1 Обчислення визначників методом представлення їх у вигляді суми двох визначників

У лекціях була доведена така властивість визначників:

Властивість 1 *Якщо всі елементи i-го рядка визначника подані у вигляді суми двох доданків*

$$c_{ij} = a_j + b_j, j = 1, ...n,$$

то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких усі рядки окрім i-го такі ж, як і у вихідному визначнику, а i-й рядок в одному з визначників складаєтьcя з елементів a_j, а в іншому – з елементів b_j.

Аналогічна властивість має місце для стовпчиків. Розглянемо приклади на застосування цієї властивості.

Приклад 1 *№112 (И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре)*

Довести, що

$$\det J = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 x & a_1 - b_1 x & c_1 \\ a_2 + b_2 x & a_2 - b_2 x & c_2 \\ a_3 + b_3 x & a_3 - b_3 x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 x & b_1 x & c_1 \\ a_2 x & b_2 x & c_2 \\ a_3 x & b_3 x & c_3 \end{vmatrix}.$$

Застосуємо вищезгадану властивість спочатку до першого стовпчика, а потім до другого.

$$\det J = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 - b_1 x & c_1 \\ a_2 & a_2 - b_2 x & c_2 \\ a_3 & a_3 - b_3 x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 x & a_1 - b_1 x & c_1 \\ b_2 x & a_2 - b_2 x & c_2 \\ b_3 x & a_3 - b_3 x & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & -b_1 x & c_1 \\ a_2 & -b_2 x & c_2 \\ a_3 & -b_3 x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 x & a_1 & c_1 \\ b_2 x & a_2 & c_2 \\ b_3 x & a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 x & -b_1 x & c_1 \\ b_2 x & -b_2 x & c_2 \\ b_3 x & -b_3 x & c_3 \end{vmatrix}.$$

Перший і четвертий визначники дорівнюють нулю, оскільки мають у першому випадку два однакові, а у другому – два пропорційні стовпці. У другому визначнику винесемо з другого стовпчика -x, а у третьому визначнику винесемо з першого стовпчика x та поміняємо перший та другий стовпчики місцями. Маємо:

$$\det J = -x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 x & b_1 x & c_1 \\ a_2 x & b_2 x & c_2 \\ a_3 x & b_3 x & c_3 \end{vmatrix}.$$

Приклад 2 *№306 (И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре)*

Обчисліть визначник

$$\det J = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}$$

Подамо спочатку елементи першого стовпчика у вигляді суми двох доданків, а визначник у вигляді суми двох визначників. Потім аналогічно вчинимо з іншими стовпцями. Отримаємо:

$$\det J = \begin{vmatrix} a_1 + (x_1 - a_1) & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 + 0 & x_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 + 0 & a_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & x_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 + 0 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + (x_2 - a_2) & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 + 0 & \dots & x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & a_2 + 0 & \dots & a_n \\ 0 & a_2 + (x_2 - a_2) & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2 + 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & a_n \\ a_1 & (x_2 - a_2) & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2 & \dots & x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & 0 & \dots & a_n \\ 0 & x_2 - a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

Перший визначник дорівнює нулю, оскільки матриця має два однакових стовпці. В інших визначниках третій стовпчик подаємо у вигляді суми. Продовжуючи цей процес отримаємо, що відмінними від нуля залишаться визначник діагональної матриці з елементами $x_j - a_j$ на головній діагоналі, а також визначники n матриць, у яких один зі стовпчиків складається з елементів a_j, а в інших стовпчиках ненульовим є лише елемент головної діагоналі $x_j - a_j$. Тому (запишіть це докладно!)

$$\det J = \prod_{j=1}^{n}(x_j - a_j) + \sum_{k=1}^{n} a_k \prod_{j=1, j\neq k}^{n}(x_j - a_j).$$

Домашнє завдання: И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, №№ 114, 305, 307, 308.

2 Визначник Вандермонда

Означення 1 *Визначником Вандермонда називається визначник вигляду*

$$\det V(a_1, a_2, ...a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & ... & a_n^2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & ... & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Відомо, що

$$\det V(a_1, a_2, ...a_n) = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j).$$

Доведення цього факту розберіть, наприклад, за книгою А. Г. Куроша "Курс высшей алгебры".

