

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра фундаментальної математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Декан факультету  
математики і інформатики

Григорій ЖОЛТКЕВИЧ



“ 08 ” 2024 р.

Робоча програма навчальної дисципліни

## Диференціальна геометрія многовидів

рівень вищої освіти **другий(магістерський)**

гаузь знань **11 - Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни **обов'язкова**

факультет **математики і інформатики**

2024 / 2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

27 серпня 2024 року, протокол № 8

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Петров Євген В'ячеславович, кандидат фізико-математичних наук,  
старший викладач кафедри фундаментальної математики.**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики  
протокол від 26 серпня 2024 року № 1.

В. о завідувача кафедри



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)  
програми



Вячеслав ГОРДЕВСЬКИЙ

Гарант освітньої (наукової)  
програми



Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і  
інформатики  
протокол від 27 серпня 2024 року № 1.

Голова науково-методичної комісії



Євген МЕНЯЙЛОВ

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “Диференціальна геометрія многовидів” складена відповідно до освітньо-професійної та освітньо-наукової програм підготовки «магістр» спеціальність 111 - Математика освітня програма «Математика»

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни “Диференціальна геометрія многовидів” є ознайомлення з базовими конструкціями аналізу гладких многовидів та геометричними структурами на них.

1.2 Основними завданнями вивчення дисципліни “Диференціальна геометрія многовидів” є оволодіння методами дослідження геометричних структур на многовидах.

1.3. Кількість кредитів – 6

1.4. Загальна кількість годин - 180

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
<b>Обов’язкова</b>	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
1-й	
Семестр	
1-й	
Лекції	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
116 год.	
Індивідуальні завдання	
Розрахунково-графічна робота (1)	

1.6. Заплановані результати навчання.

У результаті вивчення даного курсу студент повинен **знати базові поняття та теореми диференціальної топології, що стосуються гладких многовидів та відображень, дотичних просторів, форм та інтегрування, основні поняття ріманової та метричної геометрії, а саме:**

- Основні поняття і теореми диференціальної топології: гладкий многовид, гладке відображення, дотичний простір, диференціал відображення, субмерсія, занурення, вкладення, занурений та вкладений підмноговид, орієнтовний многовид, теорема Сарда, теореми про вкладення, в тому числі теорема Уїтні, елементи теорії гладких полів на многовидах: дотичне розшарування, поле, інтегрування, дужка Лі, тензорні поля.

- Основні поняття та результати аналізу гладких форм на многовидах: поняття форми, зовнішньої і симетричної форми, зовнішнього добутку, диференціалу, інтеграл від форми, теорема Стокса.
- Основні поняття ріманової геометрії: ріманова метрика, перша фундаментальна форма, обчислення довжин, кутів та об'ємів, ріманова зв'язність, коваріантне диференціювання, ріманові геодезичні, ізометрії та конформні відображення.
- Основні поняття внутрішньої геометрії метричних просторів (внутрішня метрика, найкоротші, геодезичні, функціонал довжини, повнота) та їх застосування до геометрії многовидів, зокрема ріманової. Теорема Хопфа-Рінова-Кон-Фоссена.
- Основні поняття та результати, що пов'язані з кривиною ріманових просторів: оператор кривини, тензор Рімана, секційна кривина, тензор Річчі, скалярна кривина, многовиди постійної секційної кривини, друга варіація довжини геодезичної, теорема Майєрса, поля Якобі, спряжені точки, простори Адамара.
- Основні теореми порівняння ріманової геометрії та поняття метричного простору обмеженої кривини.

**уміти досліджувати гладкі многовиди та геометричні структури на них та використовувати їх у теоретичних та практичних задачах, а саме:**

- Доводити, що даний топологічний простір є гладким многовидом.
- Доводити, що дане відображення многовидів є гладким, вкладенням, зануренням, субмерсією.
- Обчислювати диференціали зовнішніх форм, інтегрувати зовнішні форми.
- Обчислювати першу фундаментальну форму, довжини кривих, кути між ними та об'єми.
- Знаходити геодезичні ріманового многовиду, паралельне перенесення поля.
- Знаходити оператор кривини, тензори Рімана та Річчі, секційну кривину.
- Знаходити поля Якобі.

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни

### *Розділ 1. Аналіз на гладких многовидах*

#### *Тема 1. Основні поняття диференціальної топології*

Зміст

- Многовид, відображення переходу, гладкий многовид, гладка структура.
- Гладке відображення, діфеоморфізм.
- Дотичні вектори і дотичний простір гладкого многовиду. Гладкі функції Урисона.
- Дотичний вектор і регулярність кривої. Диференціал і ранг гладкого відображення.
- Критичні точки і теорема Сарда. Субмерсії.
- Занурення та вкладення. Теореми про занурення і вкладення (у т.ч. теорема Уїтні).
- Підмноговиди. Теорема про прообраз регулярного значення.
- Тензори в точці гладкого многовиду.
- Дотичне розшарування. Векторні поля і їхні властивості. Векторне поле як диференціювання.

- Дужка Лі і її властивості.
- Інтегрування векторних полів.
- Тензорні поля.

-

## - **ТЕМА 2. АНАЛІЗ ЗОВНІШНІХ ФОРМ**

Зміст

- Форми на многовиді, симетричні і зовнішні форми.
- Кодиференціал.
- Диференціал зовнішньої форми.
- Орієнтовність гладких многовидів.
- Інтегрування форм на орієнтовних многовидах і теорема Стокса.

