

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Кафедра прикладної математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”
Декан факультету
математики і інформатики

Григорій ЖОЛТКЕВИЧ

29 серпня 2024 р.



РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Диференціальні рівняння

рівень вищої освіти _____ перший (бакалаврський) рівень _____

галузь знань ІІ – Математика та статистика _____

спеціальність ІІІ – Математика _____

освітня програма «Математика» _____

спеціалізація _____

вид дисципліни _____ обов'язкова _____

факультет _____ математики і інформатики _____

2024 / 2025 навчальний рік

програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

27 серпня 2024 року, протокол № 8

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

Степанова Катерина Вадимівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент закладу вищої освіти кафедри прикладної математики.

Програму схвалено на засіданні кафедри прикладної математики протокол від 26 серпня 2024 року № 8.

Завідувача кафедри прикладної математики

Валерій КОРОБОВ

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»
Гарант освітньої (професійної)

програми

Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики протокол від 27 серпня 2024 року № 1.

Голова науково-методичної комісії

Євген МЕНЯЙЛОВ

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «Диференціальні рівняння» складена відповідно до
освітньо-професійної програми підготовки

бакалавр

(назва рівня вищої освіти)

спеціальності (напряму) 111 – Математика

спеціалізації _____

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Мета викладання навчальної дисципліни:

Ознайомлення студентів із сучасною теорією звичайних диференціальних рівнянь.

1.2. Основні завдання вивчення дисципліни:

Навчити студентів теоретичним основам та практичним навичкам в галузі сучасної теорії звичайних диференціальних рівнянь.

1.2.1. Формування наступних інтегральної та загальних компетентностей:

ІК01. Здатність розв'язувати складні задачі та практичні проблеми у математиці або у процесі навчання, що передбачає застосування теорій та методів математики, статистики й комп'ютерних технологій і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.

ЗК01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК03. Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.

ЗК07. Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.

1.2.2. Формування наступних фахових компетентностей:

ФК01. Здатність формулювати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.

ФК02. Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі.

ФК04. Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізнити правдоподібні аргументи від формально бездоганих.

ФК06. Здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем.

1.3. Кількість кредитів: 8

1.4. Загальна кількість годин: 240

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Обов'язкова	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
2-й	
Семестр	
4-й	
Лекції	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
год.	
Самостійна робота	
56 год.	
у тому числі індивідуальні завдання	
16 год.	

Рік підготовки	
3-й	
Семестр	
5-й	
Лекції	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
год.	
Самостійна робота	
56 год.	
у тому числі індивідуальні завдання	
16 год.	

1.6. Заплановані результати навчання

У результаті вивчення даного курсу студент повинен знати:

- Теореми існування та єдиності розв’язків задачі Коші для лінійних та нелінійних рівнянь та систем.
- Теореми про загальні розв’язки для лінійних та нелінійних рівнянь та систем.
- Означення та способи обчислення функцій від матриці.
- Означення та застосування функцій Коші та Гріна.
- Теореми про загальні розв’язки лінійних та квазілінійних рівнянь з частинними похідними.
- Означення стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості за Ляпуновим.
- Функцію Ляпунова та прямий метод Ляпунова.
- Критерії стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості за Ляпуновим для систем зі сталими коефіцієнтами.
- Методи дослідження на стійкість та нестійкість за першим наближенням.
- Класифікацію особливих точок систем другого порядку.
- Основи теорії керування.

вміти:

- Розв’язувати рівняння з відокремлюваними змінними та рівняння, що зводяться до них.
- Розв’язувати рівняння в повних диференціалах та рівняння, що зводяться до них.
- Розв’язувати лінійні рівняння та системи зі сталими коефіцієнтами та задачі Коші і крайові задачі для них.
- Інтегрувати диференціальні рівняння за допомогою степеневих рядів.
- Розв’язувати лінійні та квазілінійні рівняння з частинними похідними.
- Досліджувати на стійкість розв’язки диференціальних рівнянь та систем.
- Досліджувати лінійні керовані системи зі сталими коефіцієнтами.

Програмні результати навчання:

РН.04 Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми.

РН.06 Знати методи математичного моделювання природничих та/або соціальних процесів.

РН.16 Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем.