Приклад 3 *№329 (И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре)*

Обчисліть визначник

$$\det V = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & ... & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & ... & (a-n)^{n-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a & a-1 & a-2 & ... & a-n \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 \end{vmatrix}.$$

Запишемо рядки цього визначника у зворотному порядку, при цьому його необхідно домножити на $sign \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n+1 \\ n+1 & n & n-1 & ... & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{C_{n+1}^2}$.

$$\det V = (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ a & a-1 & a-2 & ... & a-n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & ... & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & ... & (a-n)^n \end{vmatrix}.$$

Ми отримали визначник Вандермонда $(n+1)$*-го порядку з* $a_j = a - j, j = 0, 1, ..., n$.

$$\det V = (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}} \prod_{0 \le j < i \le n} (j - i).$$

Змінимо знак у кожній дужці під знаком добутку. Оскільки множників C_{n+1}^2, *то*

$$\det V = \prod_{0 \le j < i \le n} (i - j).$$

Запишемо окремо множники, що відповідають $j = 0, 1, ..., n-1$.

$\det V = (1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}\ldots{\cdot}(n-2){\cdot}(n-1){\cdot}n)(1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}\ldots{\cdot}(n-2){\cdot}(n-1))(1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}\ldots{\cdot}(n-2)){\cdot}\ldots{\cdot}1.$

Отримаємо:

$$\det V = n!(n-1)!(n-2)!\ldots \cdot 1! = \prod_{k=1}^{n} k!.$$

Домашнє завдання: И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, №№ 328, 330, 332.

3 Лінійні простори

Означення 2 *Нехай V – непорожня множина, F – поле. V називається лінійним простором над F, якщо на V задана операція додавання і зовнішня операція множення на скаляр з поля F, що задовольняють наступним властивостям:*

1. $\forall x, y \in V : x + y = y + x$;
2. $\forall x, y, z \in V : (x + y) + z = x + (y + z)$;
3. $\exists \theta \in V \forall x \in V : x + \theta = x$;
4. $\forall x \in V \exists y \in V : x + y = \theta$;
5. $\forall x, y \in V \forall \alpha \in F : \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
6. $\forall x \in V \forall \alpha, \beta \in F : (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
7. $\forall x \in V \forall \alpha, \beta \in F : (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;
8. $\forall x \in V : 1 \cdot x = x$.

Дуже важливим прикладом лінійного простору над полем $\mathbb{R}$ є простір векторів-стовпчиків $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} : a_j \in \mathbb{R} \right\}$$

з операціями поелементного додавання та поелементного множення на скаляр. За аналогією з цим прикладом елементи будь-якого лінійного простору будемо називати векторами.

Означення 3 *Вектори* $x, y, ..., w \in V$ *називаються лінійно незалежними, якщо з рівності* $\alpha x + \beta y + ... + \gamma w = 0$ *випливає, що* $\alpha = \beta = ... = \gamma = 0$. *Тобто дорівнювати нулю може лише тривіальна лінійна комбінація цих векторів.*

Означення 4 *Система векторів* $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ *називається повною, якщо будь-який вектор* $y \in V$ *може бути поданий у вигляді лінійної комбінації цих векторів*

$$y = \alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n, \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Означення 5 *Повна система лінійно незалежних векторів називається базисом лінійного простору.*

Означення 6 *Розмірністю лінійного простору називається число векторів у базисі* $(dimV)$.

Приклад 4 *Чи є наступні вектори у просторі* $\mathbb{R}^4$ *лінійно незалежними?*
а) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$

Запишемо лінійну комбінацію цих векторів, прирівняємо її до нуля і з'ясуємо, чи можуть якісь з коефіцієнтів лінійної комбінації бути відмінними від нуля.

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

.

