ЗАТВЕРДЖУЮ

Голова приймальної комісії,
ректор Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна

_____________________Віль БАКІРОВ

„____„_____________________ 2020 р.

П Р О Г Р А М А
вступного фахового іспиту з математики
для здобуття освітнього ступеня магістра за спеціальністю
111 Математика
(освітньо-науковий рівень та освітньо-професійний рівень)

Харків 2020

Математичний аналіз

1. Числові послідовності.
1.1. Означення границі числової послідовності. Приклади послідовностей:
(а) таких, що мають скінченну границю;
(б) таких, що мають нескінченну границю;
(в) таких, що не мають границі (ані скінченної, ані нескінченної);
(г) нескінченно малих;
(д) нескінченно великих.
1.2. Властивості границь послідовностей:
(а) теореми про границю суми, добутку, частки двох послідовностей;
(б) теорема про єдиність границі послідовності;
(в) теорема про граничний перехід у нерівностях (для послідовностей);
(г) теорема про три послідовності.

2. Числові функції.
2.1. Означення границі числової функції в точці. Приклади функцій:
(а) таких, що мають скінченну границю в деякій точці;
(б) таких, що мають нескінченну границю в деякій точці;
(в) таких, що не мають границі в деякій точці (ані скінченної, ані нескінченної);
(г) нескінченно малих у деякій точці;
(д) нескінченно великих у деякій точці.
2.2. Властивості границь функцій:
(а) теореми про границю суми, добутку, частки двох функцій;
(б) невизначеності та приклади застосування деяких методів їх розкриття: правило Лопіталя, застосування формули Тейлора.

3. Неперервні функції.
3.1. Означення числової функції, що є неперервною в точці. Приклади функцій:
(а) неперервних у деякій точці;
(б) розривних у деякій точці.
3.2. Властивості неперервних функцій:
(а) теорема про збереження знаку неперервної функції;
(б) теорема Больцано-Коші про те, що функція, що є неперервною на відрізку та приймає на його кінцях значення різних знаків, у деякій точці відрізку дорівнює нулю;
(в) теорема Вейєрштрасса про існування мінімального й максимального значень функції, що є неперервною на відрізку.

4. Похідні.
4.1. Означення похідної числової функції. Приклади функцій:
(а) таких, що мають похідну в деякій точці;
(б) таких, що не мають похідної в деякій точці.
4.2. Теореми про знаходження похідних:
(а) похідна суми, добутку, частки двох функцій;
(б) похідна композиції двох функцій;
(в) деякі «табличні» похідні: $(x^a)'$, $(a^x)'$, $(\log_a x)'$, $(\sin x)'$, $(\cos x)'$, $(\arcsin x)'$, $(\arccos x)'$, $(\mathrm{arctg}\, x)'$.
4.3. Геометричний зміст похідної. Теорема Ферма про рівність нулю похідної в точці екстремуму функції. Теорема Лагранжа (формула скінченних приростів) та її геометричний зміст. Застосування похідних для дослідження функцій.

5. Інтеграли.
5.1. Означення первісної (невизначеного інтеграла) числової функції. Деякі «табличні» первісні:
$\int x^a dx$, $\int \frac{1}{x} dx$, $\int a^x dx$, $\int \sin x\, dx$, $\int \cos x\, dx$, $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$.

5.2. Деякі методи інтегрування:
(а) заміна змінної та зведення до табличних інтегралів;
(б) інтегрування частинами.
5.3. Означення (визначеного) інтеграла Рімана числової функції. Геометричний зміст інтеграла.
5.4. Формула Ньютона-Лейбніца.

6. Ряди.
6.1. Означення збіжного числового ряду. Приклади числових рядів:
(а) збіжних;
(б) розбіжних.
6.2. Означення степеневого ряду (від однієї змінної). Область збіжності степеневого ряду, формула Коші-Адамара для радіуса збіжності.
6.3. Означення ряду Тейлора числової функції. Ряди Маклорена деяких елементарних функцій: e^x, $\ln(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^a$.

Лінійна алгебра

1. Системи лінійних рівнянь.
1.1. Розв'язок системи лінійних рівнянь. Сумісні та несумісні системи.
1.2. Знаходження розв'язку:
(а) елементарні перетворення систем, метод Гаусса;
(б) зв'язок між розв'язками неоднорідної та відповідної однорідної системи, теорема про загальний вигляд розв'язку.

2. Лінійні простори.
2.1. Лінійно незалежні та лінійно залежні системи векторів:
(а) означення й приклади лінійно незалежних і лінійно залежних систем векторів;
(б) означення базису і вимірності лінійного простору.
2.2. Лінійна оболонка множини векторів. Знаходження вимірності лінійної оболонки заданих векторів.
2.3. Знаходження вимірності простору розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь.

3. Матриці та визначники.
3.1. Додавання та множення матриць.
3.2. Обчислення визначника квадратної матриці:
(а) розкладання по рядку (стовпчику);
(б) обчислення за допомогою методу Гаусса.
3.3. Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці (довільним методом).

4. Лінійні оператори.
4.1. Ядро й образ лінійного оператора: означення та приклади.
4.2. Матриця лінійного оператора у заданому базисі. Теорема про зміну матриці лінійного оператора при заміні базису.
4.3. Власні числа та власні вектори лінійного оператора:
(а) означення власного числа та власного вектора;
(б) характеристичний многочлен і знаходження власних чисел за допомогою характеристичного многочлена;
4.4. Діагоналізовність лінійного оператора: означення та приклади діагоналізовних та недіагоналізовних операторів.

