

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра фундаментальної математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”  
Декан факультету  
математики і інформатики  
Григорій ЖОЛТКЕВИЧ  
“13” 08 2024 р.



РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

**Рівняння математичної фізики**

рівень вищої освіти **перший(бакалаврський)**

галузь знань **11 – Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни **обов'язкова**

факультет **математики і інформатики**

2024 / 2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

27 серпня 2024 року, протокол № 8

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Фастовська Тамара Борисівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри фундаментальної математики**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики  
протокол від 26 серпня 2024 року № 1.

В. о завідувача кафедри



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)  
програми



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і  
інформатики  
протокол від 27 серпня 2024 року № 1.

Голова науково-методичної комісії



Євген МЕНЯЙЛОВ

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “**Рівняння математичної фізики**” складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки **бакалавр спеціальності 111– Математика** освітня програма «**Математика**»

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Мета курсу полягає у навчанні майбутніх спеціалістів основам теорії рівнянь математичної фізики та її застосуванням.

1.2. Завдання курсу полягає у навчанні студентів досліджувати існування та єдиність розв’язків задач математичної фізики та знаходити розв’язки модельних задач еліптичного, параболічного та гіперболічного типів.

1.2.1. Формування наступних інтегральної та загальних компетентностей:

ІК01. Здатність розв’язувати складні задачі та практичні проблеми у математиці або у процесі навчання, що передбачає застосування теорій та методів математики, статистики й комп’ютерних технологій і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.

ЗК01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК03. Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.

ЗК07. Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.

1.2.2. Формування наступних фахових компетентностей:

ФК01. Здатність формулювати проблеми математично та в символічній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв’язання.

ФК02. Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв’язання тієї самої задачі.

ФК04. Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізнити правдоподібні аргументи від формально бездоганих.

ФК06. Здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем.

1.3. Кількість кредитів – **8**

1.4. Загальна кількість годин – **240**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни		
<b>Обов’язкова</b>		
Денна форма навчання		Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки		
<b>4-й</b>		
Семестр		
<b>7-й</b>	<b>8-й</b>	
Лекції		
<b>32 год.</b>	<b>32 год.</b>	
<b>Практичні, семінарські заняття</b>		
<b>32 год.</b>	<b>32 год.</b>	
Лабораторні заняття		
Самостійна робота		

<b>56 год.</b>	<b>56 год.</b>	
Індивідуальні завдання		
розрахунково-графічна робота 7 сем., розрахунково-графічна робота 8 сем.		

1.6. Заплановані результати навчання:

**Знати:**

- основні типи лінійних рівнянь математичної фізики;
- методи теоретичного вивчення проблеми існування розв'язків еліптичних, параболічних та гіперболічних рівнянь.

**Уміти:**

- використовувати сучасні методи вивчення проблеми існування розв'язків рівнянь з частинними похідними для моделювання реальних фізичних, біологічних, екологічних, соціально-економічних та інших процесів і явищ;
- знаходити точні розв'язки модельних задач еліптичного, параболічного та гіперболічного типів.

Результати вивчення навчальної дисципліни «Рівняння математичної фізики» відповідають таким програмним результатам навчання:

РН.04 Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми.

РН06 Знати методи математичного моделювання природничих та/або соціальних процесів..

РН19 Знати теоретичні основи і застосовувати методи математичної фізики для моделювання реальних фізичних, біологічних, екологічних, соціально-економічних та інших процесів і явищ.

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни

*Розділ 1. Загальна теорія рівнянь з частинними похідними. Теорія гармонічних функцій. Метод функції Гріна для еліптичних задач.*

*Тема 1.* Класифікація лінійних рівнянь другого порядку з частинними похідними. Постановки основних крайових задач для оператора Лапласа. Поняття класичного розв'язку.

*Тема 2.* Формули Гріна для оператора Лапласа. Гармонічні функції. Теореми про середнє. Принцип максимуму для гармонічних функцій. Наслідки принципу максимуму для гармонічних функцій.

*Тема 3.* Функція Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа. Означення, фізичний зміст, властивості. Побудова функції Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа для найпростіших тривимірних областей.

*Тема 4.* Застосування методу конформних відображень для побудови функції Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа для найпростіших двовимірних областей

*Розділ 2. Крайова задача рівняння Пуассона в кулі та крузі. Метод Фур'є для рівняння Пуассона в крузі. Метод потенціалів.*

*Тема 1.* Побудова функції Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа в кулі. Класичне розв'язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа в кулі.

*Тема 2.* Метод розподілу змінних для рівняння Пуассона в крузі.

