Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра **фундаментальної математики**

“**ЗАТВЕРДЖУЮ**”

Проректор з науково- педагогічної роботи

Пантелеймонов А.В.

“\_\_\_\_\_\_”\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2018р.

# Робоча програма навчальної дисципліни

**Елементи алгебраїчної топології**

Спеціальність (напрям) **111 – математика**

спеціалізація \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(шифр, назва спеціалізації)

факультет **математики і інформатики**

2018 / 2019 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

27 серпня 201 року, протокол № 7

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Болотов Дмитро Валерійович, доктор фізико–математичних наук,**

**професор кафедри фундаментальної математики.**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики.

Протокол від 27 серпня 2018 року № 1.

Завідувач кафедри Ямпольский О.Л.

Програму погоджено методичною комісією факультету математики і інформатики

Протокол від 27 серпня 2018 року № 1.

Голова методичної комісії Анощенко О.О.

**Вступ**

Програма навчальної дисципліни **«Елементи алгебраїчної топології»** складена відповідно до освітньо-професійної (освітньо-наукової) програми підготовки  **магістр**

спеціальності (напряму) **111- математика**

спеціалізації \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Мета викладання навчальної дисципліни

Метою викладання навчальної дисципліни «Елементи алгебраїчної топології» є ознайомлення з базовими поняттями теорії гомотопій та теорії гомологій.

1.2. Основні завдання навчальної дисципліни

Основними завданнями вивчення дисципліни «Елементи алгебраїчної топології» є оволодіння обчислювальними методами алгебраїчної топології для знаходження гомотопічних інваріантів топологічних просторів.

1.3. Кількість кредитів - **4**

1.4. Загальна кількість годин – **120**

|  |  |
| --- | --- |
| 1.5 Характеристика навчальної дисципліни | |
| Нормативна / за вибором | |
| Денна форма навчання | Заочна (дистанційна) форма навчання |
| Рік підготовки | |
| **2-й** |  |
| Семестр | |
| **1-й** |  |
| Лекцій | |
| **32 год.** |  |
| Практичні, семінарські заняття | |
| **32 год.** |  |
| Лабораторні заняття | |
|  |  |
| Самостійна робота | |
| **56 год.** |  |
| Індивідуальні завдання | |
|  | |

1.6 Заплановані результати навчання:

**Знати:**

* поняття симпліціального та клітинного просторів;
* поняття накриття та розшарування;
* поняття фундаментальної та старших гомотопічних груп;
* поняття груп сінгулярних та клітинних (ко)гомологій та їх властивості;
* поняття гладкого многовиду, когомологій де-Рама, подвійності Пуанкаре та індексу зачеплення;
* поняття точних послідовностей пари та розшарування.

**Уміти:** користуватися обчислювальними методами алгебраїчної топології.

**2. Тематичній план навчальної дисципліни**

***Розділ 1. Основи теорії гомотопій***

***Тема 1. Топологічні простори та їх відображення. Гомотопія.***

Зміст

* Топологічні простори і гомеоморфізми. Топологічні операції над топологічними просторами.
* Гомотопія відображень. Гомотопічна еквівалентність. Ретракція та деформаційна ретракція. Приклади.

***Тема 2. Фундаментальна група.***

Зміст

* Фундаментальна група топологічного простору, її гомотопічна інваріантність та функторіальність.
* Фундаментальна група кола та двовимірна теорема Брауера.
* Засоби обчислення фундаментальної групи. Теорема Зейферта – ван Кампена. Приклади.

***Тема 3. Клітинні простори (СW-комплекси).***

Зміст

* Означення, основні властивості та приклади клітинних просторів.
* Лемма Борсука.
* Теорема о клітинній апроксимації.

***Тема 4. Накриття та фундаментальна група.***

Зміст

* Означення та приклади накриттів. Регулярне накриття та його фундаментальна група.
* Класифікація накриттів.
* Універсальне накриття. Обчислення фундаментальної групи за допомогою накриття.
* Теорема Борсука-Улама.

