

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра **фундаментальної математики**

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

В.о. декана факультету математики
і інформатики

Євген МЕНЯЙЛОВ



Сергій 2025 р.

Робоча програма навчальної дисципліни

Вступ до обернених задач спектрального аналізу

рівень вищої освіти **перший (бакалаврський)**

галузь знань **11 – Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни **за вибором**

факультет **математики і інформатики**

2025/2026 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики
26 серпня 2025 року, протокол № 10

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

Шепельський Дмитро Георгійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., старший науковий співробітник, професор кафедри фундаментальної математики

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики
від 26 серпня 2025 року, протокол № 1.

В. о. завідувача кафедри



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)

програми



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики
від 26 серпня 2025 року, протокол № 1.

Голова науково-методичної комісії



Євген МЕНЯЙЛОВ

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “Вступ до обернених задач спектрального аналізу” складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки **бакалавр спеціальності 111 – Математика** освітня програма «Математика»

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни “Вступ до обернених задач спектрального аналізу” є надання майбутнім фахівцям знань у галузі прямих та обернених задач для диференціальних операторів на прикладі диференціального оператора Штурма-Ліувілля.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни є опанування основними методами дослідження диференціальних операторів, включаючи дослідження асимптотики власних значень та прямої і оберненої спектральних задач для таких операторів.

1.3. Кількість кредитів: **4**

1.4. Загальна кількість годин: **120**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
за вибором	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
4-й	
Семестр	
8-й	
Лекції	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
56 год.	
Індивідуальні завдання	

1.6. Перелік компетентностей, що формує дана дисципліна:

ІК-01 Здатність розв’язувати складні задачі та практичні проблеми у математиці або у процесі навчання, що передбачає застосування теорій та методів математики, статистики й комп’ютерних технологій і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.

ЗК-01 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК-03 Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.

ЗК-07 Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.

СК-01 Здатність формулювати проблеми математично та в символічній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв’язання.

СК-02 Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв’язання тієї самої задачі.

СК-04 Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганих.

1.7. Перелік результатів навчання, що формує дана дисципліна:

ПРН.04 Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми.

ПРН.13. Знати теоретичні основи і застосовувати методи математичного аналізу для дослідження функцій однієї та багатьох дійсних змінних.

ПРН.19. Знати теоретичні основи і застосовувати методи математичної фізики для моделювання реальних фізичних, біологічних, екологічних, соціально-економічних та інших процесів і явищ.

1.8. Пререквізити: Елементи теорії звичайних диференціальних рівнянь; основи комплексного аналізу.

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Пряма спектральна задача для операторів Штурма-Ліувілля.

- **Тема 1.** *Диференціальний оператор Штурма-Ліувілля. Пряма спектральна задача на скінченному інтервалі.*

Загальна форма операторів другого порядку. Зведення до форми Штурма-Ліувілля.

Крайові умови для задачі на скінченному інтервалі.

- **Тема 2.** *Оцінки для фундаментальної системи.*

Фундаментальна система розв'язків. Оцінки за допомогою інтегральних рівнянь для фундаментальних розв'язків.

- **Тема 3.** *Похідні Фреше розв'язків фундаментальної системи.*

Похідна Фреше операторів у банахових просторах. Похідна Фреше власних функцій оператора Штурма-Ліувілля відносно спектрального параметра. Похідна Фреше відносно потенціалу.

- **Тема 4.** *Асимптотика власних значень: груба оцінка.*

Характеристична функція спектральної задачі. Застосування теореми Руше до дослідження розподілу нулів характеристичної функції. **Тема 5.** *Асимптотика власних значень: остаточна оцінка.*

Застосування похідних Фреше до уточнення асимптотичної поведінки власних значень. Інтегральний оператор Гельфанда-Левітана-Марченка. Зведення до задачі Гурса.

- **Тема 6.** *Уточнення асимптотичної формули розподілу власних значень для задачі з крайовими умовами Діріхле.*

Застосування похідних Фреше до уточнення асимптотичної поведінки власних значень для задач з різними крайовими умовами. Теорема єдиності відновлення потенціалу за двома спектрами. Теорема єдиності за одним спектром для симетричних потенціалів

Розділ 2. Обернена спектральна задача для операторів Штурма-Ліувілля.

- **Тема 7.** *Крайові задачі для гіперболічних рівнянь.*
- Гіперболічні рівняння, що виникають при побудові операторів перетворення. Задача Коші. Зведення до інтегральних рівнянь типу Вольтера
- **Тема 8.** *Задача Гурса.*

Зведення задачі Гурса до інтегральних рівнянь типу Вольтера. Оцінки розв'язків задачі Гурса.

- **Тема 9.** *Оператори перетворення.*

Загальна ідея побудови операторів перетворення. Конструкція операторів перетворення для рівняння Штурма-Ліувілля.

- **Тема 10.** *Обернена задача для операторів Штурма-Ліувілля. Теорема єдиності відновлення потенціалу за двома спектрами.*

Застосування операторів перетворення і задач Гурса для доведення теореми єдиності відновлення потенціалу за двома спектрами.

- **Тема 11.** *Теорема єдиності відновлення симетричного потенціалу за одним спектром.*

- Застосування операторів перетворення і задач Гурса для доведення теореми єдиності відновлення потенціалу за двома спектрами.
- **Тема 12. Обернена задача для операторів Штурма-Ліувілля за одним спектром та нормувальними константами.**
Спектральна функція операторів Штурма-Ліувілля. Теорема єдиності оберненої задачі за спектральною функцією.

