

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра фундаментальної математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Декан факультету
математики і інформатики

Григорій ЖОЛТКЕВИЧ



“ 08 ” 2024 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Основи алгебраїчної топології

рівень вищої освіти **перший(бакалаврський)**

галузь знань **11 – Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни **за вибором**

факультет **математики і інформатики**

2024/2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

27 серпня 2024 року, протокол № 8

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Петров Євген В'ячеславович – кандидат фізико-математичних наук,
старший викладач кафедри фундаментальної математики.**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики

Протокол від 26 серпня 2024 року № 1.

В. о. завідувача кафедри



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)

Програми



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики

Протокол від 27 серпня 2024 року № 1.

Голова науково-методичної комісії



Євген МЕНЯЙЛОВ

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “**Основи алгебраїчної топології**” складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки **бакалавр**

спеціальність **111 - Математика, 113 – Прикладна математика**
освітня програма «**Математика**», «**Прикладна математика**»

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни “**Основи алгебраїчної топології**” є ознайомлення з базовими конструкціями та інваріантами алгебраїчної топології.

1.2 Основними завданнями вивчення дисципліни “**Основи алгебраїчної топології**” є оволодіння методами дослідження топологічних просторів та відображень за допомогою алгебраїчних інваріантів.

1.3. Кількість кредитів – **4**

1.4. Загальна кількість годин - **120**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
За вибором	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
2-й	
Семестр	
4-й	
Лекції	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
56 год.	
Індивідуальні завдання	

1.6. Заплановані результати навчання.

У результаті вивчення даного курсу студент повинен знати теоретичні основи і застосовувати алгебраїчні методи для вивчення математичних структур, а саме:

знати :

- Топологія на просторі відображень, означення гомотопії, гомотопічної еквівалентності. Стяжні простори, ретракти, деформаційні ретракти. Гомотопії шляхів. Замкнені шляхи, фундаментальна група, властивості, приклади. Однозв'язність, приклади.

- Накриття, накриваюча гомотопія, універсальні накриття. Дія групи на множині і фундаментальна група простору орбіт. Група автоморфізмів, регулярні накриття, існування накриттів.
- Застосування фундаментальної групи. Теорема Борсука-Улама та її наслідки. Теорема Зейферта-ван Кампена.
- Поняття симпліціального простору (комплексу). Триангуляція. Визначення замкненої поверхні, зв'язної суми поверхонь. Опис замкнених поверхонь як фактор-просторів багатокутників (розгортка). Орієнтація. Класифікація орієнтовних та неорієнтовних замкнених поверхонь. Рід поверхні.
- Поняття гомотопічної групи, їхні властивості, зв'язок з накриттями, приклади обчислення та застосування. Теореми про барабан і Брауера. Ступінь відображення сфери і гладкого многовиду.
- Означення комплексу ланцюгів, його груп гомологій та когомологій, чисел Бетті, ейлерової характеристики. Алгебраїчна гомотопія. Техніка точних послідовностей.
- Симпліціальні гомології, приклади обчислення. Сингулярні гомології, їхні властивості і зв'язок з фундаментальною групою.
- Поняття клітинного простору (CW-комплексу), клітинні гомології, приклади обчислення. Пари Борсука, теорема про вирізання.
- Зв'язок між різними теоріями гомологій.

уміти :

- Визначати, чи є дані відображення гомотопічними, чи є дані топологічні простори гомотопічно еквівалентними.
- Обчислювати фундаментальну групу та інші гомотопічні групи даного топологічного простору.
- Знаходити універсальне накриття даного топологічного простору.
- Обчислювати ступінь відображення.
- Використовувати гомотопічні групи для розв'язку задач.
- Знаходити рід та ейлерову характеристику даної поверхні.
- Обчислювати групи симпліціальних та клітинних гомологій даного топологічного простору.

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Гомотопічні інваріанти та топологія поверхонь

Тема 1. Гомотопії та фундаментальна група

- Метрики і топології на просторі відображень.
- Гомотопія відображень. Основні властивості, приклади.
- Гомотопічна еквівалентність. Основні властивості, приклади.
- Ретракт, деформаційний ретракт. Стяжні простори. Приклади.
- Гомотопія шляхів і гомотопічні властивості добутку шляхів.
- Замкнені шляхи. Фундаментальна група та її властивості.
- Однозв'язні простори. Приклади.

Тема 2. Накриття та застосування фундаментальної групи

- Накриття. Універсальне накриття. Приклади.
- Дія групи на топологічному просторі. Накриття простору орбіт. Приклади.
- Підняття шляху. Накриваюча гомотопія.

- Обчислення фундаментальної групи за допомогою накриття. Приклади.
- Група автоморфізмів і регулярні накриття.
- Теорема про існування накриття з даною групою.
- Застосування фундаментальної групи як інваріанта.
- Двовимірні теореми про барабан та Брауера.
- Теорема Борсука-Улама та її наслідки.
- Теорема Зейферта-ван Кампена. Приклади застосування.