*Тема 3.* Об'ємний потенціал і його властивості. Потенціал простого шару і його основні властивості. Потенціал подвійного шару і його основні властивості. Теорема про граничні значення потенціалів подвійного і простого шарів. Зведення граничних задач Діріхле і Неймана для оператора Лапласа до граничних інтегральних рівнянь.

### *Розділ 3. Спеціальні функції.*

*Тема 1.* Циліндричні функції. Рекурентні формули. Норми функцій Бесселя. Поліноми Лежандра. Властивості поліномів Лежандра. Рекурентні формули. Рівняння Лежандра. Приєднані функції Лежандра. Властивості приєднаних функцій Лежандра. Означення сферичної функції. Приклади.

### *Розділ 3. Теорія параболічних рівнянь*

*Тема 1.* Класичні розв'язки рівняння теплопровідності. Принцип максимуму. Його наслідки. Рівняння теплопровідності на всій вісі. Теорема єдиності класичного розв'язку. Однорідне та неоднорідне рівняння теплопровідності на всій вісі. Формули Пуассона.

*Тема 2.* Рівняння теплопровідності на півосі.

*Тема 3.* Рівняння теплопровідності в обмеженій області. Метод Фур'є.

Метод Фур'є для задачі охолодження круглого циліндра.

### *Розділ 4. Теорія гіперболічних рівнянь.*

*Тема 1.* Хвильове рівняння на всій вісі. Формула Даламбера, Пуассона, Кірхгофа. Теорема існування та єдиності класичних розв'язків. Хвильова інтерпретація розв'язків.

*Тема 2.* Хвильове рівняння на півосі.

*Тема 3.* Хвильове рівняння в обмеженій області. Метод Фур'є.

*Тема 4.* Поширення хвиль у просторі. Метод Фур'є для рівняння коливань круглої мембрани.

## **3. Структура навчальної дисципліни**

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					ус ьо го	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	л а б.	ін д.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 0	1 1	1 2	13
<b>Розділ 1. Загальна теорія рівнянь з частинними похідними. Теорія гармонічних функцій. Метод функції Гріна для еліптичних задач.</b>												
Тема 1. Класифікація лінійних рівнянь другого порядку з частинними похідними. Постановки основних крайових задач для оператора Лапласа. Поняття класичного розв'язку.	8	2	2			4						
Тема 2. Формули Гріна для оператора Лапласа. Гармонічні	14	4	4			6						

функції. Теореми про середнє. Принцип максимуму для гармонічних функцій. Наслідки принципу максимуму для гармонічних функцій.											
Тема 3. Функція Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа. Означення, фізичний зміст, властивості. Побудова функції Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа для найпростіших тривимірних областей.	14	4	4			6					
Тема 4. Застосування методу конформних відображень для побудови функції Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа для найпростіших двовимірних областей.	12	2	2			8					
Усього за розділом 1	48	12	12			24					
<b>Розділ 2. Крайова задача рівняння Пуассона в кулі та крузі. Метод Фур'є для рівняння Пуассона в крузі. Метод потенціалів.</b>											
Тема 1. Побудова функції Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа в кулі. Класичне розв'язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа в кулі.	16	4	4			8					
Тема 2. Метод Фур'є для рівняння Пуассона в крузі.	16	4	4			8					
Тема 3. Об'ємний потенціал і його властивості. Потенціал простого шару і його основні властивості. Потенціал подвійного шару і його основні властивості. Теорема про граничні значення потенціалів подвійного і простого шарів. Зведення граничних задач Діріхле і Неймана для оператора Лапласа до граничних інтегральних рівнянь.	20	6	6			8					
Усього за розділом 2	52	14	14			24					
<b>Розділ 3. Спеціальні функції.</b>											
Тема 1. Циліндричні функції. Рекурентні формули. Норми функцій Бесселя. Поліноми Лежандра. Властивості поліномів Лежандра. Рекурентні формули. Рівняння Лежандра. Приєднані	18	6	6			6					

функції Лежандра. Властивості приєднаних функцій Лежандра. Означення сферичої функції. Приклади.												
Усього за розділом 3	20	6	6			8						
	<b>120</b>	<b>32</b>	<b>32</b>			<b>56</b>						
<b>Розділ 4. Теорія параболічних рівнянь.</b>												
Тема 1. Класичні розв'язки рівняння теплопровідності. Принцип максимуму. Його наслідки. Рівняння теплопровідності на всій вісі. Теорема єдиності класичного розв'язку. Однорідне та неоднорідне рівняння теплопровідності на всій вісі. Формули Пуассона.	14	4	4			8						
Тема 2. Рівняння теплопровідності на півосі.	10	4	4			8						
Тема 3. Рівняння теплопровідності в обмеженій області. Метод Фур'є.	14	6	6			8						
Усього за розділом 4	52	14	14			24						
<b>Розділ 5. Теорія гіперболічних рівнянь.</b>												
Тема 1. Хвильове рівняння на всій вісі. Формула Даламбера, Пуассона, Кірхгофа. Теорема існування та єдиності класичних розв'язків. Хвильова інтерпретація розв'язків.	20	6	6			8						