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Рівняння першого порядку

Тема 1. Основні поняття і означення теорії диференціальних рівнянь. Рівняння з відокремлюваними змінними. Еквівалентність рівняння з відокремлюваними змінними деякому функціональному рівнянню, властивості розв'язків цього функціонального рівняння. Симетрична форма запису рівняння 1-го порядку. Рівняння в повних диференціалах.

Тема 2. Диференціальні рівняння, що не розв'язані відносно похідної. Метод введення параметру.

Розділ 2. Системи диференціальних рівнянь.

Тема 3. Системи диференціальних рівнянь. Зведення рівняння n -го порядку до системи того ж порядку. Лема Гронуолла-Беллмана.

Тема 4. Теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для нелінійних рівнянь та систем. Теореми про залежність розв'язків задачі Коші від параметрів та початкових умов.

Продовження розв'язків задачі Коші.

Розділ 3. Лінійні системи та рівняння

Тема 5. Лінійні системи. Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійної системи. Комплексні розв'язки лінійних систем.

Тема 6. Визначник Вронського системи вектор-функцій. Лінійно залежні та лінійно незалежні системи вектор-функцій, їх властивості. Теорема Ліувілля. Лінійно залежні та незалежні системи розв'язків лінійної системи. Фундаментальні матриці розв'язків та їх властивості.

Тема 7. Теореми про загальні розв'язки лінійних однорідної та неоднорідної систем. Методи Коші та Лагранжа пошуку частинних розв'язків неоднорідних лінійних систем.

Тема 8. Лінійні диференціальні рівняння, їх зведення до лінійних систем. Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійних рівнянь.

Тема 9. Визначник Вронського системи функцій. Лінійно залежні та незалежні системи функцій та їх властивості. Теорема Ліувілля-Остроградського. Лінійно залежні та незалежні системи розв'язків лінійних однорідних рівнянь, фундаментальні системи розв'язків.

Тема 10. Теореми про загальні розв'язки лінійних однорідного та неоднорідного рівнянь. Методи Коші та Лагранжа пошуку частинних розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь.

Тема 11. Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Теореми про комплексну та дійсну форми фундаментальної системи розв'язків для таких рівнянь.

Тема 12. Неоднорідні лінійні рівняння з квазіполіноміальною правою частиною. Теореми про частинні розв'язки таких систем.

Розділ 4. Лінійні системи зі сталими коефіцієнтами

Тема 13. Означення функції від матриці для функції, визначеної на спектрі цієї матриці. Інтерполяційні поліноми та їх властивості. Інтерполяційний поліном Лагранжа-Сильвестра, його властивості та обчислення. Властивості функцій від матриці.

Тема 14. Теорема про фундаментальність матричної експоненти. Теореми про загальний розв'язок та розв'язок задачі Коші для лінійних систем зі сталими коефіцієнтами. Теорема Трохи. Теорема про вигляд фундаментальної матриці розв'язків лінійної системи зі сталими коефіцієнтами. Подання функції від матриці матричним степеневим рядом.

Тема 15. Неоднорідні лінійні системи з квазіполіноміальною правою частиною. Теореми про частинні розв'язки таких систем.

Тема 16. Крайова задача та функція Гріна для лінійних рівнянь та систем.

Розділ 5. Інтегрування степеневими рядами

Тема 17. Степеневі ряди з матричними коефіцієнтами. Лінійні системи з аналітичними коефіцієнтами. Теорема про структуру фундаментальної матриці розв'язків такої системи.

Тема 18. Рівняння класу Фуксу, рівняння Бесселя.

Розділ 6. Нелінійні системи та квазілінійні рівняння

Тема 19. Перші та загальні інтеграли нелінійних систем. Критерій того, що функція є першим (загальним) інтегралом нелінійної системи. Теорема про структуру загального інтеграла. Теорема про зв'язок загального інтеграла з розв'язком нелінійної системи та загальний розв'язок нелінійної системи. Симетрична форма запису нелінійної системи.

Тема 20. Лінійні та квазілінійні рівняння з частинними похідними першого порядку. Системи характеристик. Теорема про зв'язок розв'язків квазілінійного та деякого лінійного рівнянь. Теорема про загальні розв'язки лінійного та квазілінійного рівнянь з частинними похідними першого порядку.

Тема 21. Задача Коші для квазілінійних рівнянь.

