

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Кафедра **фундаментальної математики**

**“ЗАТВЕРДЖУЮ”**  
Декан факультету  
математики і інформатики  
Григорій ЖОЛТКЕВИЧ  
“ 13 ” 08 2024 р.



Робоча програма навчальної дисципліни

**Обрані розділи теорії чисел**

рівень вищої освіти **другий(магістерський)**

галузь знань **11 – Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни: **за вибором**

факультет **математики і інформатики**

2024/2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

27 серпня 2024 року, протокол №8

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Каролінський Євген Олександрович кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри фундаментальної математики**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики  
Протокол від 26 серпня 2024 року №1.

В. о завідувача кафедри



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)  
програми



Вячеслав ГОРДЕВСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики  
протокол від 27 серпня 2024 року №1.

Голова науково-методичної комісії



Євген МЕНЯЙЛОВ

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “Обрані розділи теорії чисел” складена відповідно освітньо-професійної програми підготовки **магістр** спеціальності **111 – Математика** освітня програма «**Математика**»

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни “Обрані розділи теорії чисел” є надання майбутнім фахівцям знань у галузі алгебраїчної теорії чисел на прикладі теорії подільності в кільцях цілих алгебраїчних чисел.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни “Обрані розділи теорії чисел” є навчання студентів теоретичним основам і методам алгебраїчної теорії чисел та застосуванню цих методів у інших математичних дисциплінах.

1.3. Кількість кредитів – **6**

1.4. Загальна кількість годин – **180**

| 1.5. Характеристика навчальної дисципліни |                                     |
|---|-------------------------------------|
| за вибором                                |                                     |
| Денна форма навчання                      | Заочна (дистанційна) форма навчання |
| Рік підготовки                            |                                     |
| <b>2-й</b>                                |                                     |
| Семестр                                   |                                     |
| <b>3-й</b>                                |                                     |
| Лекції                                    |                                     |
| <b>26 год.</b>                            |                                     |
| Практичні, семінарські заняття            |                                     |
| <b>26 год.</b>                            |                                     |
| Лабораторні заняття                       |                                     |
|   |                                     |
| Самостійна робота                         |                                     |
| <b>128 год.</b>                           |                                     |
| у тому числі індивідуальні завдання       |                                     |
|   |                                     |

1.6. Заплановані результати навчання

У результаті вивчення даного курсу студент повинен

**знати :**

- Що таке евклідове кільце, кільце головних ідеалів, факторіальне кільце, зв'язок між цими поняттями.
- Закон розкладу в кільці цілих гауссових чисел. Які цілі числа можуть бути представлені у вигляді суми двох квадратів.
- Квадратичний закон взаємності.
- Що таке скінченні розширення полів, їх основні властивості.
- Поняття цілого елемента в розширенні кілець.
- Що таке алгебраїчні та цілі алгебраїчні числа.
- Класифікацію квадратичних числових полів та будову їх кілець цілих елементів.
- Поняття класу ідеалів. Опис класів ідеалів уявних квадратичних полів в термінах ґраток на площині.
- Поняття дедекіндова кільця. Теорему про розклад ідеалів дедекіндова кільця на прості

- множники.
- Що таке норма ідеалу. Мультиплікативність норми.
  - Закони розкладу для квадратичних полів.
  - Мати поняття про структуру законів розкладу для довільних полів алгебраїчних чисел.

*уміти :*

- Користуватись арифметикою кільця цілих гауссових чисел (наприклад, знаходити найбільший спільний дільник).
- Обчислювати число класів для уявних квадратичних полів з невеликим дискримінантом.
- Застосовувати закони розкладу в уявних квадратичних полях до вивчення діофантових рівнянь.

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни

### Розділ 1. Елементарна теорія алгебраїчних чисел.

Тема 1. Елементарна теорія алгебраїчних чисел.

1. Подільність в кільцях. Прості елементи кільця. Кільця евклідові, головних ідеалів, факторіальні.
2. Кільце цілих гауссових чисел. Закон розкладу в цьому кільці. Представлення цілого числа у вигляді суми двох квадратів.
3. Символ Лежандра. Квадратичний закон взаємності.
4. Алгебраїчні та цілі алгебраїчні числа.
5. Квадратичні поля та їх кільця цілих. Закони розкладу (у випадку факторіальності).

### Розділ 2. Ідеали в кільцях алгебраїчних чисел.

Тема 2. Ідеали в кільцях алгебраїчних чисел.

1. Класи ідеалів. Дробові ідеали.
2. Класи ідеалів квадратичного поля. Зв'язок з ґратками на площині.
3. Дедекіндові кільця. Розклад ідеалів на множники.
4. Норма ідеалу. Властивості норми.
5. Закони розкладу для квадратичних полів. Застосування до деяких діофантових рівнянь.
6. Закони розкладу для довільних полів алгебраїчних чисел (огляд).

