

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра **фундаментальної математики**

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

В.о. декана факультету математики
і інформатики

Євген МЕНЯЙЛОВ



серпень 2025 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Геометрія підмноговидів

рівень вищої освіти **перший (бакалаврський)**

галузь знань **11 Математика та статистика**

спеціальність **111 Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни **за вибором**

факультет **математики і інформатики**

2025 / 2026 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

26 серпня 2025 року, протокол № 10

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Петров Євген В'ячеславович, кандидат фізико-математичних наук,
доцент закладу вищої освіти кафедри фундаментальної математики**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики
протокол від 26 серпня 2025 року № 1.

В. о завідувача кафедри



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)

програми



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики
протокол від 26 серпня 2025 року № 1.

Голова науково-методичної комісії



Євген МЕНЯЙЛОВ

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «Геометрія підмноговидів» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки **бакалавр спеціальність 111 – Математика** освітня програма «Математика»

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни «Геометрія підмноговидів» є ознайомлення з базовими конструкціями топології та геометрії підмноговидів у ріманових просторах.

1.2 Основними завданнями вивчення дисципліни «Геометрія підмноговидів» є оволодіння методами дослідження підмноговидів.

1.3. Кількість кредитів – **5**

1.4. Загальна кількість годин – **150**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Нормативна / за вибором	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
4-й	
Семестр	
8-й	
Лекції	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
86 год.	
у тому числі індивідуальні завдання	

1.6. Перелік компетентностей, що формує дана дисципліна:

ІК01. Здатність розв'язувати складні задачі та практичні проблеми у математиці або у процесі навчання, що передбачає застосування теорій та методів математики, статистики й комп'ютерних технологій і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.

ЗК01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК03. Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.

ЗК07. Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.

СК01. Здатність формулювати проблеми математично та в символічній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.

СК02. Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі.

СК04. Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганих.

1.7. Перелік результатів навчання, що формує дана дисципліна:

ПРН14. Знати теоретичні основи і застосовувати методи аналітичної та диференціальної геометрії для розв'язування професійних задач.

ПРН16. Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем.

ПРН18. Знати теоретичні основи і застосовувати методи теорії функцій комплексної змінної.

1.8. Пререквізити: Вивченню даної дисципліни передують дисципліни «Лінійна алгебра», «Топологія», «Диференціальна геометрія», «Диференціальні рівняння», «Комплексний аналіз».

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Основні поняття топології та геометрії підмноговидів

Тема 1. Основні поняття диференціальної топології

Гладкий многовид, гладке відображення, дотичний простір, диференціал відображення. Векторне поле, дужка Лі. Тензорне поле, диференційні форми. Субмерсія, занурення, вкладення, занурений та вкладений підмноговид. Приклади. Теорема Фробеніуса. Орієнтація. Теорема Сарда, теореми про вкладення, зокрема теорема Уїтні.

Тема 2. Індукована метрика та зв'язність

Ізометричні занурення. Перша фундаментальна форма підмноговида. Індукована зв'язність, друга фундаментальна форма підмноговида, розкладення Гаусса. Нормальна зв'язність, оператор Вейнгартена, розкладення Вейнгартена. Поле середньої кривини. Приклади обчислення.

Тема 3. Рівняння Гаусса, Кодацці та Річчі

Рівняння Гаусса у загальному випадку та у випадках гіперповерхні, поверхні, підмноговидів у просторах постійної кривини. Рівняння Кодацці у загальному та часткових випадках. Рівняння Річчі у загальному та часткових випадках. Векторні розшарування. Фундаментальна теорема для підмноговидів просторів постійної кривини.

Розділ 2. Класифікація підмноговидів та підмноговиди евклідового простору

Тема 1. Основні класи підмноговидів

Цілком геодезичні підмноговиди. Цілком омбілічні підмноговиди. Підмноговиди з паралельним полем середньої кривини. Зовнішні сфери. Зв'язок між різними класами. Аксиоми площин та сфер Картана.

Тема 2. Гіперповерхні евклідового простору

Цілком омбілічні гіперповерхні. Ейнштейнові гіперповерхні. Локальна та глобальна опуклість гіперповерхонь. Теорема Адамара.

Тема 3. Мінімальні підмноговиди та підмноговиди з паралельним полем середньої кривини

Підмноговиди, що мінімізують об'єм. Мінімальні підмноговиди, означення, приклади. Мінімальні гіперповерхні евклідового простору. Явно задані гіперповерхні. Рівняння

мінімальності. Принцип максимума. Представлення Вейєштрасса – Еннепера. Теорема Бернштейна. Перша та друга варіації об'єму. Стійкість мінімальних підмноговидів. Критерії. Поля Якобі. Підмноговиди з паралельним полем середньої кривини (продовження). Поверхні постійної середньої кривини та їхня стійкість.

