

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра **фундаментальної математики**

**“ЗАТВЕРДЖУЮ”**

Декан факультету  
математики і інформатики

Григорій ЖОЛТКЕВИЧ



2023 р.

Робоча програма навчальної дисципліни

## **ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ**

рівень вищої освіти **бакалавр**

галузь знань **11 - Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни **обов'язкова**

факультет **математики і інформатики**

2023 / 2024 навчальний рік

Програму рекомендовано до перезатвердження вченою радою факультету математики і інформатики

29 серпня 2023 року, протокол № 8

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Олексій Щербина, канд.фіз.-мат.наук, старший викладач кафедри фундаментальної математики.**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики

Протокол від 28 серпня 2023 року № 1.

В. о завідувача кафедри



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)  
програми



Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики  
протокол від 29 серпня 2023 року № 1.

Голова науково-методичної комісії



Ольга АНОЩЕНКО

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «**ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ**» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки «бакалавр» спеціальності **111 – Математика** освітня програма «**Математика**»

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Мета курсу полягає у навчанні майбутніх спеціалістів основам теорії ймовірностей в об'єму, достатньому для подальшої самостійної роботи з літературою та самостійного розв'язання ймовірносних задач.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни є навчання студентів теоретичним основам і методам теорії ймовірностей та застосуванню цих методів для різноманітних задач теоретичного та прикладного характеру.

1.3. Кількість кредитів – 4

1.4. Загальна кількість годин - **120**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни		
<b>Нормативна / за вибором</b>		
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання	
Рік підготовки		
<b>4-й</b>		
Семестр		
<b>7-й</b>		
Лекції		
<b>32 год.</b>		
Практичні, семінарські заняття		
<b>32 год.</b>		
Лабораторні заняття		
Самостійна робота		
<b>56 год.</b>		
Індивідуальні завдання		

1.6. Заплановані результати навчання:

**ЗНАТИ:**

✓ Поняття дискретного ймовірносного простору, ймовірносного простору (загальний випадок), випадкової події, випадкової величини, умовної ймовірності, формулу включення-виключення, формули повної ймовірності та Байєса.

✓ Поняття середнього, дисперсії, моментів випадкової величини, коваріації та коефіцієнта кореляції випадкових величин, формули для дисперсії суми випадкових величин, формули, за допомогою яких можна виразити числові характеристики випадкових величин та векторів через їх закон розподілу.

- ✓ Поняття та властивості закону розподілу випадкової величини та вектору, поняття щільності, поняття згортки законів розподілу та щільностей.
- ✓ Схему Бернуллі та граничні теореми для неї (теореми Бернуллі, Пуассона, Муавра-Лапласа, Прохорова).
- ✓ Види збіжності послідовності випадкових величин (за ймовірністю, майже напевно, за розподілом), слабкі та посилені закони великих чисел (Чебишева, Бернштейна, Хінчина, Кантеллі).
- ✓ Лему Бореля-Кантеллі.

#### **УМІТИ:**

- ✓ Обчислювати імовірності та умовні ймовірності випадкових подій, перевіряти незалежність випадкових подій.
- ✓ Перевіряти незалежність випадкових величин. Знаходити числові характеристики випадкових величин та векторів. Знаходити функцію розподілу, закон розподілу, щільність, таблицю розподілу випадкових величин.
- ✓ Знаходити ймовірності випадкових подій та ймовірнісні характеристики випадкових величин в схемі Бернуллі.
- ✓ Доводити граничні теореми в схемі Бернуллі.
- ✓ Доводити закони великих чисел.
- ✓ Використовувати лему Бореля-Кантеллі для обчислення ймовірностей у нескінченній схемі Бернуллі.
- ✓ Будувати приклади випадкових величин з заданими властивостями.

## **2. Тематичний план навчальної дисципліни**

### **Розділ 1. Дискретний ймовірносний простір.**

- Тема 1. Поняття дискретного ймовірносного простору. Формула включення-виключення.
- Тема 2. Умовна імовірність. Формули повної ймовірності та Байеса.
- Тема 3. Випадкові величини та вектори. Їх розподіл.
- Тема 4. Незалежність випадкових подій та випадкових величин.
- Тема 5. Числові характеристики випадкових величин. Властивість повного середнього.