## 3. Структура навчальної дисципліни

| Назви розділів і тем                                    | Кількість годин |              |    |      |      |       |              |              |    |      |      |       |
|---|-----------------|--------------|----|------|------|-------|--------------|--------------|----|------|------|-------|
|   | денна форма     |              |    |      |      |       | заочна форма |              |    |      |      |       |
|   | усього          | у тому числі |    |      |      |       | усього       | у тому числі |    |      |      |       |
|   |                 | л            | п  | лаб. | інд. | с. р. |              | л            | п  | лаб. | інд. | с. р. |
| 1   | 2               | 3            | 4  | 5    | 6    | 7     | 8            | 9            | 10 | 11   | 12   | 13    |
| <b>Розділ 1. Елементарна теорія алгебраїчних чисел</b>  |                 |              |    |      |      |       |              |              |    |      |      |       |
| <b>Тема 1.</b><br>Елементарна теорія алгебраїчних чисел | 90              | 13           | 13 |      |      | 64    |              |              |    |      |      |       |
| Разом за розділом 1                                     | 90              | 13           | 13 |      |      | 64    |              |              |    |      |      |       |
| <b>Розділ 2. Ідеали в кільцях алгебраїчних чисел</b>    |                 |              |    |      |      |       |              |              |    |      |      |       |
| <b>Тема 2.</b> Ідеали в кільцях алгебраїчних чисел      | 90              | 13           | 13 |      |      | 64    |              |              |    |      |      |       |

|                         |     |    |    |  |  |     |  |  |  |  |  |
|-------------------------|-----|----|----|--|--|-----|--|--|--|--|--|
| Разом за розділом 2     | 90  | 13 | 13 |  |  | 64  |  |  |  |  |  |
| <b>Усього<br/>годин</b> | 180 | 26 | 26 |  |  | 128 |  |  |  |  |  |

#### 4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

| №<br>з/п | Назва теми  | Кількість<br>годин |
|----------|---|--------------------|
|          | Опрацювання додаткового матеріалу за відповідними темами: |                    |
| 1        | Елементарна теорія алгебраїчних чисел                     | 13                 |
| 2        | Ідеали в кільцях алгебраїчних чисел                       | 13                 |
|          | Разом   | <b>26</b>          |

#### 5. Завдання для самостійної роботи

| №<br>з/п | Види, зміст самостійної роботи        | Кількість<br>годин |
|----------|---------------------------------------|--------------------|
| 1        | Елементарна теорія алгебраїчних чисел | 64                 |
| 2        | Ідеали в кільцях алгебраїчних чисел   | 64                 |
|          | Разом                                 | <b>128</b>         |

#### 6. Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна.

#### 7. Методи контролю

- 1) поточний семестровий (виконання домашніх завдань); перевірка контрольної роботи;
- 2) підсумковий екзамен.

#### 8. Схема нарахування балів

| Поточний контроль та самостійна робота |          | Контрольна робота | Разом | Екзамен | Сума |
|--|----------|-------------------|-------|---------|------|
| Розділ 1                               | Розділ 2 | 20                | 60    | 40      | 100  |
| 20                                     | 20       |                   |       |         |      |

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

#### Критерії оцінювання навчальних досягнень

| Оцінка в балах | Оцінка за національною шкалою |   |
|----------------|-------------------------------|---|
| Оцінка         | Пояснення                     |   |
| 90 – 100       | Відмінно                      | Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою. |

|         |              |   |
|---------|--------------|---|
| 70 – 89 | Добре        | Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками. |
| 50 – 69 | Задовільно   | Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.  |
| 1 – 49  | Незадовільно | Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки.   |

### Шкала оцінювання

| Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру | Оцінка за національною шкалою       |
|--|-------------------------------------|
|  | для чотиривимірної шкали оцінювання |
| 90 – 100   | відмінно                            |
| 70 – 89  | добре                               |
| 50 – 69  | задовільно                          |
| 1 – 49   | незадовільно                        |

## 9. Рекомендована література

### Основна література

1. Ireland K, M. Rosen. A Classical Introduction to Modern Number Theory. Springer-Verlag, 1990
2. Дрозд Ю. А. Теорія алгебричних чисел. Київ, 1997
3. Trifkovic M. Algebraic Theory of Quadratic Numbers. Springer-Verlag, 2013

### Допоміжна література

1. Lang S. Algebra. Springer-Verlag, 2002.
2. Lang S. Algebraic Number Theory. Springer-Verlag, 1994
3. Borevich Z. I, Shafarevich I. R. Number Theory. Academic Press, 1966

## 11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

<http://mathworld.wolfram.com/topics/AlgebraicNumberTheory.html>