Розділ 7. Стійкість за Ляпуновим

Тема 22. Стійкість, асимптотична стійкість та нестійкість за Ляпуновим розв'язків систем диференціальних рівнянь. Функція Ляпунова. Теорема Ляпунова про стійкість, асимптотичну стійкість та нестійкість.

Тема 23. Стійкість лінійних систем. Критерії стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості за Ляпуновим для лінійних систем зі сталими коефіцієнтами.

Тема 24. Теорема про стійкість та нестійкість за першим наближенням.

Тема 25. Елементи теорії керування.

3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	Денна форма						Заочна форма					
	Усього го	у тому числі					Усього го	у тому числі				
л		п	лаб	інд	ср	л		п	лаб	інд	ср	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<i>I семестр</i>												
Розділ 1. Рівняння першого порядку												
Тема 1	12	2	8			2						
Тема 2	6	2	2			2						
Розрахункова робота (ІДЗ)	16					16						
Разом за розділом 1	34	4	10			20						
Розділ 2. Системи диференціальних рівнянь												
Тема 3	4	2	0			2						
Тема 4	6	2	2			2						
Разом за розділом 2	10	4	2			4						
Розділ 3. Лінійні системи та рівняння												
Тема 5	4	2	0			2						
Тема 6	6	2	2			2						
Тема 7	6	2	2			2						
Тема 8	6	2	2			2						
Тема 9	8	2	2			4						
Тема 10	8	2	2			4						
Тема 11	10	2	4			4						
Тема 12	6	2	2			2						
Контрольна робота	4		2			2						
Разом за розділом 3	58	16	18			24						
Розділ 4. Лінійні системи зі сталими коефіцієнтами												
Тема 13	4	2	0			2						
Тема 14	4	2	0			2						
Тема 15	4	2	0			2						
Тема 16	6	2	2			2						
Разом за розділом 4	18	8	2			8						
<i>Разом за I семестр</i>	120	32	32			56						

<i>II семестр</i>												
Розділ 5. Інтегрування степеневими рядами												
Тема 17	6	2	2			2						
Тема 18	8	4	2			2						
Розрахункова робота (ІДЗ)	16					16						
Разом за розділом 5	30	6	4			20						
Розділ 6. Нелінійні системи та квазілінійні рівняння												
Тема 19	14	4	4			6						
Тема 20	12	4	4			4						
Тема 21	8	2	2			4						
Контрольна робота	6		2			4						
Разом за розділом 6	40	10	12			18						
Розділ 7. Стійкість за Ляпуновим												
Тема 22	16	6	4			6						
Тема 23	12	4	4			4						
Тема 24	10	2	4			4						
Тема 25	12	4	4			4						
Разом за розділом 7	50	16	16			18						
<i>Разом за II семестр</i>	<i>120</i>	<i>32</i>	<i>32</i>			<i>56</i>						
Усього годин	240	64	64			112						

4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
<i>I семестр</i>		
1	Рівняння з відокремлюваними змінними та рівняння, що зводяться до них.	6
2	Лінійні рівняння та рівняння Бернуллі.	2
3	Рівняння в повних диференціалах та рівняння, що зводяться до них.	4
4	Рівняння, нерозв'язні відносно похідної.	4
5	Рівняння, що допускають зниження порядку	4
6	Лінійна залежність та незалежність. Визначник Вронського.	4
7	Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами.	6
8	Крайова задача та функція Гріна.	2
	<i>Разом за I семестр</i>	32
<i>II семестр</i>		
9	Лінійні системи зі сталими коефіцієнтами.	6
10	Інтегрування за допомогою степеневих рядів.	6
11	Нелінійні рівняння.	4
12	Лінійні та квазілінійні рівняння з частинними похідними.	6
13	Стійкість за Ляпуновим.	8
14	Основи теорії керування	2
	<i>Разом за II семестр</i>	32
	Разом	64

5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види , зміст самостійної роботи	Кількість годин
<i>I семестр</i>		
1	Виконання домашніх завдань за темою «Рівняння першого порядку»	4
2	Вивчення допоміжної літератури за темою «Системи диференціальних рівнянь»	6
3	Вивчення допоміжної літератури за темою «Лінійні системи та	30

