

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
**Кафедра фундаментальної математики**

**“ЗАТВЕРДЖУЮ”**

Проректор з науково-  
педагогічної роботи

Олександр ГОЛОВКО

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2022 р.

Робоча програма навчальної дисципліни  
**Топологічні векторні простори**

рівень вищої освіти **магістр**

галузь знань **11 - Математика та статистика**

спеціальність - **111 - Математика**

освітня програма - «**Математика**» вид

дисципліни **за вибором** факультет

**математики і інформатики**

2022 / 2023 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

29 серпня 2022 року, протокол № 7

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Професор кафедри фундаментальної математики, доктор фізико-математичних наук, професор Кадець Володимир Михайлович**

Програму схвалено та затверджено на засіданні кафедри фундаментальної математики протокол № 1 від 26 серпня 2022 року.

Завідувач кафедри



Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Програму погоджено з гарантом освітньої (наукової) програми «Математика».

Гарант освітньої (наукової)  
програми



Ганна ВИШНЯКОВА

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика».

Гарант освітньої (наукової)  
програми



Вячеслав ГОРДЕВСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики протокол № 1 від 29 серпня 2022 року.

Голова науково-методичної комісії

Ольга АНОЩЕНКО

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «Топологічні векторні простори» складена відповідно до освітньо-наукової та освітньо-професійної програм підготовки **магістр**

спеціальності - 111 «Математика»

освітня програма «Математика»

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни “Топологічні векторні простори” є надання майбутнім фахівцям знань з теорії топологічних векторних просторів.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни “Топологічні векторні простори” є навчання студентів теоретичним основам теорії топологічних векторних просторів та методам її застосування у інших розділах математики.

**1.3. Кількість кредитів – 4**

**1.4. Загальна кількість годин – 120**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни		
Нормативна / за вибором		
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання	
Рік підготовки		
2-й		
Семестр		
3-й		
ОНП	ОПП	Лекції
32 год.	26 год.	
Практичні, семінарські заняття		
32 год.	26 год.	
Лабораторні заняття		
Самостійна робота		
56 год.	68 год.	
Індивідуальні завдання		
.		

1.6. Заплановані результати навчання

У результаті вивчення даного курсу студент повинен

**знати :**

- Аксиоматику топологічних векторних просторів, приклади, властивості околів нуля, критерій метризованості.
- Термінологію: підпростори, факторпростори, оператори, функціонали, опуклі множини, півнорми, локально опуклі простори.
- Теорему Гана-Банаха у різних формах та її класичні застосування.
- Інтерполяційну теорему Ейдельгейта.
- Принцип одностайної неперервності.
- Основи теорії дуальності: слабкі топології, критерії слабкої збіжності, теорему про біполярну, теорему Алаоглу, теорему Еберлейна - Шмульяна.

**уміти :**

- Застосовувати вивчену теорію до розв'язку задач.
- Застосовувати мову топологічних векторних просторів у задачах математичного аналізу, диференціальних та інтегральних рівнянь.
- Користуватися компактністю у нескінченновимірних просторах.

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни

### Розділ 1. Аксиоматика та загальні властивості топологічних векторних просторів

#### Тема 1. Топологічні простори та фільтри.

1. Термінологія загальної топології (повторення).
2. Фільтри, бази фільтрів та ультрафільтри. Границі та граничні точки за фільтрами.
3. Критерії компактності у термінах фільтрів.
4. Добуток топологічних просторів. Теорема Тихонова про добуток компактів.

#### Тема 2. Вступ до топологічних векторних просторів.

1. Означення та властивості околів нуля.
2. Приклади.
3. Відокремлюваність.

#### Тема 3. Метризованість та нормовність.

1. Обмежені множини – означення та властивості.
2. Критерій нормовності.
3. Критерій метризованості.

#### Тема 4. Неперервні функціонали та оператори.

1. Зв'язок між неперервністю та обмеженістю лінійних операторів.
2. Критерії неперервності лінійних функціоналів.
3. Фільтри Коші та повнота.
4. Теорема про ізоморфізм  $n$ -вимірних просторів.

#### Тема 5. Локально опуклі простори.

1. Локальна опуклість та півнорми.
2. Приклади.
3. Теорема Гана - Банаха.
4. Інтерполяційна теорема Ейдельгайта.

### Розділ 2. Теорія двоїстості для локально опуклих просторів

#### Тема 6. Дуальність.

1. Пари просторів у двоїстості. Приклади.
2. Слабкі топології. Неперервність функціоналів у слабкій топології.
3. Замкненість та слабка замкненість.
4. Полярні, теорема про біполярну.

#### Тема 7. Принцип одностайної неперервності.

1. Бочки, бочечність та теорема Бера.
2. Доведення принципу одностайної неперервності.

#### Тема 8. Теорема Алаоглу.

1. Формулювання та доведення теореми Алаоглу.
2. Обмеженість та слабка обмеженість множин у локально опуклих просторах.

#### Тема 9. Дуальність у банахових просторах.

1. Метризованість слабкої топології на підмножинах.
2. Вкладення простору у бідуальний простір.
3. Теорема Еберлейна-Шмульяна.

#### Тема 10. Рефлексивність у банахових просторах.

1. Теорема Голдстайна.
2. Критерії рефлексивності.
3. Властивості рефлексивних просторів.
4. Приклади рефлексивних та нереплексивних просторів.