### **Розділ 2. Ймовірносний простір (загальний випадок). Схема Бернуллі. Випадкові величини та вектори.**

- Тема 1. Аксиоматика Колмогорова. Геометричні ймовірності. Задачі Бюффона та Бертрана. Прямий добуток ймовірносних просторів. Схема Бернуллі.
- Тема 2. Розподіл випадкових величин та векторів (загальний випадок).
- Тема 3. Числові характеристики випадкових величин (загальний випадок).
- Тема 4. Типи законів розподілу випадкових величин. Поняття щільності. Згортка функцій розподілу та щільностей.

### **Розділ 3. Граничні теореми теорії ймовірностей. Ланцюги Маркова.**

- Тема 1. Різні види збіжності послідовностей випадкових величин.
- Тема 2. Слабкі закони великих чисел. Застосування в аналізі. Поліноми Бернштейна.
- Тема 3. Лема Бореля – Кантеллі. Посилені закони великих чисел. Закон нуля або одиниці.
- Тема 4. Теорема Прохорова про апроксимацію біноміального розподілу пуассонівським.
- Тема 5. Характеристичні функції. Застосування при доведенні граничних теорем.

Тема 6. Ланцюги Маркова. Граничний розподіл. Умова регулярності.

### 3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<b>Розділ 1. Дискретний ймовірносний простір.</b>												
Тема 1. Поняття дискретного ймовірносного простору. Формула включення-виключення.	7	2	2			3						
Тема 2. Умовна ймовірність. Формули повної ймовірності та Байєса.	8	2	2			4						
Тема 3. Випадкові величини та вектори. Їх розподіл.	8	2	2			4						
Тема 4. Незалежність випадкових подій та випадкових величин.	7	2	2			3						
Тема 5. Числові характеристики випадкових величин. Властивість повного середнього.	7	2	2			3						
Разом за розділом 1	37	10	10			17						
<b>Розділ 2. Ймовірносний простір (загальний випадок).</b>												
Тема 1. Аксиоматика Колмогорова. Геометричні ймовірності. Задачі Бюффона та Бертрана. Схема Бернуллі.	8	2	2			4						
Тема 2. Розподіл випадкових величин та векторів (загальний випадок).	8	2	2			4						

Тема 3. Числові характеристики випадкових величин (загальний випадок).	7	2	2			3						
Тема 4. Типи законів розподілу випадкових величин. Поняття щільності. Згортка функцій розподілу та щільностей.	7	2	2			3						
Разом за розділом 2	30	8	8			14						
<b>Розділ 3. Граничні теореми теорії ймовірностей. Ланцюги Маркова.</b>												
Тема 1. Різні види збіжності послідовностей випадкових величин.	8	2	2			4						
Тема 2. Слабкі закони великих чисел. Застосування в аналізі. Поліноми Бернштейна.	7	2	2			3						
Тема 3. Лема Бореля – Кантеллі. Посилені закони великих чисел. Закон нуля або одиниці.	8	2	2			4						
Тема 4. Теорема Прохорова про апроксимацію біноміального розподілу пуассонівським.	8	2	2			4						
Тема 5. Характеристичні функції. Застосування при доведенні граничних теорем.	14	4	4			6						

Тема 6. Ланцюги Маркова. Граничний розподіл. Умова регулярності.	8	2	2			4					
Разом за розділом 3	53	14	14			25					
<b>Усього годин</b>	<b>120</b>	<b>32</b>	<b>32</b>			<b>56</b>					

#### 4. Теми практичних занять

Назва теми	Кількість годин
Тема 1. Поняття дискретного ймовірносного простору. Формула включення-виключення.	1
Тема 2. Умовна ймовірність. Формули повної імовірності та Байеса.	2
Тема 3. Випадкові величини та вектори. Їх розподіл.	2
Тема 4. Незалежність випадкових подій та випадкових величин.	2
Тема 5. Числові характеристики випадкових величин. Властивість повного середнього.	2
Тема 6. Аксиоматика Колмогорова. Геометричні імовірності. Задачі Бюффона та Бертрана.	2
Тема 7. Розподіл випадкових величин та векторів (загальний випадок).	2
<i>Контрольна робота.</i>	1
Тема 8. Числові характеристики випадкових величин (загальний випадок).	2
Тема 9. Типи законів розподілу випадкових величин. Поняття щільності. Згортка функцій розподілу та щільностей.	2
Тема 10. Прямий добуток ймовірносних просторів. Схема Бернуллі.	2
Тема 11. Слабкі закони великих чисел. Застосування в аналізі. Поліноми Бернштейна.	2
Тема 12. Ланцюги Маркова. Граничний розподіл. Умова регулярності.	2
Тема 13. Лема Бореля-Кантеллі.	1
Тема 14. Закон нуля або одиниці.	2
Тема 15. Теорема Прохорова про наближення біноміального розподілу пуассонівським.	2
Тема 16. Характеристичні функції. Застосування при доведенні граничних теорем.	2