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \\ -\alpha - 2\gamma = 0 \\ 3\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 5\gamma = 0. \end{cases}$$

Додамо до другого рівняння перше, а до четвертого – перше, помножене на (-2). Мета цього перетворення – позбавитися від α *у другому і четвертому рівняннях. Маємо:*

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \\ 2\beta + 2\gamma = 0 \\ 3\beta + 3\gamma = 0 \\ -3\beta - 3\gamma = 0. \end{cases}$$

Друге, третє і четверте рівняння виявилися еквівалентними. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

Ця система має нетривіальний (тобто такий, що складається не лише з нулів) розв'язок: $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = -1$. *Отже, вектори є лінійно залежними.*

б) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Прирівняємо до нуля лінійну комбінацію цих векторів і отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3\beta + 4\gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\gamma = 0. \end{cases}$$

Виражаємо з четвертого рівняння α *й підставляємо у друге і третє:*

$$\begin{cases} 3\beta + 4\gamma = 0 \\ \beta + 3\gamma = 0 \\ 2\beta - \gamma = 0 \\ \alpha = -2\gamma. \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо, що $\alpha = \beta = \gamma = 0$. *Отже, вектори є лінійно незалежними.*

Означення 7 *Підмножина* L *лінійного простору* V *називається лінійним підпростором, якщо ця підмножина сама є лінійним простором відносно операцій простору* V.

Приклад 5 *Чи є лінійним підпростором простору* $\mathbb{R}^3$ *множина векторів вигляду* $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$*?*

Оскільки $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 2 \end{pmatrix}$, *а* $2 \neq 1$, *то дана множина не є лінійним підпростором.*

Приклад 6 *Чи є множина* $L = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, x_5 = 2x_1, x_3 + x_4 = 0\}$

лінійним підпростором простору $\mathbb{R}^5$? Якщо так, знайдіть його базис і розмірність.

Перевіримо замкненість множини L відносно операцій додавання і множення на скаляр.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \\ x_5 + y_5 \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що друга компонента суми дорівнює нулю. Далі

$$x_5 + y_5 = 2x_1 + 2y_1 = 2(x_1 + y_1),$$

$$(x_3 + y_3) + (x_4 + y_4) = (x_3 + x_4) + (y_3 + y_4) = 0 + 0 = 0.$$

Отже, L замкнена відносно суми. Розглянемо множення на скаляр.

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ 0 \\ \alpha x_3 \\ \alpha x_4 \\ \alpha x_5 \end{pmatrix}.$$

Друга компонента вектора дорівнює нулю, окрім того

$$\alpha x_5 = \alpha 2x_1 = 2(\alpha x_2),$$

$$\alpha x_3 + \alpha x_4 = \alpha(x_3 + x_4) = 0.$$

Ми перевірили замкненість L відносно множення на скаляр.

Інші аксіоми лінійного простору перевіряються елементарно. Помітимо, що нульовий вектор – це

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \theta \in L,$$

а протилежний вектор – це

$$\begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \\ -x_3 \\ -x_4 \\ -x_5 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що

$$-x_5 = -(2x_1) = 2(-x_1),$$
$$-x_3 - x_4 = -(x_3 + x_4) = 0,$$

тому протилежний вектор лежить в L*. Отже,* L *– лінійний підпростір* $\mathbb{R}^5$*.*

Знайдемо базис L*. Зазвичай при побудові базису намагаються одну з компонент вектора покласти рівною 1, а інші, які можливо, покласти рівними нулю. Враховуючи умови* $x_5 = 2x_1$ *і* $x_3 + x_4 = 0$*, спробуємо у якості базисних векторів обрати*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, що ці вектори є лінійно незалежними.

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

З цієї рівності випливає, що

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ -\beta = 0 \\ 2\alpha = 0. \end{cases}$$

Таким чином, $\alpha = \beta = 0$*. Вектори* e_1 *та* e_2 *лінійно незалежні. Покажемо, що будь-який вектор з* L *можна подати у вигляді лінійної комбінації* e_1 *і* e_2*. Дійсно,*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ -x_3 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_3 e_2.$$

Отже, e_1, e_2 *– базис підпростору* L*,* $dim L = 2$*.*

Домашнє завдання: И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, №№ 639-642, 1285-1293, 1297-1300.

Консультації Заварзіної О.О. проходитимуть засобами електронної пошти та scype. За потреби звертайтеся за адресою: olesia.zavarzina@yahoo.com.