Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра **фундаментальної математики**

“**ЗАТВЕРДЖУЮ**”

Проректор з науково- педагогічної роботи

Пантелеймонов А.В.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

“\_\_\_\_”\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20 \_\_ р.

# Робоча програма навчальної дисципліни

**Групи Лі та однорідні простори**

спеціальність (напрям) **111-математика**

спеціалізація \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(шифр, назва спеціалізації)

факультет **математики і інформатики**

2018 / 2019 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

27 серпня 2018 року, протокол № 7

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Петров Євген В’ячеславович – кандидат фізико-математичних наук,**

**старший викладач кафедри фундаментальної математики.**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики

Протокол від “27” серпня 2018 року № 1.

Завідувач кафедри Ямпольський О.Л.

Програму погоджено методичною комісією факультету математики і інформатики

Протокол від “27” серпня 2018 року № 1.

Голова методичної комісії Анощенко О.О.

**Вступ**

Програма навчальної дисципліни **“Групи Лі та однорідні простори”** складена відповідно до освітньо-професійної (освітньо-наукової) програми підготовки **магістр**

спеціальність (напрям) **111-математика**

спеціалізації \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. **Опис навчальної дисципліни**

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни “Групи Лі та однорідні простори” є надання майбутнім фахівцям знань з теорії Лі, геометрії груп Лі та однорідних просторів.

1.2 Основними завданнями вивчення дисципліни “Групи Лі та однорідні простори” є навчання студентів теоретичним основам теорії груп Лі та однорідних просторів та методам її застосування у інших розділах математики.

1.3. Кількість кредитів – **4**

1.4. Загальна кількість годин - **120**

|  |  |
| --- | --- |
| 1.5. Характеристика навчальної дисципліни | |
| Нормативна / **за вибором** | |
| Денна форма навчання | Заочна (дистанційна) форма навчання |
| Рік підготовки | |
| **2-й** |  |
| Семестр | |
| **3-й** |  |
| Лекції | |
| **32 год.** |  |
| Практичні, семінарські заняття | |
| **32 год.** |  |
| Лабораторні заняття | |
|  |  |
| Самостійна робота | |
| **56 год.** |  |
| Індивідуальні завдання | |
|  |  |

1.6. Заплановані результати навчання.

У результаті вивчення даного курсу студент повинен

**знати :**

* Основні поняття теорії Лі: визначення топологічної групи, групи Лі, підгрупи Лі, гомоморфізму та ізоморфізму груп Лі, властивості лівих та правих зсувів, визначення та властивості зв’язної компоненти одиниці. Теорема Картана. Основні приклади груп Лі (загальні та спеціальні лінійні, ортогональні, псевдоортогональні, унітарні, спеціальні ортогональні та унітарні). Визначення та властивості лівоінваріантного векторного поля, визначення та властивості експоненціального відображення. Випадок матричних груп Лі. Побудова дужки Лі та її властивості. Дужка Лі лівоінваріантних векторних полів.
* Визначення алгебри, алгебри Лі, підалгебри Лі, ідеалу, гомоморфізму та ізоморфізму алгебр Лі, алгебри Лі групи Лі. Приклади класичних алгебр Лі.
* Визначення представлення групи, представлення групи Лі, представлення алгебри Лі, властивості та приклади представлень. Визначення внутрішнього автоморфізму, визначення та властивості приєднаного представлення групи Лі та алгебри Лі.
* Теореми про зв’язок підгруп Ли з підалгебрами Лі, про зв’язок гомоморфізмів груп Лі та алгебр Лі. Теорема існування та єдиності групи Лі для даної алгебри Лі, теорема Адо.
* Визначення лівоінваріантної та біінваріантної метрики на групи Лі, інваріантної білінійної форми, форми Кіллінга. Формули ріманової зв’язності та кривини інваріантних метрик на групах Лі. Геодезичні в групах Лі. Біінваріантні метрики та напівпрості алгебри Лі. Компактні групи та алгебри Лі.
* Визначення дії групи на множині, гладкої дії групи Лі на гладкому многовиді, вільної, ефективної, транзитивної дії, стабілізатора. Приклади та властивості дій.
* Визначення однорідного простору групи Лі, однорідного ріманового простору. Теорема Маєрса. Інваріантність метрики однорідного ріманового простору.
* Визначення ріманової субмерсії. Формули О’Нейла.
* Формули для обчислення секційних кривин та кривини Річчі однорідного простору.
* Визначення кілінгового поля, симетричного та локально симетричного простору. Різні характеризації симетричних просторів.
* Основні приклади симетричних просторів: простори постійної кривини, проективні простори, грасманові многовиди.