### 3. Структура навчальної дисциплін (для освітньо-наукової програми)

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<b>Розділ 1. Аксиоматика та загальні властивості топологічних векторних просторів</b>												
Тема 1. Топологічні простори та фільтри	13	4	4			5						
Тема 2. Вступ до топологічних векторних просторів.	11	4	2			5						
Тема 3. Метризованість та нормованість.	11	2	4			5						
Тема 4. Неперервні функціонали та оператори.	11	2	4			5						
Тема 5. Локально опуклі простори.	14	4	2			8						
Разом за розділом 1	60	16	16			28						
<b>Розділ 2. Теорія двоїстості для локально опуклих просторів</b>												
Тема 6. Дуальність.	16	4	4			8						
Тема 7. Принцип одностайної неперервності.	11	2	4			5						
Тема 8. Теорема Алаоглу.	11	4	2			5						
Тема 9. Дуальність у банахових просторах.	11	4	2			5						
Тема 10. Рефлексивність у банахових просторах.	11	2	4			5						
Разом за розділом 2	60	16	16			28						
<b>Усього годин</b>	<b>120</b>	<b>32</b>	<b>32</b>			<b>56</b>						

## (для освітньо-професійної програми)

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<b>Розділ 1. Аксиоматика та загальні властивості топологічних векторних просторів</b>												
Тема 1. Топологічні простори та фільтри	13	3	3			6						
Тема 2. Вступ до топологічних векторних просторів.	11	2	2			7						
Тема 3. Метризованість та нормованість.	11	3	3			7						
Тема 4. Неперервні функціонали та оператори.	11	2	2			7						
Тема 5. Локально опуклі простори.	14	3	3			7						
Разом за розділом 1	60	13	13			34						
<b>Розділ 2. Теорія двоїстості для локально опуклих просторів</b>												
Тема 6. Дуальність.	16	3	3			7						
Тема 7. Принцип одностайної неперервності.	11	2	2			7						
Тема 8. Теорема Алаоглу.	11	3	2			7						
Тема 9. Дуальність у банахових просторах.	11	2	3			6						
Тема 10. Рефлексивність у банахових просторах.	11	3	3			7						
Разом за розділом 2	60	13	13			34						
<b>Усього годин</b>	<b>120</b>	<b>26</b>	<b>26</b>			<b>68</b>						

#### 4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

(для освітньо-наукової програми)

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Топологічні простори та фільтри	4
2	Опуклі, врівноважені та поглинаючі множини. Функціонал Мінковського	2
3	Метризовність та нормовність	3
4	Неперервні функціонали та оператори	3
5	Контрольна робота	2
6	Дуальність	4
7	Бочки, теорема Бера та принцип одностайної неперервності	4
8	Теорема Алаоглу та слабо із зірочкою збіжні послідовності	2
9	Слабо збіжні послідовності.	2
10	Бідуальний простір.	2
11	Рефлексивні та нерефлексивні простори	2
12	Оглядове заняття з розв'язку задач підвищеної складності	2
	Контрольна робота.	2
	<b>Разом</b>	<b>32</b>

(для освітньо-професійної програми)

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Топологічні простори та фільтри	2
2	Опуклі, врівноважені та поглинаючі множини. Функціонал Мінковського	2
3	Метризовність та нормовність	2
4	Неперервні функціонали та оператори	2
5	Контрольна робота	2
6	Дуальність	2
7	Бочки, теорема Бера та принцип одностайної неперервності	2
8	Теорема Алаоглу та слабо із зірочкою збіжні послідовності	2
9	Слабо збіжні послідовності.	2
10	Бідуальний простір.	2
11	Рефлексивні та нерефлексивні простори	2
12	Оглядове заняття з розв'язку задач підвищеної складності	2
	Контрольна робота	2
	<b>Разом</b>	<b>26</b>

## 5.Завдання для самостійної роботи

(для освітньо-наукової програми)

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
	Опрацювання даних тем за конспектом:	
1	Топологічні простори та фільтри	9
2	Вступ до топологічних векторних просторів	9
3	Метризовність та нормовність	8
4	Неперервні функціонали та оператори	9
5	Локально опуклі простори	8
6	Дуальність	9
7	Принцип одностайної неперервності	9
8	Теорема Алаоглу	8
9	Дуальність у банахових просторах	9
10	Рефлексивність у банахових просторах	8
	<b>Разом</b>	<b>86</b>

(для освітньо-професійної програми)

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
	Опрацювання даних тем за конспектом:	
1	Топологічні простори та фільтри	6
2	Вступ до топологічних векторних просторів	7
3	Метризовність та нормовність	7
4	Неперервні функціонали та оператори	7
5	Локально опуклі простори	7
6	Дуальність	7
7	Принцип одностайної неперервності	7
8	Теорема Алаоглу	7
9	Дуальність у банахових просторах	6
10	Рефлексивність у банахових просторах	7
	<b>Разом</b>	<b>68</b>

## 6. Індивідуальні завдання

не передбачені навчальним планом

## 7. Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

## 8. Методи контролю

- 1) поточний семестровий (домашні завдання); контрольна робота (1);
- 2) письмовий екзамен (для ОНП), екзамен або зілак.(для ОПП).



## 9. Схема нарахування балів

Поточний контроль та самостійна робота		Контрольна робота, передбачена робочим планом	Разом	Екзамен/ залік	Сума
Розділ 1	Розділ 2	20	60	40	100
20	20				

### Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою	
	для чотирирівневої шкали оцінювання	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно	зараховано
70-89	добре	
50-69	задовільно	
1-49	незадовільно	не зараховано

### Критерії оцінювання

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 – 69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

## 10. Рекомендована література

### Основна література

1. Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Підручник. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія “Університетська бібліотека”)

### Допоміжна література

1. [John L. Kelley](#). General Topology, [Graduate Texts in Mathematics](#) (GTM, volume 27), 1975
2. [Walter Rudin](#) Functional Analysis. McGraw-Hill, 1991
3. A. P. Robertson, Wendy Robertson Topological Vector Spaces, Cambridge University Press, 1973