<i>Контрольна робота.</i>	1
<b>Усього годин</b>	<b>32</b>

### 5. Завдання для самостійної роботи

Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
Опрацювання зазначених тем та виконання домашніх завдань:	
Тема 1. Поняття дискретного ймовірнісного простору. Формула включення-виключення. (Домашнє завдання)	3
Тема 2. Умовна ймовірність. Формули повної ймовірності та Байєса.	4
Тема 3. Випадкові величини та вектори. Їх розподіл.	4
Тема 4. Незалежність випадкових подій та випадкових величин.	3
Тема 5. Числові характеристики випадкових величин. Властивість повного середнього. (Домашнє завдання)	3
Тема 6. Аксиоматика Колмогорова. Геометричні ймовірності. Задачі Бюффона та Бертрана.	4
Тема 7. Розподіл випадкових величин та векторів (загальний випадок).	4
Тема 8. Числові характеристики випадкових величин (загальний випадок).	3
Тема 9. Типи законів розподілу випадкових величин. Поняття щільності. Згортка функцій розподілу та щільностей. (Домашнє завдання)	3
Тема 10. Прямий добуток ймовірнісних просторів. Схема Бернуллі.	4
Тема 11. Слабкі закони великих чисел. Застосування в аналізі. Поліноми Бернштейна.	3
Тема 12. Ланцюги Маркова. Граничний розподіл. Умова регулярності.	4
Тема 13. Лема Бореля-Кантеллі. (Домашнє завдання)	3
Тема 14. Закон нуля або одиниці.	4
Тема 15. Теорема Прохорова про наближення біноміального розподілу пуассонівським. (Домашнє завдання)	3
Тема 16. Характеристичні функції. Застосування при доведенні граничних теорем.	4
Разом	<b>56</b>

### 6. Індивідуальні завдання

Не передбачені навчальним планом.

### 7. Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна.

### 8. Методи контролю

Контрольні роботи (2). Екзамен.

### 9. Схема нарахування балів

Поточний контроль та самостійна робота	Сума
--	------



Розділ 1-2					Розділ 3				Контрольні роботи	Ра-зо-м	залік	
T1-2	T3-4	T5	T1-2	T3-4	T1-2	T3	T4-5	T6				
5	5	15	0	5	5	5	5	5	20	60	40	100

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

### Критерії оцінювання навчальних досягнень

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 – 69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

### Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою	
	для чотирирівневої шкали оцінювання	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно	зараховано
70-89	добре	
50-69	задовільно	

1-49	незадовільно	не зараховано
------	--------------	---------------

## 10. Рекомендована література

### Основна література

1. Лебедев Є. О., Шарапов М. М «Курс лекцій з теорії ймовірностей», К.:Норіта-плюс, 2007
2. Лебедев Є. О., Шарапов М. М. «Вступ до теорії ймовірностей», К.:Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010.
3. Братійчук М.С., Лебедев Є.О., Чечельницький О.А. Збірник задач з теорії ймовірностей та страхової математики: навч. посібник. – К., 2002.
4. Теорія ймовірностей: Збірник задач; За ред.А.В. Скорохода. К., «Вища школа», 1976
5. Лебедев Є. О., Чечельницький О. А., Шарапов М. М., Братійчук М. С. «Збірник задач з теорії ймовірностей», Київський університет, 2006

### Допоміжна література

1. William Feller. An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 1, 2. Wiley; 3rd edition (January 1, 1968)
2. Lamperti, J.. Probability: A Survey of the Mathematical Theory. Published by W. A. Benjamin, 1966

## 11. Посилання на Інформаційні ресурси в інтернеті, відео-лекції,інше методичне забезпечення

<http://mathworld.wolfram.com/topics/probability>