Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра **фундаментальної математики**

“**ЗАТВЕРДЖУЮ**”

Проректор з науково-педагогічної роботи

Антон ПАНТЕЛЕЙМОНОВ

____

“____”_______________2021 р.

Робоча програма навчальної дисципліни

Прикладний функцыональний аналіз

рівень вищої освіти **бакалавр**

галузь знань **11 – Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни **за вибором**

факультет **математики і інформатики**

2021 / 2022 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

31 серпня 2020 року, протокол № 8

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

Фастовська Тамара Борисівна, к. ф.-м. н., доцент,
доцент кафедри фундаментальної математики

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики
протокол № 1 від 31 серпня 2020 року.

Завідувач кафедри Олександр ЯМПОЛЬСКИЙ

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)
програми Олександр ЯМПОЛЬСКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики
протокол № 1 від 31 серпня 2020 року.

Голова науково-методичної комісії Ольга АНОЩЕНКО

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «**Прикладний функціональний аналіз»** складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки **бакалавр**

спеціальності **111 – Математика**
освітня програма **«Математика»**

спеціалізації ____

1. Опис навчальної дисципліни

1.1.Мета курсу полягає у навчанні майбутніх спеціалістів основам теорії узагальнених функцій, теорії операторів та просторів Соболєва, теорії інтерполяції.
1.2.Завдання курсу полягає у набутті навичок застосування основам теорії узагальнених функцій, теорії операторів та просторів Соболєва до рівнянь математичної фізики.
1.3. Кількість кредитів – **4**
1.4. Загальна кількість годин **120**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Нормативна / **за вибором**	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
4-й	
Семестр	
8-й	
Лекції	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
56 год.	
Індивідуальні завдання	

1.6. Заплановані результати навчання:
знати:
-
- основні властивості функціонального числення замкнених та самоспряжених операторів, та спектральні властивості необмежених операторів.
- означення та властивості основних видів просторів Соболєва.

уміти:
-використовувати теорію узагальнених функцій, теорію операторів та просторів Соболєва у теорії рівнянь математичної фізики.

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1.Узагальнені функції.

Тема 1. Простір основних функцій.
Побудова основних функцій. Регуляризація. Щільність D в L^2.
Тема 2. Простір узагальнених функцій.
Повнота. Носій узагальнених функцій. Регулярні і сингулярні узагальнені функції.
Лінійна заміна, добуток, диференціювання узагальнених функцій. Прямий добуток узагальнених функцій та його властивості. Умови існування. Згортка та її властивості.
Тема 3. Узагальнені функції повільного зростання.
Теорема Л. Шварца. Перетворення Фур'є узагальнених функцій повільного зростання.

Розділ 2. Теорія необмежених операторів.

Тема 1. Замкнені необмежені оператори.
Критерій замкненості. Замкнені розширення.
Тема 2. Спряжений оператор.
Означення та властивості спряжених операторів . Самоспряжені необмежені оператори.
Тема 3. Симетричні оператори.
Критерій обмеженості оператора. Власні значення симетричних операторів. Оператори диференціювання та множення на незалежну змінну. Розширення за Фрідріхсом.
Тема 4. Спектр оператора.
Резольвента та спектр. Класифікація спектру. Спектр самоспряжених операторів. Спектр операторів диференціювання та множення на незалежну змінну. Метод графіка. Спектральний аналіз компактних операторів. Оператори з дискретним спектром.

Розділ 3. Простори Соболєва.

Тема 1. Простори Соболєва цілих порядків в обмеженій області.
Простори Соболєва $H^k(\Omega)$ та їх властивості. Слід функції з $H^k(\Omega)$.Теорема про слід. Простори Соболєва $H_0^k(\Omega)$ та їх властивості. Теорема Реліха. Теорема про компактність множини слідів функцій з $H^1(\Omega)$. Еквівалентні норми у просторах Соболєва $H^k(\Omega)$ та $H_0^k(\Omega)$
Тема 2. Простори Соболєва у всьому просторі.
Простори Соболєва $H^s(\mathbb{R}^m)$. Повнота $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ у $H^s(\mathbb{R}^m)$. Еквівалентні норми у просторах Соболєва $H^s(\mathbb{R}^m)$. Теорема вкладення для $H^s(\mathbb{R}^m)$. Теорема про слід для $H^s(\mathbb{R}^m)$.Оператори підняття у весь простір $\mathbb{R}^m$.
Тема 3. Простори Соболєва у напівпросторі.
Простори Соболєва $H_0^s(\mathbb{R}_\pm^m)$. Повнота $C_0^\infty(\mathbb{R}_\pm^m)$ у $H_0^s(\mathbb{R}_\pm^m)$. Еквівалентні норми у просторах Соболєва $H_0^s(\mathbb{R}_\pm^m)$. Простори Соболєва $H^s(\mathbb{R}_\pm^m)$ та їх властивості Повнота $C_0^\infty(\mathbb{R}_\pm^m)$ у $H^s(\mathbb{R}_\pm^m)$. Еквівалентні норми у просторах Соболєва $H^s(\mathbb{R}_\pm^m)$. Спряжені простори до $H^s(\mathbb{R}^m)$.
Тема 4. Простори Соболєва з нецілими порядками у обмеженій області.