***Тема 5. Старші гомотопічні групи.***

Зміст

* Старші гомотопічні групи, їх абелевість.
* n-зв’язні клітинні простори та їх властивості. K(π,n) – простори.
* Відносні гомотопічні групи. Точна гомотопічна послідовність пари.

***Тема 6. Розшарування***

Зміст

* Локально тривіальні розшарування. Розшарування Сера. Приклади розшарувань.
* Точна гомотопічна послідовність розшарування. Розшарування Хопфа та група π3(S2).

***Тема 7. Многовиди. Ступінь відображення***

Зміст

- Гладкі многовиди та гладкі відображення між ними. Апроксимація неперервних відображень гладкими.

* Критичні множини гладких відображень. Теорема Сарда.
* Ступень відображення.
* Класифікація відображень Mn → Sn. Група πn(Sn).
* Індекс векторного поля та ейлерова характеристика.

***Розділ* 2.  *Основи теорії гомологій***

***Тема 1. Гомології.***

Зміст

* Ланцюговий комплекс та його гомології.
* Симпліціальні гомології, приклади обчислення.
* Сингулярні гомології. Функторіальність. Ланцюгова гомотопія та гомотопічна інваріантність сингулярних гомологій.
* Клітинні гомології СW-просторів, приклади обчислення.
* Числа Бетті та ейлерова характеристика. Формула Лефшица.
* Гомології та гомотопії. Перша група гомології та фундаментальна група. Теорема Гуревіча.

***Тема 2. Точні послідовності та їх застосування.***

Зміст

* Гомології пари. Точна послідовність пари та трійки. Приклади обчислення.
* Послідовність Майера-В’єторіса. Приклади обчислення.
* Застосування точних послідовностей. Співпадіння клітинних та сінгулярних гомологій для CW-просторів.

***Тема 3. Когомології.***

Зміст

* Означення ланцюгових когомологій. Їх властвості.
* Сингулярні та клітинні когомології. Приклади їх обчислення.
* Точні послідовності в когомологіях.
* Множення в когомологіях. Його властивості та геометричний сенс.
* Формула універсальних коефіцієнтів.

***Тема 4. Гомології та когомології многовидів.***

Зміст

* Гомології та когомології многовидів. Подвійність Пуанкаре.
* Подвійність Александера-Понтрягіна.
* Диференційні форми на многовидах. Комплекс де-Рама.
* Когомології де-Рама. Їх властивості. Формула Стокса.
* Коефіцієнт зачеплення та інваріант Хопфа.

**3. Структура навчальної дисципліни**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Назви розділів і тем | Кількість годин | | | | | | | | | | | |
| денна форма | | | | | | заочна форма | | | | | |
| усього | у тому числі | | | | | усього | у тому числі | | | | |
| л | п | лаб. | інд. | с. р. | л | п | лаб. | інд. | с. р. |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| ***Розділ 1. Основи теорії гомотопій*** | | | | | | | | | | | | |
| Тема 1. Топологічні простори та їх відображення. Гомотопія | 11 | 2 | 4 |  |  | 5 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 2. Фундаментальна група. | 12 | 4 | 2 |  |  | 6 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 3. Клітинні простори (СW-комплекси). | 11 | 2 | 4 |  |  | 5 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 4. Накриття та фундаментальна група. | 12 | 4 | 2 |  |  | 6 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 5. Старші гомотопічні групи. | 11 | 2 | 4 |  |  | 5 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 6. Розшарування | 11 | 4 | 2 |  |  | 5 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 7. Многовиди. Ступінь відображення | 12 | 2 | 4 |  |  | 6 |  |  |  |  |  |  |
| Разом за розділом 1 | 80 | 20 | 22 |  |  | 38 |  |  |  |  |  |  |
| ***Розділ* 2.  *Основи теорії гомологій*** | | | | | | | | | | | | |
| Тема 1. Гомології. | 11 | 2 | 4 |  |  | 5 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 2. Точні послідов-ності та їх застосування. | 10 | 4 | 2 |  |  | 4 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 3. Когомології. | 11 | 4 | 2 |  |  | 5 |  |  |  |  |  |  |
| Тема 4. Гомології та когомології многовидів. | 8 | 2 | 2 |  |  | 4 |  |  |  |  |  |  |
| Підготовка до екзамену |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Разом за розділом2 | 40 | 12 | 10 |  |  | 18 |  |  |  |  |  |  |
| Усього годин | **120** | **32** | **32** |  |  | **56** |  |  |  |  |  |  |

