

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Кафедра фундаментальної математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

В.о. декана факультету математики
і інформатики

Євген МЕНЯЙЛОВ



серпень 2025 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ТЕОРІЯ МІРИ ТА ІНТЕГРАЛА

рівень вищої освіти **перший (бакалаврський)**

галузь знань **Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни **обов'язкова**

факультет **математики і інформатики**

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

26 серпня 2025 року, протокол № 1

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Дубовий Володимир Кирилович, доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри фундаментальної математики**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики
протокол від 26 серпня 2025 року № 1.

В. о завідувача кафедри



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)

програми



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики.
протокол від 26 серпня 2025 року № 1.

Голова науково-методичної комісії



Євген МЕНЯЙЛОВ

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “**ТЕОРІЯ МІРИ ТА ІНТЕГРАЛА**”
складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки «бакалавр»
спеціальності **111 – Математика**
освітня програма «**Математика**»

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни “Теорія міри та інтеграла” є надання майбутнім фахівцям знань у галузі сучасної теорії міри та інтеграла Лебега.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни є навчання студентів теоретичним основам і методам теорії міри та інтеграла Лебега, та застосуванню цих методів для розв’язання різноманітних задач теоретичного та практичного характеру

1.3. Кількість кредитів – **4**

1.4. Загальна кількість годин – **120**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Обов’язкова	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
3-й	
Семестр	
5-й	
Лекції	
64 год.	
Практичні, семінарські заняття	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
56 год.	
у тому числі індивідуальні завдання	
розрахунково-графічні роботи (2)	

1.6. Перелік компетентностей, що формує дана дисципліна:

ІК-01 Здатність розв’язувати складні задачі та практичні проблеми у математиці або у процесі навчання, що передбачає застосування теорій та методів математики, статистики й комп’ютерних технологій і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.

ЗК-01 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК-03 Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.

ЗК-07 Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.

ФК-01 Здатність формулювати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.

ФК-02 Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі.

ФК-04 Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганих.

1.7. Перелік результатів навчання, що формує дана дисципліна:

РН.04 Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми.

8. Пререквізити: Для вивчення дисципліни “Теорія міри та інтеграла” вимагається знання математичного аналізу в об’ємі програми з математичного аналізу ОК.05

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Метричні простори, простори з мірою.

Тема 1. Метричні простори.

1. Означення, приклади. Відкриті та замкнені множини, збіжні послідовності, неперервні функції.
2. Повнота. Теорема про вкладені множини. Теорема Бера.
3. Компакти у метричних просторах. Теорема Арцела.

Тема 2. Міра Лебега.

1. Алгебри та σ -алгебри множин. Борелівські множини. Борелівські класи множин.
2. Скінченно-адитивні та зліченно-адитивні міри. Атоми, атомарні та безатомні міри. Повні та неповні простори з мірою.
3. Теорія продовження мір. Конструкція зовнішньої міри та міри Лебега на відрізку.
4. Зв'язок між вимірністю за Лебегом та за Борелем.
5. Зміст терміну “майже усюди”. Теорема про існування похідної у монотонній функції.
6. Функція розподілу та загальний вигляд борелівської міри на відрізку.
7. σ -скінченні міри. Міра Лебега на $\mathbb{R}$.

Розділ 2. Інтеграл Лебега та його застосування.

Тема 3. Вимірні та інтегровані функції.

1. Різні означення вимірних функцій. Теорема про апроксимацію вимірної функції простими.
2. Збіжність за мірою та збіжність майже всюди. Теорема Єгорова. Теорема Лузіна.
3. Інтеграл Лебега та його базові властивості.
4. Теореми про границі послідовностей інтегрованих функцій: лема Фату, теорема Лебега про мажоровану збіжність, теореми Леві про послідовності та ряди.
5. Добуток просторів з мірою та теорема Фубіні. Обернена теорема Фубіні.
6. Інтеграл Лебега на просторах з σ -скінченною мірою.

Тема 4. Заряди.

1. Означення заряду, теорема про обмеженість, додатна та від'ємна частини заряду.
2. Теорема Гана про розкладення заряду.
3. Абсолютно неперервні заряди, сингулярні заряди та теорема Радона-Нікодіма.

Тема 5. Зв'язок між похідною та інтегралом.

1. Нормовані простори. Критерій неперервності лінійного оператора. Щільність множини неперервних функцій у просторі інтегрованих за Лебегом функцій на відрізку.
2. Теорема про похідну інтеграла як функції верхньої границі інтегрування.
3. Абсолютно неперервні функції та формула Ньютона - Лейбніца.

3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Розділ 1. Метричні простори, простори з мірою.												
Тема 1. Метричні простори	16	8				8						
Тема 2. Міра Лебега	28	16				12						
Разом за розділом 1	44	24				20						
Розділ 2. Інтеграл Лебега та його застосування.												
Тема 3. Вимірні та інтегровані функції.	40	22				18						
Тема 4. Заряди	16	8				8						
Тема 5. Зв'язок між похідною та інтегралом.	20	10				10						
Разом за розділом 2	76	40				36						
Усього годин	120	64				56						

4.Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Метричні простори.	8
2	Міра Лебега.	12
3	Вимірні та інтегровані функції.	8
4	Заряди.	8
5	Зв'язок між похідною та інтегралом.	10
6	Виконання розрахунково-графічної роботи.	10
	Разом	56

5.Індивідуальні завдання

Розрахунково-графічні роботи (2).

6. Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна).

7. Методи контролю

– поточний семестровий (виконання домашніх завдань); перевірка розрахунково-графічної роботи (2);
-- підсумковий екзамен.

8.Схема нарахування балів

Поточний контроль та самостійна робота		Разом	Екзамен	Сума
Розділ 1	Розділ 2	60	40	100
30	30			

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

Критерії оцінювання навчальних досягнень

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 –69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано,

		деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки.

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою
	для чотиривимірної шкали оцінювання
90 – 100	відмінно
70-89	добре
50-69	задовільно
1-49	незадовільно

6. Рекомендована література

Основна література

1. Кадець В.М., Курс функціонального аналізу та теорії міри. Підручник. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія “Університетська бібліотека”).
2. Радченко В.М., Теорія міри та інтеграла: навчальний посібник – Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2012 – 144 с.

Допоміжна література

1. D.L. Cohn, Measure Theory: Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher, Springer, 2013 – 443 p.
2. H. Bauer, Measure and Integration Theory, Walter de Gruyter, Berlin, New-York, 2001 – 230 p