Простори $H^s(\Omega)$ та $H_0^s(\Omega)$. Еквівалентні норми у просторах Соболєва $H^s(\Omega)$. Простори $H^s(\Gamma)$. Теорема про слід для функцій з $H^s(\Omega)$. Теорема про підняття у область. Теорема про продовження з області у весь простір $\mathbb{R}^m$. Регулярність функцій з $H^s(\Omega)$.

Розділ 4. Вступ до теорії інтерполяційних просторів.
Тема 1.Інтерполяція просторів Соболєва.
Загальна теорія інтерполяції. Інтерполяція просторів $H^s(\Omega)$. Інтерполяція просторів $H_0^s(\Omega)$. Інтерполяція зі спряженими просторами.

	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Розділ 1. Узагальнені функції.												
Тема 1. Простір основних функцій. Побудова основних функцій. Регуляризація. Щільність D в L^2.	8	2	2			4						
Тема 2. Простір узагальнених функцій. Повнота. Носій узагальнених функцій. Регулярні і сингулярні узагальнені функції. Лінійна заміна, добуток, диференціювання узагальнених функцій. Прямий добуток узагальнених функцій та його властивості. Умови існування. Згортка та її властивості.	8	2	2			4						
Тема 3. Узагальнені функції повільного зростання. Теорема Л. Шварца. Перетворення Фур'є узагальнених функцій повільного зростання.	8	2	2			4						
Усього за розділом 1	24	6	6			12						
Розділ 2. Теорія необмежених операторів.												
Тема 1. Замкнені необмежені оператори. Критерій замкненості. Замкнені розширення.	8	2	2			4						
Тема 2. Спряжений оператор.	8	2	2			4						

Означення та властивості спряжених операторів . Самоспряжені необмежені оператори.												
Тема 3. Симетричні оператори. Критерій обмеженості оператора. Власні значення симетричних операторів. Оператори диференціювання та множення на незалежну змінну. Розширення за Фрідріхсом.	8	2	2			4						
Тема 4. Спектр оператора. Резольвента та спектр. Класифікація спектру. Спектр самоспряжених операторів. Спектр операторів диференціювання та множення на незалежну змінну. Метод графіка. Спектральний аналіз компактних операторів. Оператори з дискретним спектром.	12	4	4			4						
Разом за розділом 2	36	10	10			16						
Розділ 2. Простори Соболєва.												
Тема 1. Простори Соболєва цілих порядків в обмеженій області. Простори Соболєва $H^k(\Omega)$ та їх властивості. Слід функції з $H^k(\Omega)$. Теорема про слід. Простори Соболєва $H_0^k(\Omega)$ та їх властивості. Теорема Реліха. Теорема про компактність множини слідів функцій з $H^1(\Omega)$. Еквівалентні норми у просторах Соболєва $H^k(\Omega)$ та $H_0^k(\Omega)$	8	2	2			4						
Тема 2. Простори Соболєва у всьому просторі. Простори Соболєва $H^s(\mathbb{R}^m)$. Повнота $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ у $H^s(\mathbb{R}^m)$. Еквівалентні норми у просторах Соболєва $H^s(\mathbb{R}^m)$. Теорема вкладення для $H^s(\mathbb{R}^m)$. Теорема	12	4	4			4						

про слід для $H^s(\mathbb{R}^m)$.Оператори підняття у весь простір $\mathbb{R}^m$.												
Тема 3. Простори Соболєва у півпросторі. Простори Соболєва $H_0^s(\mathbb{R}_\pm^m)$. Повнота $C_0^\infty(\mathbb{R}_\pm^m)$ у $H_0^s(\mathbb{R}_\pm^m)$. Еквівалентні норми у просторах Соболєва $H_0^s(\mathbb{R}_\pm^m)$. Простори Соболєва $H^s(\mathbb{R}_\pm^m)$ та їх властивості Повнота $C_0^\infty(\mathbb{R}_\pm^m)$ у $H^s(\mathbb{R}_\pm^m)$. Еквівалентні норми у просторах Соболєва $H^s(\mathbb{R}_\pm^m)$ Спряжені простори до $H^s(\mathbb{R}^m)$.	12	4	4			4						
Тема 4. Простори Соболєва з нецілими порядками у обмеженій області. Простори $H^s(\Omega)$ та $H_0^s(\Omega)$. Еквівалентні норми у просторах Соболєва $H^s(\Omega)$. Простори $H^s(\Gamma)$. Теорема про слід для функцій з $H^s(\Omega)$. Теорема про підняття у область.Теорема про продовження з області у весь простір $\mathbb{R}^m$.Регулярність функцій з $H^s(\Omega)$.	8	2	2			4						
Усього за розділом 3	40	12	12			16						
Розділ 4. Вступ до теорії інтерполяційних просторів.												
Тема 1. Інтерполяція просторів Соболєва. Загальна теорія інтерполяції. Інтерполяція просторів $H^s(\Omega)$. Інтерполяція просторів $H_0^s(\Omega)$ Інтерполяція зі спряженими просторами.	20	4	4			12						
Усього за розділом 4	20	4	4			12						
Усього годин	**120**	**32**	**32**			**56**						