3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин					
	Денна форма					
	Усьог о	у тому числі				
1		Л	п	лаб	інд	ср
2	3	4	5	6	7	
Розділ 1. Пряма спектральна задача для операторів Штурма-Ліувілля						
Тема 1. Диференціальний оператор Штурма-Ліувілля. Пряма спектральна задача на скінченному інтервалі	8	2	2			4
Тема 2. Оцінки для фундаментальної системи.	12	4	4			4
Тема 3. Похідні Фреше розв'язків фундаментальної системи.	13	4	4			5
Тема 4. Асимптотика власних значень: груба оцінка	8	2	2			4
Тема 5. Асимптотика власних значень: остаточна оцінка	8	2	2			4
Тема 6. Уточнення асимптотичної формули розподілу власних значень для задачі з крайовими умовами Діріхле	8	2	2			4
Разом за розділом 1	57	16	16			25
Розділ 2. Обернена спектральна задача для операторів Штурма-Ліувілля						
Тема 7. Крайові задачі для гіперболічних рівнянь.	8	2	2			4
Тема 8. Задача Гурса	12	4	4			4
Тема 9. Оператори перетворення.	13	4	4			5
Тема 10. Обернена задача для операторів Штурма-Ліувілля. Теорема єдиності відновлення потенціалу за двома спектрами	8	2	2			4
Тема 11. Теорема єдиності відновлення симетричного потенціалу за одним спектром.	8	2	2			4
Тема 12. Обернена задача для операторів Штурма-Ліувілля за одним спектром та нормувальними константами	8	2	2			4
Разом за розділом 2	57	16	16			25
Підготовка до екзамену	6					6
Усього годин	120	32	32			56

4. Теми практичних занять

№ з/П	Назва теми	Кількість годин
1	Початкові задачі для рівняння Штурма-Ліувілля на скінченному інтервалі	2
2	Крайові задачі для рівняння Штурма-Ліувілля.	4
3	Крайові задачі для рівняння Штурма-Ліувілля: зв'язок з інтегральними операторами, 1	4
4	Крайові задачі для рівняння Штурма-Ліувілля: зв'язок з інтегральними операторами, 2	2
5	Характеристичне рівняння: розподіл нулів, 1	2
6	Характеристичне рівняння: розподіл нулів, 2	2
7	Початкові задачі для рівняння Штурма-Ліувілля на нескінченному інтервалі	2
8	Оператори перетворення, 1	4
9	Оператори перетворення, 2	4
10	Розсіяння для рівняння Штурма-Ліувілля на нескінченному інтервалі: матриця розсіяння	2
11	Розсіяння для рівняння Штурма-Ліувілля на нескінченному інтервалі: коефіцієнт проходження та його нулі	2
12	Варіанти теореми єдиності	2
	Разом	32

5. Завдання для самостійної роботи

1	Загальна форма операторів другого порядку. Зведення до форми Штурма-Ліувілля.	4
2	Ряди Неймана для інтегральних операторів.	4
3	Похідна Фреше відносно потенціалу	5
4	Крайові задачі мішаного типу.	4
5	Власні функції операторів Штурма-Ліувілля.	4
6	Розподіл власних значень для задачі з крайовими умовами Діріхле	4
7	Рівняння Штурма-Ліувілля на всій осі.	4
8	Оператори перетворення для рівняння Штурма-Ліувілля на всій осі	4
9	Рівняння Штурма-Ліувілля на півосі.	5
10	Числові методи розв'язання оберненої задачі	4
11	Рівняння Штурма-Ліувілля з умовами розриву	4
12	Нодальні обернені задачі для рівняння Штурма-Ліувілля	4
	Підготовка до екзамену	6
	Разом	56

6. Індивідуальні завдання

Не передбачені планом

7. Методи навчання

Використовуються пояснювально-ілюстративний (лекції і практичні заняття), репродуктивний (виконання домашніх завдань) і частково-пошуковий (контрольні роботи) методи.

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину та в умовах воєнного стану, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

8. Методи контролю

- 1) поточний семестровий (виконання домашніх завдань); перевірка контрольної роботи;
- 2) підсумковий екзамен.

9. Схема нарахування балів

Розділ 1						Розділ 2						Контроль на робота	Разом	Залік	Сума
T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	20	60	40	100
3	3	4	3	3	3	3	3	3	4	4	4				

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

Критерії оцінювання

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 – 69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з

		освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою
	для чотирирівневої шкали оцінювання
90–100	відмінно
70–89	добре
50–69	задовільно
1–49	незадовільно

10. Рекомендована література

Основна література

1. Kirsch A. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems, Springer-Verlag, New York, 1996.

Допоміжна література

1. Poschel J., Trubowitz E., Inverse Spectral Theory.- Academic Press, London, 1987.
2. Teschl G. Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices. – AMS, 2000

11. Посилання на інформаційні ресурси

Wolfram Math World:

<http://mathworld.wolfram.com/topics/PartialDifferentialEquations.html>

Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation#Partial_differential_equations

MathOverflow: <http://mathoverflow.net/questions/tagged/differential-equations>