### ***Розділ 2. Ріманова геометрія многовидів***

#### ***Тема 1. Ріманові метрики і метрична геометрія***

Зміст

- Ріманова метрика, ріманів многовид. Перша фундаментальна форма
- Довжина кривої на рімановому многовиді і її властивості. Кут між кривими.
- Форма об'єму і об'єм області.
- Ізометрії і локальні ізометрії.
- Конформні відображення.
- Афінна зв'язність. Коваріантне диференціювання форм.
- Ріманова зв'язність (Леві-Чівіта). Формула Кошуля.
- Функціонал довжини на топологічному просторі. Внутрішня метрика. Найкоротші.
- Внутрішня метрика, що породжена рімановою метрикою. Фінслерова метрика.
- Повнота ріманового многовиду.
- Геодезичні афінної зв'язності та їхні властивості. Геодезичні на рімановому многовиді.
- Лагранжیان і варіаційна задача на многовиді. Рівняння Ейлера-Лагранжа.
- Геодезичні і найкоротші.
- Довжина кривої в метричному просторі. Теорема Арцела-Асколі для кривих.
- Обмежена компактність. Достатні умови існування найкоротших.
- Теорема Хопфа-Рінова-Кон-Фоссена. Геодезична повнота. Випадок ріманова многовиду.

#### ***Тема 2. Кривина ріманової метрики***

Зміст

- Оператор кривини, тензор Рімана, секційна кривина.
- Кривина Річчі та скалярна кривина. Ейнштейнові многовиди.
- Многовиди постійної секційної кривини. Теорема Шура.
- Друга варіація довжини геодезичної.
- Теорема Майерса.
- Поля Якобі та спряжені точки.
- Поля Якобі на многовидах постійної секційної кривини.
- Теорема Якобі та індексна форма геодезичної.

- Експоненціальне відображення.
- Простори Адамара та теорема Картана-Адамара.
- Теореми порівняння.
- Метричні простори обмеженої кривини.

### 3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усьог о	у тому числі					усь ого	у тому числі				
		л	п	лаб	інд	с. р.		л	п	лаб	інд	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<b>Розділ 1. Аналіз на гладких многовидах</b>												
Тема 1. Основні поняття диференціальної топології	36	8*	8*			20						
Тема 2. Аналіз зовнішніх форм	36	8*	8*			20						
Разом за розділом 1	72	16	16			40						
<b>Розділ 2. Ріманова геометрія многовидів</b>												
Тема 1. Ріманові метрики і метрична геометрія	26	6*	4*			16						
Тема 2. Кривина ріманової метрики	45	10*	10*			25						
Разом за розділом 2	71	16	14			41						
Контрольна робота	2		2									
Розрахунково-графічна робота	15					15						
Підготовка до складання семестрового контролю	20					20						
<b>Усього годин</b>	<b>180</b>	<b>32</b>	<b>32</b>			<b>116</b>						

)\* – За дистанційною формою, на платформі ZOOM

### 4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

№ п\п	Назва теми	Кількість годин
1	Основні поняття диференціальної топології	8
2	Аналіз зовнішніх форм	8
3	Ріманові метрики і метрична геометрія	4
4	Кривина ріманової метрики	10
5	Контрольна робота	2
	<b>Разом</b>	<b>32</b>

### 5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
	Робота над індивідуальною роботою та домашніми завданнями протягом семестру, що відповідають темам практичних занять:	
1	Основні поняття диференціальної топології	20
2	Аналіз зовнішніх форм (Домашнє завдання)	20
3	Ріманові метрики і метрична геометрія	16
4	Кривина ріманової метрики (Домашнє завдання)	25
5	Розрахунково-графічна робота	15
6	Підготовка до складання семестрового контролю	20
	<b>Разом</b>	<b>116</b>

### 6. Індивідуальні завдання

Розрахунково-графічна робота.

### 7. Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна.

### 8. Методи контролю

Опитування, контрольна робота, розрахунково-графічна робота, екзамен.

### 9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, контрольна робота, самостійна робота					Екзамен	Сума
Розділ 1		Розділ 2		Контрольна робота	Розрахунково-графічна робота	Разом
T1	T2	T1	T2	10	10	60
10	10	10	10			
					40	100

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

### Критерії оцінювання навчальних досягнень

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 – 69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

### Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою
	для чотирирівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно
70-89	добре
50-69	задовільно
1-49	незадовільно



## 10. Рекомендована література

### Основна література

1. J. Jost. Riemannian Geometry and Geometric Analysis. – Springer, 2017.
2. L.W. Tu. An Introduction to Manifolds. – Springer, 2011.
3. D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov. A Course in Metric Geometry. – AMS, 2001.

### Допоміжна література

Тема “Основні поняття диференціальної топології”

1. V. Guillemin, A. Pollack. Differential Topology. – AMS, 1974.
2. M. Hirsch. Differential Topology. – Springer, 1976
3. J. Milnor. Morse Theory. – Princeton University Press, 1963
4. J. Milnor. Topology from the Differentiable Viewpoint. – Princeton University Press, 1965

Тема “Аналіз зовнішніх форм”

1. R. Bott, L.W. Tu. Differential Forms in Algebraic Topology. – Springer, 1982.
2. M. Spivak. Calculus on Manifolds. – CRC Press, 1971.

Тема “Ріманові метрики і метрична геометрія ”

1. S. Sternberg. Lectures on Differential Geometry. – Prentice Hall, 1964.

Тема “Кривина ріманової метрики ”

1. A. Besse. Einstein Manifolds. – Springer, 1987.
2. J. Cheeger, D.G. Ebin. Comparison Theorems in Riemannian Geometry. – AMS, 2008.
3. S. Kobayashi, K. Nomizu. Foundations of Differential Geometry. – Wiley, 1996.

## 11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернет, відео-лекції, інше методичне забезпечення

1. [www-library.univer.kharkov.ua](http://www-library.univer.kharkov.ua)
2. <http://puremath.univer.kharkov.ua/~petrov>