**уміти :**

* Обчислювати для матричної групи Лі її алгебру Лі, знаходити базис цієї алгебри, структурні константи, форму Кіллінга.
* Обчислювати матричну експоненту та знаходити однопараметричні підгрупи в матричних групах Лі.
* Обчислювати зв’язність та кривину лівоінваріантної та біінваріантної метрики на групі Лі.
* Обчислювати зв’язність та кривину, тензор Річчі інваріантної метрики на однорідному просторі.

**2. Тематичний план навчальної дисципліни**

**Розділ 1.** Групи Лі, алгебри Лі та інваріантні метрики.

Тема 1. Групи Лі, приклади, основні властивості

* Класичні матричні групи.
* Топологічні групи, основні означення, приклади.
* Групи Лі, основні означення, приклади.
* Ліві та праві зсуви, зв’язна компонента одиниці та її властивості.
* Знаходження топологічної структури класичних груп.
* Дотичні простори до класичних груп.

Тема 2. Лівоінваріантні поля, експоненціальне відображення, дужка Лі

* Лівоінваріантні поля, їх властивості.
* Експоненціальне відображення та його властивості. Однопараметричні підгрупи.
* Побудова дужки Лі на дотичному просторі в одиниці групи.
* Дужка Лі лівоінваріантних полів.

Тема 3. Алгебри Лі

* Алгебри та асоціативні алгебри.
* Алгебри Лі, властивості, приклади. Алгебра Лі групи Лі.

Тема 4. Представлення груп та алгебр Лі

* Представлення групи, представлення групи Лі, приклади. Приєднане представлення групи Лі.
* Представлення алгебри Лі, приклади. Приєднане представлення алгебри Лі.

Тема 5. Основні теореми теорії Лі

* Теорема про підгрупи та підалгебри Лі.
* Теорема про гомоморфізми груп та алгебр Лі.
* Теорема про існування та єдність групи Лі з даною алгеброю Лі.

Тема 6. Лівоінваріантні та біінваріантні метрики

* Лівоінваріантні метрики, приклади побудови.
* Лівоінваріантна зв’язність, формули для зв’язності та кривини лівоінваріантної метрики.
* Біінваріантна метрика, формули для зв’язності та кривини.
* Опис груп Лі, що допускають біінваріантні метрики.

**Розділ 2.** Однорідні та симетричні простори

Тема 7. Дії груп на множинах, однорідні простори

* Дія групи на множині, властивості.
* Гладка дія групи Лі на многовиді. Властивості стабілізаторів. Приклади.
* Структура многовиду на просторі суміжних класів.
* Гладка структура на однорідному просторі групи Лі.

Тема 8. Інваріантні ріманові метрики

* Інваріантна метрика. Рімановий однорідний простір.
* Опис інваріантної метрики у випадку ефективної дії. Компактність стабілізатора.
* Ріманові субмерсії та формули О’Нейла.
* Формули кривини інваріантної метрики. Випадок нормальної метрики.
* Приклад Берже.

Тема 9. Симетричні простори

* Означення та критерії симетричного простору.
* Структура алгебри Лі групи ізометрій симетричного простору. Непривідні простори.
* Симетричні простори компактного та некомпактного типу. Формули для кривини.

**3. Структура навчальної дисципліни**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Назви розділів і тем | Кількість годин | | | | | | | | | | | |
| денна форма | | | | | | заочна форма | | | | | |
| усього | у тому числі | | | | | усього | у тому числі | | | | |
| л | п | лаб | інд | ср | л | п | лаб. | інд. | с. р. |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| **Розділ 1.** Групи Лі, алгебри Лі та інваріантні метрики. | | | | | | | | | | | | |
| Тема 1. Групи Лі, приклади, основні властивості |  | 6 | 4 |  |  | 6 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 2. Лівоінваріантні поля, експоненціальне відображення, дужка Лі |  | 4 | 6 |  |  | 4 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 3. Алгебри Лі |  | 2 | 2 |  |  | 4 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 4. Представлення груп та алгебр Лі |  | 2 | 2 |  |  | 4 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 5. Основні теореми теорії Лі |  | 4 | 2 |  |  | 6 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 6. Лівоінваріантні та біінваріантні метрики |  | 2 | 4 |  |  | 6 |  |  |  |  |  |  |
| Разом за розділом 1 | 70 | 20 | 20 |  |  | 30 |  |  |  |  |  |  |
| **Розділ 2.** Однорідні та симетричні простори | | | | | | | | | | | | |
| Тема 7. Дії груп на множинах, однорідні простори | 12 | 4 | 4 |  |  | 4 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 8. Інваріантні ріманові метрики | 12 | 4 | 4 |  |  | 4 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 9. Симетричні простори | 10 | 4 | 2 |  |  | 4 |  |  |  |  |  |  |
| Підготовка до іспиту | 10 |  | 2 |  |  | 8 |  |  |  |  |  |  |
| Разом за розділом2 | 50 | 12 | 12 |  |  | 20 |  |  |  |  |  |  |
| Усього годин | **120** | **32** | **32** |  |  | **56** |  |  |  |  |  |  |

