

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Кафедра **фундаментальної математики**

**“ЗАТВЕРДЖУЮ”**  
Декан факультету  
математики і інформатики

Григорій ЖОЛТКЕВИЧ



“30” 08

2023 р.

Робоча програма навчальної дисципліни

**Основи теорії представлень**

рівень вищої освіти **магістр**

галузь знань **11 – Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни: **вибіркова**

факультет **математики і інформатики**

2023/2024 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

29 серпня 2023 року, протокол №8

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Доцент кафедри фундаментальної математики, кандидат фізико-математичних наук,  
доцент Каролінський Євген Олександрович**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики  
Протокол від 28 серпня 2023 року №1.

В. о завідувача кафедри



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (наукової) програми «Математика»

Гарант освітньої (наукової) програми



Ганна ВИШНЯКОВА

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики  
протокол від 29 серпня 2023 року №1.

Голова науково-методичної комісії



Ольга АНОЩЕНКО

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “Основи теорії представлень” складена відповідно освітньо-наукової програми підготовки **магістр** спеціальності **111 – Математика** освітня програма «**Математика**»

### 1. Опис навчальної дисципліни

- 1.1. Метою викладання навчальної дисципліни “Основи теорії представлень” є надання майбутнім фахівцям знань у галузі теорії представлень.
- 1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни “Основи теорії представлень” є навчання студентів теоретичним основам і методам теорії представлень та застосуванню цих методів у інших математичних дисциплінах.
- 1.3. Кількість кредитів – **5**
- 1.4. Загальна кількість годин – **150**

| 1.5. Характеристика навчальної дисципліни |                                     |
|---|-------------------------------------|
| Нормативна / за вибором                   |                                     |
| Денна форма навчання                      | Заочна (дистанційна) форма навчання |
| Рік підготовки                            |                                     |
| <b>2-й</b>                                |                                     |
| Семестр                                   |                                     |
| <b>4-й</b>                                |                                     |
| Лекції                                    |                                     |
| <b>17 год.</b>                            |                                     |
| Практичні, семінарські заняття            |                                     |
| <b>16 год.</b>                            |                                     |
| Лабораторні заняття                       |                                     |
|   |                                     |
| Самостійна робота                         |                                     |
| <b>117 год.</b>                           |                                     |
| у тому числі індивідуальні завдання       |                                     |
| контрольні роботи (1)                     |                                     |

1.6. Заплановані результати навчання

У результаті вивчення даного курсу студент повинен

**знати :**

- основні поняття загальної теорії представлень (алгебри та їх представлення, мова модулів, незвідність і лема Шура, повна звідність, теорема щільності, напівпрості алгебри, теорема Жордана-Гельдера, теорема Крулля-Шмідта);
- основні поняття теорії представлень скінчених груп (теорема Машке, характери, ортогональність характерів, унітарні представлення, перетворення Фур'є на скінчених абелевих групах);
- основні поняття теорії представлень алгебр Лі (структура скінченновимірних  $sl(2)$ -модулів);
- основні поняття теорії представлень колчанів.

**уміти :**

- перевіряти представлення на незвідність, нерозкладність, повну звідність;
- обчислювати незвідні представлення та таблиці характерів скінчених груп з невеликою кількістю елементів;
- розкладати представлення скінчених груп на незвідні складники;
- описувати нерозкладні представлення для найпростіших колчанів.

## **2. Тематичний план навчальної дисципліни**

### **Розділ 1. Представлення асоціативних алгебр.**

Тема 1. Представлення асоціативних алгебр.

1. Поняття представлення. Представлення груп, алгебр Лі, сагайдаків. Приклади.
2. Асоціативні алгебри. Представлення асоціативних алгебр. Мова модулів. Приклади.
3. Алгебра сагайдака. Представлення сагайдаків мовою асоціативних алгебр. Приклади.
4. Підпредставлення (= підмодулі), морфізми (= сплітаючі оператори), факторпредставлення (= фактормодулі). Незвідність (= простота) і нерозкладність. Лема Шура. Приклади.
5. Ідеали та факторалгебри. Завдання алгебр твірними та співвідношеннями. Приклади.
6. Представлення алгебри Лі  $sl(2)$ .
7. Тензорні добутки. Канонічні ізоморфізми.
8. Цілком звідні представлення (= напівпрості модулі). Однозначність розкладання на незвідні компоненти. Числа сплетення. Ізотипічні компоненти.
9. Теореми щільності.
10. Прямі суми матричних алгебр та їх представлення.
11. Радикал скінченновимірної алгебри. Напівпрості алгебри та їх представлення.
12. Характери представлень алгебри.
13. Композиційні ряди. Теорема Жордана-Гельдера.
14. Теорема Крулля-Шмідта.

### **Розділ 2. Представлення скінченних груп.**

Тема 2. Представлення скінченних груп.