	рівняння»	
4	Виконання розрахункової роботи (ІДЗ)	16
	<i>Разом за I семестр</i>	56
	<i>II семестр</i>	
4	Виконання домашніх завдань за темою «Лінійні системи зі сталими коефіцієнтами»	8
5	Виконання розрахункової роботи (ІДЗ)	16
6	Виконання домашніх завдань за темою «Інтегрування степеневими рядами»	8
7	Вивчення допоміжної літератури за темою «Нелінійні системи та квазілінійні рівняння»	12
8	Виконання домашніх завдань за темою «Стійкість за Ляпуновим»	12
	<i>Разом за II семестр</i>	56

6. Індивідуальні завдання

Теми індивідуальних завдань:

Семестр I. Диференціальні рівняння першого порядку.

Семестр II. Лінійні системи зі сталими коефіцієнтами.

7. Методи навчання

Частково-пошуковий, пояснювально-ілюстративний. Проблемно-орієнтовані лекції, пояснювально-розрахункові, репродуктивні методи при проведенні практичних занять.

8. Методи контролю

- Перевірка виконання домашніх та індивідуальних завдань, контрольних робіт.
- Проведення заліку та іспиту.

9. Схема нарахування балів

I семестр

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання				Залік	Сума
Розділ 1	Розділ 2	Розділ 3	Разом		
Індивідуальне завдання T1, T2	Домашнє завдання T3-T5	Контрольна робота T6-T13		Разом	40
20	20	20	60		

Для допуску до складання підсумкового контролю (заліку) здобувач вищої освіти повинен набрати не менше 10 балів з навчальної дисципліни під час поточного контролю, самостійної роботи, індивідуального завдання.

II семестр

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання				Екзамен	Сума
Розділ 4	Розділ 5, Розділ 6	Розділ 7	Разом		
Індивідуальне завдання T14 -T18	Контрольна робота T19-T23	Домашнє завдання T24 -T27		Разом	40
20	20	20	60		

Для допуску до складання підсумкового контролю (екзамену) здобувач вищої освіти повинен набрати не менше 10 балів з навчальної дисципліни під час поточного контролю, самостійної роботи, індивідуального завдання.

Критерії оцінювання

Приклади оцінювання виконання домашніх та індивідуальних завдань, а також контрольних, залікових і екзаменаційних робіт.

I семестр

1) Індивідуальне завдання «Рівняння першого порядку», 20 балів (один з варіантів):

Визначити тип диференціального рівняння і розв'язати його (задачу Коші):

- 1) $y - xy' = \sqrt{x^2 + y^2}$ (4 бали)
- 2) $xy' \cos y + y' \sin 2y = 1$ (4 бали)
- 3) $y^2 = (xy' + 1) \ln x$ (4 бали)
- 4) $y' = \sqrt[3]{5x - y} + 2$ (4 бали)
- 5) $(1 + y^2 \sin 2x) dx - 2y \cos^2 x dy = 0, y(0) = 3$ (4 бали)

2) Домашнє завдання на тему «Нерозв'язані рівняння відносно похідної та зниження порядку», 20 балів (один з варіантів):

Розв'язати рівняння (у рівнянні, позначеному *, знайти особливий розв'язок):

1. $yy'' = (y')^2 + 15y^2 \sqrt{x}$ (5 балів);
2. $xy'' - y' = x^2 yy'$ (5 балів);
- 3*. $y = xy' - (2 + y')^2$ (5 балів);
4. Теоретичне запитання (5 балів);

3) Контрольна робота на тему «Лінійні рівняння», 20 балів (один з варіантів):

1. Розв'язати рівняння $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x+1}$, знаходячи окремий розв'язок за допомогою функції Коші. (5 балів)
2. Розв'язати рівняння $y''' + 4y' = 2x - \cos x$, знаходячи окремий розв'язок методом невизначених коефіцієнтів. (5 балів)
3. Розв'язати задачу Коші: $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 2x, y(1) = 1, y'(1) = 0$. (5 балів)
4. Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння з постійними дійсними коефіцієнтами (можливо меншого порядку), що має дані окремі розв'язки: $3x, x \cos x$. (5 балів)

4) Залікова робота 40 балів (один з варіантів).