4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

1	Простір основних функцій.	2
2	Простір узагальнених функцій.	2
3	Узагальнені функції повільного зростання.	2
4	Замкнені необмежені оператори.	2
5	Спряжений оператор.	2
6	Симетричні оператори.	2
7	Спектр оператора.	4
8	Простори Соболєва цілих порядків в обмеженій області.	2
9	Простори Соболєва у всьому просторі.	4
10	Простори Соболєва у півпросторі.	4
11	Простори Соболєва з нецілими порядками у обмеженій області.	2
12	Інтерполяція просторів Соболєва.	2
13	Контрольна робота	2
Разом		**32**

5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
	Опрацювання додаткового матеріалу за зазначеними темами, виконання домашніх завдань:	
1	Простір основних функцій.	4
2	Простір узагальнених функцій.	4
3	Узагальнені функції повільного зростання.	4
4	Замкнені необмежені оператори. Критерій замкненості. Замкнені розширення.	4
5	Спряжений оператор. Означення та властивості спряжених операторів . Самоспряжені необмежені оператори.	4
6	Симетричні оператори. Критерій обмеженості оператора. Власні значення симетричних операторів. Розширення за Фрідріхсом.	4
7	Резольвента та спектр. Класифікація спектру. Спектр самоспряжених операторів. Метод графіка. Спектральний аналіз компактних операторів. Оператори з дискретним спектром.	4
8	Простори Соболєва $H^k(\Omega)$ та їх властивості. Теорема про слід. Простори Соболєва $H_0^k(\Omega)$ та їх властивості. Теорема Реліха. Еквівалентні норми у просторах Соболєва	4
9	Простори Соболєва у всьому просторі.	4
10	Простори Соболєва у напівпросторі.	4
11	Простори Соболєва з нецілими порядками у обмеженій області.	4
12	Інтерполяція просторів Соболєва.	4
13	Підготовка до заліку	8
	Усього	**56**

6. Індивідуальні завдання

Не передбачені планом

7. Методи контролю

–перевірка самостійної роботи, контрольна робота;
–залік;

8. Схема нарахування балів

<table>
<tr><td colspan="14">Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання</td><td rowspan="2">Залік</td><td>Сума</td></tr>
<tr><td colspan="3">Розділ 1</td><td colspan="4">Розділ 2</td><td colspan="4">Розділ 3</td><td>Розділ 4</td><td>Контрольна робота, передбачена навчальним планом</td><td>Разом</td><td rowspan="3">100</td></tr>
<tr><td>Т1</td><td>Т2</td><td>Т3</td><td>Т1</td><td>Т2</td><td>Т3</td><td>Т4</td><td>Т1</td><td>Т2</td><td>Т3</td><td>Т4</td><td>Т1</td><td rowspan="2">20</td><td rowspan="2">60</td><td rowspan="2">40</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td>4</td></tr>
</table>

Шкала оцінювання

<table>
<tr><td rowspan="2">Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру</td><td colspan="2">Оцінка за національною шкалою</td></tr>
<tr><td>для чотирирівневої шкали оцінювання</td><td>для дворівневої шкали оцінювання</td></tr>
<tr><td>90 – 100</td><td>відмінно</td><td rowspan="3">зараховано</td></tr>
<tr><td>70-89</td><td>добре</td></tr>
<tr><td>50-69</td><td>задовільно</td></tr>
<tr><td>1-49</td><td>незадовільно</td><td>не зараховано</td></tr>
</table>

Критерії оцінювання

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 –69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

9. Рекомендована література

Базова

1. Ахиезер Н.И., Глазман И.М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.,- М.: Наука, Физматлит, 1966.
2. Владимиров В. С. , Уравнения математической физики : Учебник для вузов : 5-е изд.,доп.. - М. : Наука, 1988 .
3. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Нелинейные граничные задачи и их приложения, - М. : Мир, 1971.

Допоміжна

1. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г., Функциональний анализ. Курс лекций. - К.: Вища школа, 1990.
2. Рид М, Саймон Б., Методы современной математической физики. Т.1. – М.: Мир, 1977.
3. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных, - М.: Наука, 1983.

10. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

1. www-library.univer.kharkov.ua
2. http://library.kpi.kharkov.ua