**4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п\п | Назва теми | Кількість годин |
| 1 | Групи Лі, приклади, основні властивості | 4 |
| 2 | Лівоінваріантні поля, експоненціальне відображення, дужка Лі | 6 |
| 3 | Алгебри Лі | 2 |
| 4 | Представлення груп та алгебр Лі | 2 |
| 5 | Основні теореми теорії Лі | 2 |
| 6 | Лівоінваріантні та біінваріантні метрики | 4 |
| 7 | Дії груп на множинах, однорідні простори | 4 |
| 8 | Інваріантні ріманові метрики | 4 |
| 9 | Симетричні простори | 2 |
| 10 | Підготовка до іспиту | 2 |
|  | Разом | **32** |

**5. Завдання для самостійної роботи**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| №  з/п | Назва теми | Кількість  годин | Форма контролю |
| 1 | Групи Лі, приклади, основні властивості | 6 | Опитування |
| 2 | Лівоінваріантні поля, експоненціальне відображення, дужка Лі | 4 | Опитування |
| 3 | Алгебри Лі | 4 | Опитування |
| 4 | Представлення груп та алгебр Лі | 4 | Опитування |
| 5 | Основні теореми теорії Лі | 6 | Опитування |
| 6 | Лівоінваріантні та біінваріантні метрики | 6 | Опитування |
| 7 | Дії груп на множинах, однорідні простори | 4 | Опитування |
| 8 | Інваріантні ріманові метрики | 6 | Опитування |
| 9 | Симетричні простори | 4 | Опитування |
| 10 | Підготовка до іспиту | 12 | Іспит |
|  | Разом | **56** |  |

**6. Індивідуальні завдання**

Не передбачені навчальним планом.

**7. Методи контролю**

Опитування, іспит.

**8. Схема нарахування балів**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поточний контроль та самостійна робота | | | | | | | | | Іспит | Сума |
| Розділ 1 | | | | | | Розділ 2 | | |  |  |
| Т1 | Т2 | Т3 | Т4 | Т5 | Т6 | Т1 | Т2 | Т3 | 40 | 100 |
| 6 | 6 | 8 | 6 | 6 | 8 | 6 | 6 | 8 |

**Шкала оцінювання**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру | Оцінка | |
| Для іспиту | Для заліку |
| 90 – 100 | відмінно | зараховано |
| 70-89 | добре |
| 50-69 | задовільно |
| 1-49 | незадовільно | не зараховано |

**Критерії оцінювання**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Оцінка в балах | Оцінка за національною шкалою | |
| Оцінка | Пояснення | |
| 90 – 100 | Відмінно | Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою. |
| 70 – 89 | Добре | Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками. |
| 50 –69 | Задовільно | Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками. |
| 1–49 | Незадовільно | Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки |

**9. Рекомендована література**

**Основна література**

1. М.М. Постников. Группы и алгебры Ли. – М.: Наука, 1982.
2. С. Хелгасон. Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства. – М.: Факториал Пресс, 2005.
3. R. Bryant. An introduction to Lie groups and symplectic geometry // In: Geometry and Quantum Field Theory. – Providence: AMS, 1995.
4. A.W. Knapp. Lie groups beyond an introduction. – Boston: Birkhauser, 1996.

**Допоміжна література**

1. Ю.Д. Бураго, В.А. Залгаллер. Введение в риманову геометрию. – СПб.: Наука, 1994.
2. А. Бессе. Многообразия Эйнштейна. – М.: Мир, 1990.
3. Н. Бурбаки. Группы и алгебры Ли, часть 1. – М.: Мир, 1976.
4. Э. Картан. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. – М.: Издательство иностранной литературы, 1949.
5. Ш. Кобаяси, К. Номидзу. Основы дифференциальной геометрии. – М.: Наука, 1981.
6. Л.С. Понтрягин. Непрерывные группы. – М.: Наука, 1973.
7. Ж.-П. Серр. Алгебры Ли и группы Ли. – М.: Мир, 1969.
8. Ф. Уорнер. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. – М.: Мир, 1987.
9. Дж. Хамфрис. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. – М.: МЦНМО, 2003.
10. J. Cheeger, D.G. Ebin. Comparison theorems in Riemannian Geometry. – Amsterdam: Noth-Holland, 1975.

**10. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернет, відео-лекції, інше методичне забезпечення**