Тема 3. Топологія поверхонь

- Симплекси, симпліціальні простори та триангуляції. Триангуляції поверхонь.
- Розгортки. Переклеювання. Пряма сума та її властивості.
- Теорема класифікації компактних зв'язних поверхонь.
- Орієнтовність поверхонь.

Тема 4. Вищі гомотопічні групи

- Гомотопічні групи. Основні властивості, приклади.
- Гомотопічні групи і накриття. Приклади обчислення.
- Застосування гомотопічних груп як інваріантів.
- Загальні теореми про барабан і Брауера.
- Узагальнення теореми Борсука-Улама та її наслідків.
- Ступінь відображення сфери і гладкого многовиду.

Розділ 2. Гомологічні інваріанти

Тема 1. Ланцюгові комплекси та гомологічна алгебра

- Ланцюгові комплекси, їхні гомології та когомології.
- Числа Бетті та ейлерова характеристика.
- Алгебраїчні гомотопії. Інваріантність груп гомологій.
- Техніка точних послідовностей. Леми гомологічної алгебри.

Тема 2. Симпліціальні та сингулярні гомології

- Симпліціальні гомології, приклади обчислення.
- Барицентричні підрозділи.
- Сингулярні гомології та їхні властивості.
- Зв'язок сингулярних гомологій з фундаментальною групою. Теорема Хопфа.

Тема 3. Клітинні простори та клітинні гомології

- Клітинний простір, приклади. Пари Борсука. Теорема про вирізання.
- Сингулярні гомології клітинних просторів. Гомології сфер.
- Ізоморфізм сингулярних і симпліціальних гомологій.
- Клітинні гомології. Ізоморфізм сингулярних і клітинних гомологій.
- Приклади обчислення клітинних гомологій у цілих числах.

3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Розділ 1. Гомотопічні інваріанти та топологія поверхонь												
Гомотопії та фундаментальна група	20	6	6			8						
Накриття та застосування фундаментальної групи	20	6	6			8						
Топологія поверхонь	16	4	4			8						
Вищі гомотопічні групи	14	4	4			6						
Разом за розділом 1	70	20	20			30						
Розділ 2. Гомологічні інваріанти												
Ланцюгові комплекси та гомологічна алгебра	10	2	2			6						
Симпліціальні та сингулярні гомології	14	4	4			6						
Клітинні простори та клітинні гомології	16	6	4			6						
Підготовка до заліку	10		2			8						
Разом за розділом 2	50	12	12			26						
Усього годин	120	32	32			56						

4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

№ п/п	Назва теми	Кількість годин
1	Гомотопії та фундаментальна група	6
2	Накриття та застосування фундаментальної групи	6
3	Топологія поверхонь	4
4	Вищі гомотопічні групи	4
5	Ланцюгові комплекси та гомологічна алгебра	2
6	Симпліціальні та сингулярні гомології	4

7	Клітинні простори та клітинні гомології	4
8	Підготовка до заліку	2
	Разом	32

5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин	Форма контролю
	Робота над домашніми завданнями, що відповідають темам практичних занять;		
1	Гомотопії та фундаментальна група	8	Опитування
2	Накриття та застосування фундаментальної групи	8	Опитування
3	Топологія поверхонь	8	Опитування
4	Вищі гомотопічні групи	6	Опитування, контрольна робота
5	Ланцюгові комплекси та гомологічна алгебра	6	Опитування
6	Симпліціальні та сингулярні гомології	6	
7	Клітинні простори та клітинні гомології	6	Опитування
8	Підготовка до заліку	8	Залік
	Разом	56	

6. Індивідуальні завдання

Не плануються.

7. Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину та в умовах воєнного стану, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна.

8. Методи контролю

Опитування, виконання домашніх завдань, контрольна робота, залік

9. Схема нарахування балів

Поточний контроль та самостійна робота		Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Разом	Залік	Сума
Розділ 1	Розділ 2				
10	10	40	60	40	100

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою
	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	зараховано
70-89	
50-69	
1-49	не зараховано

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

Критерії оцінювання

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 – 69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

10. Рекомендована література

Базова література

1. Борисенко О. А. Диференціальна геометрія і топологія. – Х.: Основа, 1995.
2. С. Kosniowski. A First Course in Algebraic Topology. – Cambridge University Press, 1980.
3. A. Hatcher. Algebraic Topology. – Cambridge University Press, 2001.

Допоміжна література

4. J. Munkres. Topology. – Pearson, 2001.
5. G.W. Whitehead. Elements of homotopy theory. – Springer, 1978.
6. J.W. Vick. Homology theory. – Springer, 1994.

11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернет, відео-лекції, інше методичне забезпечення