Тема 2. Хвильове рівняння на півосі.	16	4	4		8					
Тема 3. Хвильове рівняння в обмеженій області. Метод Фур'є.	16	4	4		8					
Тема 4. Поширення хвиль у просторі. Метод Фур'є для рівняння коливань круглої мембрани.	16	4	4		8					
Усього за розділом 4	68	18	18		32					
Усього за 2 семестр	<b>120</b>	<b>32</b>	<b>32</b>		<b>56</b>					
	<b>240</b>	<b>64</b>	<b>64</b>		<b>112</b>					

)\* Викладаються дистанційно, на платформі ZOOM

#### 4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

1	Зведення лінійних рівнянь другого порядку до канонічного виду.	2
2	Побудова функції Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа методом симетричного відображення.	8
3	Побудова функції Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа методом конформного відображення.	6
4	Метод Фур'є для еліптичних рівнянь. Випадок елементарних власних функцій.	4
5	Розв'язання еліптичних рівнянь методом потенціалів.	4
6	Спеціальні функції.	6
7	Контрольна робота.	2
Усього за 7 семестр		<b>32</b>
1	Задача Коші для рівняння теплопровідності.	4
2	Рівняння теплопровідності на півосі.	4
3	Рівняння теплопровідності на відрізку. Метод Фур'є.	6
5	Задача Коші для хвильового рівняння.	4
6	Хвильове рівняння на півосі.	4
7	Хвильове рівняння на відрізку. Метод Фур'є.	4
8	Задача коливань круглої мембрани. Метод Фур'є із застосуванням циліндричних функцій.	2
9	Контрольна робота.	2
Усього за 8 семестр		<b>32</b>
<b>Разом</b>		<b>64</b>

#### 5. Завдання для самостійної роботи



№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
Опрацювання додаткового матеріалу за відповідними темами:		
1	Класифікація лінійних рівнянь другого порядку з частинними похідними. Постановки основних крайових задач для оператора Лапласа. Поняття класичного розв'язку.	4
2	Формули Гріна для оператора Лапласа. Гармонічні функції. Теореми про середнє. Принцип максимуму для гармонічних функцій. Наслідки принципу максимуму для гармонічних функцій.	6
3	Функція Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа. Означення, фізичний зміст, властивості. Побудова функції Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа для найпростіших тривимірних областей.	6
4	Застосування методу конформних відображень для побудови функції Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа для найпростіших двовимірних областей.	8
5	Побудова функції Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа в кулі. Класичне розв'язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа в кулі.	8
6	Метод Фур'є для рівняння Пуассона в крузі.	8
7	Об'ємний потенціал і його властивості. Потенціал простого шару і його основні властивості. Потенціал подвійного шару і його основні властивості. Теорема про граничні значення потенціалів подвійного і простого шарів. Зведення граничних задач Діріхле і Неймана для оператора Лапласа до граничних інтегральних рівнянь.	8
8	Циліндричні функції. Рекурентні формули. Норми функцій Бесселя. Поліноми Лежандра. Властивості поліномів Лежандра. Рекурентні формули. Рівняння Лежандра. Приєднані функції Лежандра. Властивості приєднаних функцій Лежандра. Означення сферичної функції. Приклади.	4
9	Виконання розрахунково-графічної роботи	4
Усього за 7 семестр		56
9	Класичні розв'язки рівняння теплопровідності. Принцип максимуму. Його наслідки. Рівняння теплопровідності на всій вісі. Теорема єдиності класичного розв'язку. Однорідне та неоднорідне рівняння теплопровідності на всій вісі. Формули Пуассона.	8
10	Рівняння теплопровідності на півосі.	8
11	Рівняння теплопровідності в обмеженій області. Метод Фур'є.	8
12	Хвильове рівняння на всій вісі. Формула Даламбера. Теорема існування та єдиності класичних розв'язків. Хвильова інтерпретація розв'язків.	8
13	Хвильове рівняння на напіввісі.	4
14	Хвильове рівняння в обмеженій області. Метод розподілу змінних. Метод розподілу змінних для рівняння коливань круглої мембрани.	4
15	Виконання розрахунково-графічної роботи	4
16	Підготовка до іспиту	4
Усього за 8 семестр		56
<b>Разом</b>		<b>112</b>

### 6. Індивідуальні завдання

Розрахунково-графічна робота 7 сем., розрахунково-графічна робота 8 сем.