5. Квадратичні форми.
5.1. Приведення дійсної квадратичної форми до діагонального вигляду методом Лагранжа. Сигнатура квадратичної форми.
5.2. Додатно означені квадратичні форми. Критерій Сільвестра.

Диференціальні рівняння

1. Диференціальні рівняння першого порядку.
1.1. Постановка задачі Коші.
1.2. Розв'язання деяких типів диференціальних рівнянь першого порядку:
(а) рівнянь з відокремлюваними змінними;
(б) лінійних неоднорідних рівнянь.

2. Лінійні диференціальні рівняння *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами.
2.1. Постановка задачі Коші.
2.2. Однорідні лінійні диференціальні рівняння *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами:
(а) теорема про загальний розв'язок;
(б) характеристичне рівняння та його застосування для знаходження загального розв'язку.
2.3. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами:
(а) теорема про загальний розв'язок;
(б) принцип суперпозиції розв'язків;
(в) знаходження часткового розв'язку неоднорідного рівняння (довільним методом).

3. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
3.1. Постановка задачі Коші. Однорідні й неоднорідні системи.
3.2. Однорідні системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:
(а) теорема про загальний розв'язок;
(б) знаходження загального розв'язку (довільним методом);
(в) стійкість за Ляпуновим нульового розв'язку, асимптотична стійкість, критерій асимптотичної стійкості.

Геометрія і топологія

1. Прямі на площині. Прямі та площини у просторі.
1.1. Параметричний та неявний способи завдання прямої на площині. Взаємне розташування прямих на площині.
1.2. Параметричний та неявний способи завдання площини в просторі.
1.3. Параметричний та неявний способи завдання прямої в просторі. Взаємне розташування прямих і площин у просторі.
1.4. Знаходження рівняння перпендикуляра, що опущений з даної точки на дану пряму в просторі. Знаходження спільного перпендикуляра до двох мимобіжних прямих.
1.5. Знаходження відстані від точки до прямої в просторі та відстані між двома прямими в просторі.

2. R^n як лінійний простір.
2.1. Вектори в R^n:
а) лінійні операції над векторами;
б) лінійна оболонка системи векторів в R^n та її базис.
2.2. Лінійні підпростори в R^n:
а) параметричний та неявний способи завдання лінійного та афінного підпросторів;
б) знаходження базису суми та базису перетину параметрично заданих підпросторів.
2.3. Опуклі множини:
а) означення опуклої множини, приклади опуклих множин;
б) опуклість перетину опуклих множин;
в) аналітичний вираз для опуклої оболонки скінченної кількості точок;
г) многогранники в R^n, теорема про екстремум лінійної функції на замкненому опуклому многограннику.

3. R^n як метричний простір.
3.1. Означення метричного простору. Приклади метрик в R^n.
3.2. Означення топологічного простору. Метрична топологія в R^n.
3.3. Внутрішні, межові, граничні точки, точки дотику, замикання підмножини в R^n.

3.4. Послідовність в R^n та її границя. Фундаментальна послідовність, критерій Коші.
3.5. Компактні підмножини в R^n. Теорема Вейєрштрасса про неперервні функції, що задані на компактних підмножинах.

Список рекомендованої літератури

1. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа. – М .: Физматлит, 2003.
2. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1989.
3. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974.
4. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. – М.: Высшая школа, 1989.
5. Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре. – М. : Наука, 1970.
6. Ильин В. А., Поздняк Э. Г. Линейная алгебра. – М. : Наука, 1984.
7. Погорелов А. В. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1978.
8. Борисенко О.А., Ушакова Л.М. Аналітична геометрія. – Х. : Основа, 1993.
9. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія. – Х. : Основа, 1995.

Критерії оцінювання

Екзаменаційний білет для письмової роботи містить 8 завдань, які охоплюють різні розділи програми екзамена. Повне та правильне розв’язання задач 1 - 7 оцінюється у 12 балів, а задачи 8 – у 16 балів. Якщо для розв’язання задачі є необхідним знаходження деякої величини або використання якогось факту, абітурієнт повинен навести не лише відповідь, але й обґрунтувати цю відповідь, а саме, навести посилання на відповідні формули та теореми. Часткова відповідь оцінюється у залежності від її змістовності.

Оцінка вище 85% від максимальної виставляється в разі правильного в цілому розв’язання задачі з незначними помилками.

Оцінка 70-85% від максимальної виставляється в разі правильного шляху розв’язання задачі при наявності більш суттєвих помилок, які впливають на кінцевий результат.

Оцінка 50-70% від максимальної виставляється за часткове розв’язання задачі або в разі наявності серйозних помилок.

Оцінка 0-49% від максимальної виставляється у разі відсутності розв’язку або наявності просунення, що є несуттєвим для розв’язання задачі.

Максимальна сума балів за виконання всіх завдань дорівнює 100 балів.
Загальна сума балів розраховується як сума балів за виконання всіх завдань + 100 балів.
Максимальна загальна сума балів дорівнює 200 балів.
Мінімальна кількість балів для допуску до участі у конкурсному відборі дорівнює 150 балів.

Голова атестаційної комісії Світлана ІГНАТОВИЧ

Засідання приймальної комісії від 03 лютого 2020 р., протокол №3.

Відповідальний секретар приймальної комісії Ольга АНОЩЕНКО