3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усьог о	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Розділ 1. Основні поняття топології та геометрії підмноговидів												
Тема 1. Основні поняття диференціальної топології	22	6*	6*			10						
Тема 2. Індукована метрика та зв'язність	22	6*	6*			10						
Тема 3. Рівняння Гаусса, Кодаци та Річчі	18	4*	4*			10						
Контрольна робота	2		2*									
Разом за розділом 1	64	16	18			30						
Розділ 2. Класифікація підмноговидів та підмноговиди евклідового простору												
Тема 1. Основні класи підмноговидів	18	4*	4*			10						
Тема 2. Гіперповерхні евклідового простору	20	4*	4*			12						
Тема 3. Мінімальні підмноговиди та підмноговиди з паралельним полем середньої кривини	28	8*	6*			14						
Підготовка до заліку	20					20						
Разом за розділом 2	86	16	14			56						
Усього годин	150	32	32			86						

*(За дистанційною формою, на платформах ZOOM та MOODLE)

4. Теми практичних занять

№ п\п	Назва теми	Кількість годин
1	Основні поняття диференціальної топології	6
2	Індукована метрика та зв'язність	6
3	Рівняння Гаусса, Кодацці та Річчі	4
4	Основні класи підмноговидів	4
5	Гіперповерхні евклідового простору	4
6	Мінімальні підмноговиди	4
7	Стійкість мінімальних підмноговидів	2
8	Контрольна робота	2
	Разом	32

5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин	Форма контролю
	Робота над домашніми завданнями, що відповідають темам практичних занять:		
1	Основні поняття диференціальної топології	10	Перевірка домашніх завдань
2	Індукована метрика та зв'язність	10	Перевірка домашніх завдань
3	Рівняння Гаусса, Кодацці та Річчі	10	Перевірка домашніх завдань
4	Основні класи підмноговидів	10	Перевірка домашніх завдань
5	Гіперповерхні евклідового простору	12	Перевірка домашніх завдань
6	Мінімальні підмноговиди	8	Перевірка домашніх завдань
7	Стійкість мінімальних підмноговидів	6	Перевірка домашніх завдань
8	Підготовка до заліку	20	Залік
	Разом	86	

6. Індивідуальні завдання

Немає.

7. Методи навчання

Використовуються пояснювально-ілюстративний (лекції і практичні заняття), репродуктивний (виконання домашніх завдань) і частково-пошуковий (контрольна робота, залік) методи. В умовах воєнного стану заняття проводяться дистанційно за допомогою платформ ZOOM та MOODLE відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна.

8. Методи контролю

Поточний контроль – перевірка виконання домашніх завдань, контрольна робота (1); Підсумковий контроль – залік (письмовий).

9. Схема нарахування балів

Поточний контроль та самостійна робота								Залік	Сума
Розділ 1			Розділ 2			Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Разом		
T1	T2	T3	T1	T2	T3	30	60	40	100
5	5	5	5	5	5				

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

Критерії оцінювання навчальних досягнень

Контрольна робота включає завдання на встановлення зануреності, знаходження нормальних полів, обчислення перших і других фундаментальних форм підмногovidів у багатовимірних просторах і оцінюється максимум у 30 балів. За кожне завдання нараховується 3 бали за схемою:

1. 3 бали за правильно виконане завдання;
2. 2 бали за виконане завдання з помилками/недоліками, що не вплинули на кінцевий результат;
3. 1 бал за виконане завдання з технічними/арифметичними помилками при наявності коректної логіки виконання;
4. 0 балів в інших випадках

Отримана сума балів зводиться до 15 за формулою $\frac{\text{Сума набраних балів}}{\text{Максимальна сума балів}} \cdot 30$

Критерії оцінювання залікової роботи

Оцінка в балах	Критерії оцінки	Пояснення
36-40	90-100%	Теоретичний зміст курсу засвоєно цілком, сформовано необхідні практичні навички з освоєним матеріалом, усі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконано в повному обсязі, відмінна робота без помилок або роботи з однією незначною помилкою

28-35	70-89%	Теоретичний зміст курсу засвоєно цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовано, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконано, якість виконання кожного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконано з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією-двома значними помилками
20-27	50-69%	Теоретичний зміст курсу засвоєно неповністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовано, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань містять помилки, робота з трьома значними помилками
0-19	0-49%	Теоретичний зміст курсу не засвоєно, необхідні практичні навички роботи з навчальним матеріалом не сформовано, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткову самостійну роботу над матеріалом курсу не приведе до значного підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою
	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	зараховано
70-89	
50-69	
1-49	не зараховано

10. Рекомендована література

Базова література

1. О.А. Борисенко. Диференціальна геометрія і топологія. – Харків: Основа, 1995.
2. Є.В. Петров. Топологія. Базовий курс. Навчальний посібник. – Харків: Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 2025.
3. В.О. Горькавий, Є.В. Петров. Ріманова геометрія. Елементарні задачі та методи розв'язання. Навчально-методичний посібник. – Харків, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 2024.
4. M. Dajczer. Submanifolds and isometric immersions. – Publish or Perish, 1990.
5. M. Dajczer, R. Tojeiro. Submanifold theory. Beyond an introduction. – Springer, 2019.
6. B.-Y. Chen. Geometry of submanifolds and its applications. – Science University of Tokyo, 1981.

Допоміжна література

Тема “Основні поняття диференціальної топології”

1. V. Guillemin, A. Pollack. Differential Topology. – AMS, 1974.
2. M. Hirsch. Differential Topology. – Springer, 1976.
3. J. Milnor. Topology from the Differentiable Viewpoint. – The University Press of Virginia, 1965.

Тема “Індукована метрика та зв’язність”

1. S. Kobayashi, K. Nomizu. Foundations of Differential Geometry. – Wiley, 1996.

Тема “Мінімальні підмноговиди та підмноговиди з паралельним полем середньої кривини”

1. T.H. Colding, W.P. Minicozzi II. A Course in Minimal Surfaces. – AMS, 2011.
2. K. Kenmotsu. Surfaces with constant mean curvature. – AMS, 2003.

11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

1. www-library.univer.kharkov.ua
2. <https://moodle.karazin.ua/course/view.php?id=8891>
3. <https://ekhnuir.karazin.ua/items/fe86cf78-57b5-46d6-b2cc-42bc59c5a40c>
4. <https://math.uchicago.edu/~may/REU2017/MilnorDiff.pdf>