### 7. Методи навчання

Лекційно-практичні, пояснювально-ілюстративні, репродуктивні, проблемного викладу, частково-пошукові. Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна.

### 8. Методи контролю

- контрольна робота (2); розрахунково-графічна (2)
- залік (7-й семестр); екзамен (8-й семестр)

### 9. Схема нарахування балів

#### 7-й семестр

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання											Залік	Сума
Розділ 1				Розділ 2			Розділ 3	Контроль на робота, передбачена навчальним планом	Розрахунково-графічна робота	Усього		
T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T1	20	20	60	40	100
2	3	3	2	2	2	2	2					

#### 8-й семестр

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання											Екзамен	Сума
Розділ 4				Розділ 5				Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Розрахунково-графічна робота	Усього		
T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4	20	20	60	40	100
2	3	3	3	3	3	3	3					

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

### Критерії оцінювання навчальних досягнень

Поточний контроль: бали нараховуються за виконання домашніх завдань. За активність під час занять можуть нараховуватись бонусні бали.

За контрольні роботи бали нараховуються таким чином: максимальний бал у разі правильної обґрунтованої відповіді; за незначні помилки оцінка зменшується від 10 до 30 відсотків; за значні логічні помилки оцінка зменшується до 50 відсотків, якщо хід розв'язання в цілому правильний; у разі частково правильних міркувань за відсутності обґрунтованої відповіді виставляється до 30 відсотків від максимальної кількості балів; відповідь не відповідає жодному з критеріїв, які сформульовані вище, – виставляється 0 балів.

Розрахунково-графічні роботи оцінюються за тими ж принципами, що контрольні роботи. Екзаменаційний білет складається з двох теоретичних питань. Максимальну кількість балів за теоретичні питання можна отримати, якщо сформулювати та довести відповідні твердження, навести необхідні приклади. Якщо студент правильно описав ідею доведення, але не зміг до кінця привести відповідні викладки, то оцінка зменшується від 10 до 30 відсотків. У випадку, коли студент зробив помилки при формулюванні тверджень або не зміг пояснити ідею доведення чи навести приклади, то оцінка зменшується від 40 до 100 відсотків.

Залікові роботи оцінюються за тими ж принципами, що екзаменаційні білети.

### Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою	
	для чотирирівневої шкали оцінювання	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно	зараховано
70-89	добре	
50-69	задовільно	
1-49	незадовільно	не зараховано

### 10. Рекомендована література Базова література

1. Бобик О.І. Рівняння математичної фізики (Класифікація, основні крайові задачі, теорема Ковалевської і характеристики): Текст лекцій. — Львів: ЛДУ, 1990.
2. Бобик О.І. Рівняння математичної фізики (Гармонічні функції, коректність граничних задач для рівняння Лапласа і Пуассона, функція точкового джерела): Текст лекцій.– Львів: ЛДУ, 1990.
3. Бобик О.І., Бобик І.О. Практикум з рівнянь математичної фізики. Ч.1, 2. –Львів, 1996.

### Допоміжна література

5. Бугрій О.М. Рівняння математичної фізики: методичні вказівки.– Львів: вид. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2006.
6. Бокало М.М. Рівняння математичної фізики (Класифікація рівнянь з частинними похідними. Постановки крайових задач. Задача Коші). Текст лекцій. –Львів: ЛДУ, 1994.
7. Іванчов М.І. Вступ до теорії рівнянь у частинних похідних: текст лекцій.–Львів: іада плюс, 2004.
8. Івасишен С.Д. , Лавренчук В.П., Івасюк Г.П., Рева Н.В. Основи класичної теорії рівнянь математичної фізики. — Чернівці: Вид. дім “Родовід”, 2015.
9. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. — К.: Либідь. – 2001.

#### **11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення**

1. [www-library.univer.kharkov.ua](http://www-library.univer.kharkov.ua)
2. <http://library.kpi.kharkov.ua>

#### **3. [HTTP://MATHWORLD.WOLFRAM.COM/TOPICS/PARTIALDIFFERENTIALEQUATIONS.HTML](http://MATHWORLD.WOLFRAM.COM/TOPICS/PARTIALDIFFERENTIALEQUATIONS.HTML)**

4. Wikipedia: [https://en.wikipedia.org/wiki/Differential\\_equation#Partial\\_differential\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation#Partial_differential_equations)
5. MathOverflow: <http://mathoverflow.net/questions/tagged/differential-equations>