left(2t_0^2+1\right)}$; $x-x_0=-\dfrac{y-y_0}{2t_0}=\dfrac{z-z_0}{t_0^2}$.

24.113. Винтовая линия: $x=(a+l)\cos t$, $y=(a+l)\sin t$, $z=bt$. **24.115.** $bx-ay+abz=2ab$. **24.116.** $4x-y+z-9=0$.

24.118. $\boldsymbol{\tau}=(\mathbf{j}+\mathbf{k})/\sqrt{2}$, $\boldsymbol{\nu}=(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})/\sqrt{6}$, $\boldsymbol{\beta}=(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})/\sqrt{3}$.

24.119. 1) $\boldsymbol{\tau}=(3\cos t\mathbf{i}-3\sin t\mathbf{j}+4\mathbf{k})/5$, $\boldsymbol{\nu}=\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}$, $\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{5}(4\cos t\mathbf{i}-4\sin t\mathbf{j}-3\mathbf{k})$. 2) $\boldsymbol{\tau}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{t}{2}\mathbf{i}+\cos\frac{t}{2}\mathbf{j}-\mathbf{k}\right)$, $\boldsymbol{\nu}=\cos\frac{t}{2}\mathbf{i}-\sin\frac{t}{2}\mathbf{j}$, $\boldsymbol{\beta}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{t}{2}\mathbf{i}+\cos\frac{t}{2}\mathbf{j}+\mathbf{k}\right)$.

24.121. $2/(1+a^2)$. **24.122.** 1) $a\left[a^2+b^2\,\mathrm{ch}\,2t\right]^{1/2}/\left[a^2\,\mathrm{ch}\,2t+b^2\right]^{3/2}$. 2) $|\sin 2t|/\sqrt{2}$. 3) $0{,}25\sqrt{1+\sin^2(t/2)}$. 4) $\sqrt{2}/(x+y)^2$. 5) $\mathrm{sh}\,t/\left(a\sqrt{2}\,\mathrm{ch}^2\,t\right)$. 6) $2/(a\,\mathrm{ch}\,t)$. 7) $(a+b)^{1/2}/(a+b+2z)^{3/2}$.

24.123. 1) $e^t/3$. 2) $1/(a\,\mathrm{ch}^2\,t)$. 3) $-12y/(64y^6+36y^4+1)$.

24.124. 1) $k=\varkappa=a/(a+y)^2$. 2) $k=\varkappa=1/(2a\,\mathrm{ch}^2\,t)$. 3) $k=-\varkappa=2abt/(a^2+b^2t^2)^2$. 4) $k=\varkappa=1/(3(t^2+1)^2)$. 5) $k=\sqrt{5+3\sin^2 t}/\left(R\left(1+\sin^2 t\right)^{3/2}\right)$, $\varkappa=6\sin t/\left(R\left(5+3\sin^2 t\right)\right)$, точки уплощения $(0;\ 0;\ \pm R)$.

24.125. 1) Точки распрямления $x=n\pi$; точки уплощения $x=\pi/2+n\pi$ 2) Точек распрямления нет; точки уплощения $t=\pm 1$. **24.132.** Винтовая линия. **24.134.** Шаг винта равен длине окружности цилиндра. **24.139.** Центр лежит на бинормали на расстоянии $\left|\dfrac{1}{\varkappa}\dfrac{dR}{ds}\right|$, где R — радиус кривизны.