15. Представлення скінченних груп. Теорема Машке про напівпростоту групової алгебри.
16. Представлення скінченних абелевих груп. Гармонічний аналіз на скінченних абелевих групах.
17. Характери представлень скінченних груп. Число незвідних представлень і число класів спряженості.
18. Двоїсте представлення. Тензорний добуток представлень груп.
19. Співвідношення ортогональності для характерів представлень скінченних груп.
20. Обчислення таблиць характерів. Приклади.
21. Алгебраїчні та цілі алгебраїчні числа.
22. Теорема Фробеніуса про подільність.
23. Теорема Бернсайда про розв'язні групи.
24. Представлення симетричних груп.

### 3. Структура навчальної дисципліни

| Назви розділів і тем                                | Кількість годин |              |           |      |      |            |              |              |    |      |      |       |
|---|-----------------|--------------|-----------|------|------|------------|--------------|--------------|----|------|------|-------|
|   | денна форма     |              |           |      |      |            | заочна форма |              |    |      |      |       |
|   | усього          | у тому числі |           |      |      |            | усього       | у тому числі |    |      |      |       |
|   |                 | л            | п         | лаб. | інд. | с. р.      |              | л            | п  | лаб. | інд. | с. р. |
| 1   | 2               | 3            | 4         | 5    | 6    | 7          | 8            | 9            | 10 | 11   | 12   | 13    |
| <b>Розділ 1. Представлення асоціативних алгебр</b>  |                 |              |           |      |      |            |              |              |    |      |      |       |
| <b>Тема 1.</b><br>Представлення асоціативних алгебр | 75              | 9            | 8         |      |      | 58         |              |              |    |      |      |       |
| Разом за розділом 1                                 | 75              | 9            | 8         |      |      | 58         |              |              |    |      |      |       |
| <b>Розділ 2. Представлення скінченних груп</b>      |                 |              |           |      |      |            |              |              |    |      |      |       |
| <b>Тема 2.</b><br>Представлення скінченних груп     | 75              | 8            | 8         |      |      | 59         |              |              |    |      |      |       |
| Разом за розділом 2                                 | 75              | 8            | 8         |      |      | 59         |              |              |    |      |      |       |
| <b>Усього годин</b>                                 | <b>150</b>      | <b>17</b>    | <b>16</b> |      |      | <b>117</b> |              |              |    |      |      |       |

### 4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

| № з/п | Назва теми  | Кількість годин |
|-------|---|-----------------|
|       | Опрацювання додаткового матеріалу за відповідними темами: |                 |
| 1     | Представлення асоціативних алгебр                         | 8               |
| 2     | Представлення скінченних груп                             | 8               |
|       | Разом   | <b>16</b>       |

### 5. Завдання для самостійної роботи

| № з/п | Види, зміст самостійної роботи    | Кількість годин |
|-------|-----------------------------------|-----------------|
| 1     | Представлення асоціативних алгебр | 58              |
| 2     | Представлення скінченних груп     | 59              |
|       | Разом                             | <b>117</b>      |

### 6. Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна.

### 7. Методи контролю

- 1) поточний семестровий (виконання домашніх завдань); перевірка контрольної роботи;
- 2) екзамен

### 8. Схема нарахування балів

| Поточний контроль та самостійна робота |          | Контрольна робота | Разом | Залік | Сума |
|--|----------|-------------------|-------|-------|------|
| Розділ 1                               | Розділ 2 |                   |       |       |      |

|    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|-----|
| 20 | 20 | 20 | 60 | 40 | 100 |
|----|----|----|----|----|-----|

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

### Критерії оцінювання навчальних досягнень

| Оцінка в балах | Оцінка за національною шкалою |   |
|----------------|-------------------------------|---|
| Оцінка         | Пояснення                     |   |
| 90 – 100       | Відмінно                      | Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.   |
| 70 – 89        | Добре                         | Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками. |
| 50 – 69        | Задовільно                    | Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.  |
| 1 – 49         | Незадовільно                  | Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки.   |

### Шкала оцінювання

| Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру | Оцінка за національною шкалою       |                                  |
|--|-------------------------------------|----------------------------------|
|  | для чотиривимірної шкали оцінювання | для двовимірної шкали оцінювання |
| 90 – 100   | відмінно                            | зараховано                       |
| 70 – 89  | добре                               |                                  |
| 50 – 69  | задовільно                          |                                  |
| 1 – 49   | незадовільно                        | не зараховано                    |

### 10.Рекомендована література

#### Основна література

1. P. Etingof et al. Introduction to representation theory. AMS

#### Допоміжна література

1. Serge Lang, Algebra. Graduate Texts in Mathematics (GTM, volume 211), 2002

**11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення**

<https://mathworld.wolfram.com/topics/RepresentationTheory.html>