**4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п\п | Назва теми | Кількість годин |
| 1 | Обчислення фундаментальної групи клітинних просторів. | 8 |
| 2 | Обчислення старших гомотопічних груп клітинних просторів | 8 |
| 3 | Обчислення сімпліціальних, сингулярних та клітинних (ко)гомологій | 8 |
| 4 | Обчислення когомологій де-Рама гладких многовидів та знаходження коефіцієнту зачеплення за допомогою диференційних форм. | 8 |
|  | Разом | **32** |

.

**5. Самостійна робота**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| №  з/п | Назва теми | Кількість  годин | Форма контролю |
| 1 | Топологічні простори та їх відображення. Гомотопія | 6 | Опитування |
| 2 | Накриття та фундаментальна група. | 5 | Опитування |
| 3 | Клітинні простори (СW-комплекси). | 6 | Опитування |
| 4 | Старші гомотопічні групи. | 5 | Опитування |
| 5 | Розшарування | 6 | Опитування |
| 6 | Многовиди. Ступінь відображення | 6 | Опитування |
| 7 | Гомології. | 6 | Опитування |
| 8 | Точні послідовності та їх застосування. | 6 | Опитування |
| 9 | Когомології. | 5 | Опитування |
| 10 | Гомології та когомології многовидів. | 5 | Опитування |
| 11 | Підготовка до екзамену |  | екзамен |
|  | Разом | **56** |  |

**6. Індивідуальні завдання**

Не передбачені планом.

**7. Методи контролю**

Поточний контроль – опитування, залікове завдання; підсумковий контроль – екзамен.

(тестова частина, опитування).

**8. Схема нарахування балів**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поточний контроль та самостійна робота | | | | | | | | | | | | | Сума |
| Розділ 1 | | | | | | | Розділ 2 | | | | Разом | Екзамен |
| Т1 | Т2 | Т3 | Т4 | Т5 | Т6 | Т7 | Т1 | Т2 | Т3 | Т4 | 60 | 40 | 100 |  |
| 5 | 5 | 6 | 6 | 5 | 5 | 6 | 6 | 5 | 5 | 6 |

**Шкала оцінювання**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру | Оцінка за національною шкалою | |
| для екзамену | для заліку |
| 90 – 100 | відмінно | зараховано |
| 70-89 | добре |
| 50-69 | задовільно |
| 1-49 | незадовільно | не зараховано |

**Критерії оцінювання**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Оцінка в балах | Оцінка за національною шкалою | |
| Оцінка | Пояснення | |
| 90 – 100 | Відмінно | Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою. |
| 70 – 89 | Добре | Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками. |
| 50 –69 | Задовільно | Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками. |
| 1–49 | Незадовільно | Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки |

**9. Рекомендоване методичне забезпечення**

**Основна література**

1. О.А. Борисенко. Диференціальна геометрія і топологія. – Х.: Основа, 1995.
2. В.А. Васильев. Введение в топологию. М.: Фазис, 1997.
3. О.Я. Виро, О.А. Иванов, Н.Ю. Нецветаев, В.М. Харламов, Элементарная топология. М.: МЦНМО, 2010.
4. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. Современная геометрия. Методы теории гомологий. – М.: Наука, 1984.
5. Р. Ботт, Л.В.Ту. Дифференциальные формы в алгебраической топологии. – М.: Наука, 1989.

**Допоміжна література**

* 1. А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс. Курс гомотопической топологии. – М.: Наука, 1989.
  2. Э. Спеньер. Алгебраическая топология. – М., Мир, 1971.
  3. G.E. Bredon. Topology and geometry. – NY: Springer, 1997.