

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра **фундаментальної математики**

“ЗАТВЕРДЖУЮ”
Декан факультету
математики і інформатики
Григорій ЖОЛТКЕВИЧ
“ 18 ” 08 2024 р.



Робоча програма навчальної дисципліни

Лінійна алгебра

рівень вищої освіти **перший(бакалаврський)**

галузь знань **11 - Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни **обов'язкова**

факультет **математики і інформатики**

2024 / 2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

27 серпня 2024 року, протокол № 8

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

Каролінський Євген Олександрович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фундаментальної математики.

Робоча програма схвалена на засіданні кафедри фундаментальної математики протокол від 26 серпня 2024 року № 1.

В. о завідувача кафедри



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)
програми



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики

Протокол від 27 серпня 2024 року № 1.

Голова науково-методичної комісії



Євген МЕНЯЙЛОВ

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “Лінійна алгебра” складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалавр спеціальності 111 – Математика освітня програма «Математика»

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни є навчання майбутніх спеціалістів основам лінійної алгебри, а також многочленам декількох змінних.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни є навчання студентів теоретичним основам і методам лінійної алгебри та застосуванню цих методів для розв’язання різноманітних задач теоретичного та практичного характеру.

1.2.1. Формування наступних інтегральної та загальних компетентностей

ІК01. Здатність розв’язувати складні задачі та практичні проблеми у математиці або у процесі навчання, що передбачає застосування теорій та методів математики, статистики й комп’ютерних технологій і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.

ЗК01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК03. Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.

ЗК07. Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.

1.2.2. Формування наступних фахових компетентностей

ФК01. Здатність формулювати проблеми математично та в символічній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв’язання.

ФК02. Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв’язання тієї самої задачі.

ФК04. Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганих.

1.3. Кількість кредитів – 12

1.4. Загальна кількість годин – 360

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Обов’язкова	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
1-й, 2-й	
Семестр	
2-й, 3-й	
Лекції	
96 год.	
Практичні, семінарські заняття	
96 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
168 год.	
у тому числі індивідуальні завдання	

1.6. Заплановані результати навчання

У результаті вивчення даного курсу студент повинен **знати**:

- ✓ Теоретичні основи і застосовувати алгебраїчні методи для вивчення математичних структур.
- ✓ Теорію систем лінійних рівнянь та основні методи їх розв'язання.
- ✓ Теорію визначників та основні методи обчислення визначників.
- ✓ Аксиоми лінійного простору. Приклади лінійних просторів.
- ✓ Поняття лінійної незалежності та повноти системи векторів.
- ✓ Поняття базису та розмірності лінійного простору.
- ✓ Поняття підпростору. Способи завдання підпростору. Властивості суми та перетину підпросторів, формулу Грасмана для розмірності суми.
- ✓ Поняття прямої суми та додаткового підпростору.
- ✓ Поняття рангу матриці, теорему про ранг.
- ✓ Поняття факторпростору.
- ✓ Визначення, основні властивості та приклади лінійних відображень, в тому числі властивості ядра та образу лінійного відображення, завдання лінійного відображення матрицею, операції над лінійними відображеннями та матрицями, залежність матриці лінійного відображення від вибору базису.
- ✓ Поняття лінійного функціоналу та двоїстого простору.
- ✓ Поняття інваріантного підпростору лінійного оператора. Властивості власних векторів та власних значень лінійного оператора. Умови напівпростоти лінійного оператора.
- ✓ Основні властивості многочленів декількох змінних. Основну теорему про симетричні многочлени.
- ✓ Теорію жорданової форми лінійного оператора.
- ✓ Означення та властивості білінійних та квадратичних функціоналів, в тому числі зв'язок між симетричними білінійними та квадратичними функціоналами, алгоритм Лагранжа діагоналізації квадратичних функціоналів, канонічний вигляд квадратичних функціоналів над полями дійсних та комплексних чисел, додатно визначені квадратичні форми.
- ✓ Властивості та приклади просторів зі скалярним добутком.
- ✓ Спектральну теорему для нормальних операторів в ермітовому просторі. Властивості самоспряжених та унітарних операторів в ермітовому просторі. Канонічний вигляд нормального оператора в евклідовому просторі. Класифікацію ортогональних операторів.