1. Знайти визначник крайової задачі і функцію Гріна (20 балів)
 $y'' - 4y = f(x) \quad y(0) - y(1) = 0, \quad y'(1) = 0$.
2. Теоретичні запитання (20 балів).

II семестр

1) Індивідуальне завдання «Лінійні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами», 20 балів (один з варіантів):

- розв'язати методом невизначених коефіцієнтів (4 бали)
- розв'язати за допомогою матричної експоненти (4 бали)
- розв'язати за допомогою квазіполіному (5 балів)
- розв'язати методом варіацій і методом Коші (7 балів)

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = x - y + 2(t+1)e^t \\ \dot{y} = 2x - y + 2(t+2)e^t \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x - 3y + 1 \\ \dot{y} = 6y - 2x - 3 \end{cases}$$

2) Контрольна робота на розв'язання за допомогою степеневих рядів і на квазілінійні рівняння, 20 балів (один з варіантів):

Розв'язати рівняння за допомогою степеневих рядів

- $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$ (5 балів)
- $x^2y'' + 4xy' + (2-3x^2)y = 0$ (5 балів)
- Знайти загальний розв'язок і розв'язати задачі Коші (10 балів)

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0. \quad a) \begin{cases} x = y \\ x - yz = 1 \end{cases} \quad б) \begin{cases} x = y \\ yz = 1 \end{cases}$$

3) Домашнє завдання на тему «Стійкість», 20 балів (один з варіантів):

- Дослідити на стійкість розв'язання задачі Коші за визначенням (5 балів),
- Знайти точки спокою та дослідити їх тип (по 1-му наближенню) (5 балів),
- Дослідити нульовий розв'язок на стійкість методом Ляпунова (5 балів)

$$1. \begin{cases} 2ty' + y^2 = 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x' = y(x-2) \\ y' = x(1-y^2) \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x' = \sin x + 4y \\ y' = -x + y^3 \end{cases}$$

4. Теоретичне запитання (5 балів).

4) Приклад екзаменаційного білету (40 балів).

Екзаменаційний білет № ...

- ФМР лінійної однорідної системи (ЛОС) зі сталими коефіцієнтами, її структура. Метод невизначених коефіцієнтів. (12 балів)
- Рівняння класу Фукса. Теорема 2. Приклад. (12 балів)
- Поставити початкові умови так, щоб в одному випадку виконувалися умови теореми

Пікара, а в іншому – не виконувалися: $\begin{cases} x' = |x+y| \\ y' = \sqrt[3]{y-x} \end{cases}$ (8 балів)

4. Поставити початкові умови для квазілінійного рівняння і перевірити його на характеристичність $xy \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x}$. (8 балів)

Бонусні бали:

Студент, який взяв участь у конкурсі SCUDEM, може отримати бонусні бали:

- 5 бонусних балів, якщо команда, до складу якої входив студент, отримала диплом конкурсу;
- або 10 балів, якщо команда, до складу якої входив студент, отримала диплом «Outstanding» або «Meritorious».

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка	
	<i>I семестр</i>	<i>II семестр</i>
90 – 100	зараховано	відмінно
70-89		добре
50-69		задовільно
1-49	не зараховано	незадовільно

10. Рекомендована література

Основна література

1. І.І. Ляшко, О.К.Боярчук, Я.Г. Гай, О.Ф. Калайда. Диференціальні рівняння. – К.: Вища шк., 1987. – 344 с.
2. Л.В. Фардигола. Курс звичайних диференціальних рівнянь, Навчальний посібник. – Київ: Наукова думка, 2022. – 212 с.
3. Г.М. Скляр, Л.В.Фардигола. Елементи теорії керованих систем. – Х.: ХДУ, 1998. – 53 с.
4. А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. – К.: Вища школа, 1994.– 454 с.
5. А.В. Луценко. Методи інтегрування та пониження порядку диференціальних рівнянь. Методичні вказівки до курсу «Диференціальні рівняння» / Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 2008. – 26 с.
6. О.А. Макаров, Т.І. Сморцова. Звичайні диференціальні рівняння. Методичний посібник. / Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 2019. – 39 с.

Допоміжна література

1. Philip Hartman. Ordinary Differential Equations. *Classics in Applied Mathematics*, SIAM, 1982.

11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

1. SCUDEM, information for students:
<https://qubeshub.org/community/groups/scudem/overview>