уміти:

- ✓ Розв'язувати системи лінійних рівнянь.
- ✓ Обчислювати визначники.
- ✓ Обчислювати координати вектора у даному базисі.
- ✓ Знаходити базис та розмірність підпростору лінійного простору.
- ✓ Знаходити базис та розмірність суми та перетину лінійних просторів.
- ✓ Обчислювати ранг матриці.
- ✓ Перевіряти, чи є сума підпросторів прямою сумою, та знаходити проєкції вектора на прямі складники.
- ✓ Знаходити матрицю лінійного оператора в даному базисі.
- ✓ Обчислювати ядро та образ лінійного оператора.
- ✓ Знаходити обернену матрицю.
- ✓ Знаходити власні вектори та власні значення лінійного оператора, приводити напівпростий оператор до діагонального вигляду.

- ✓ Виразити симетричний многочлен через основні симетричні многочлени.
- ✓ Знаходити жорданову форму лінійного оператора та відповідний базис.
- ✓ Приводити квадратичний функціонал до діагонального вигляду за допомогою алгоритму Лагранжа.
- ✓ Знаходити канонічний вид квадратичної форми над полями комплексних та дійсних чисел.
- ✓ Перевіряти додатну визначеність квадратичної форми.
- ✓ Знаходити ортогональний та ортонормований базиси підпростору евклідова або ермітова простору.
- ✓ Знаходити ортогональне доповнення до підпростору евклідового або ермітового простору, обчислювати відповідні ортогональні проєкції.
- ✓ Знаходити базис діагоналізації нормального оператора в ермітовому просторі.
- ✓ Знаходити канонічний вид матриці нормального оператора в евклідовому просторі та відповідний базис.
- ✓ Приводити квадратичну форму в евклідовому просторі до головних осей.

Програмні результати навчання:

РН.04 Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми.

РН.15 Знати теоретичні основи і застосовувати алгебраїчні методи для вивчення математичних структур.

2. Тематичний план навчальної дисципліни

2-й семестр

Розділ 1. Системи лінійних рівнянь, визначники та матриці

Тема 1. Системи лінійних рівнянь та визначники

1. Системи лінійних рівнянь. Матричний запис систем лінійних рівнянь. Алгоритм Гауса.
2. Підстановки.
3. Визначники. Алгоритм Гауса для обчислення визначника. Розкладання визначника за рядком (стовпцем).
4. Визначник Вандермонда.
5. Визначники Якобі. Лінійні однорідні рекурентні рівняння.
6. Теорема Лапласа.
7. Теорема єдиності визначника.

Тема 2. Дії з матрицями

1. Операції над матрицями.
2. Визначник добутку матриць.
3. Обернена матриця. Умови існування оберненої матриці. Обчислення оберненої матриці.
4. Формули Крамера.

Розділ 2. Лінійні простори та лінійні відображення

Тема 3. Лінійні простори

1. Визначення та найпростіші властивості лінійних просторів. Приклади лінійних просторів.
2. Лінійна незалежність та повнота системи векторів. Скінченновимірність. Базис та розмірність лінійного простору. Класифікація скінченновимірних лінійних просторів.
3. Лінійна оболонка системи векторів. Розмірність лінійної оболонки.

4. Сума та перетин підпросторів. Формула Грасмана.
5. Ранг матриці. Теорема про ранг. Застосування до теорії систем лінійних рівнянь.
6. Пряма сума підпросторів. Пряме доповнення.

Тема 4. Лінійні відображення

1. Означення лінійного відображення. Елементарні властивості та приклади.
2. Факторпростір.
3. Теорема Ньотера для лінійних відображень. Розмірність ядра та образу лінійного відображення.
4. Лінійні функціонали. Спряжений простір. Теорія двоїстості.
5. Зв'язок між лінійними відображеннями та матрицями. Визначник добутку матриць.
6. Обернена матриця.
7. Матриця переходу. Залежність матриці лінійного відображення від вибору базисів.
8. Інваріантні підпростори. Власні вектори та власні значення лінійного оператора. Напівпрості лінійні оператори.

3-й семестр

Розділ 1. Многочлени декількох змінних

1. Кільце многочленів від декількох змінних. Відсутність дільників нуля. Лема Гауса. Розкладання на незвідні множники.
2. Лексикографічний запис многочлена від декількох змінних. Симетричні многочлени. Основна теорема про симетричні многочлени. Формули Ньютона.

Розділ 2. Жорданова форма лінійного оператора

1. Кореневі підпростори лінійного оператора. Жорданова форма лінійного оператора.
2. Функції від лінійного оператора.
3. Централізатор лінійного оператора. Теорема про подвійний централізатор.

Розділ 3. Білінійні та квадратичні функціонали. Лінійні простори із скалярним добутком

1. Білінійні та квадратичні функціонали, зв'язок між ними.
2. Алгоритм Лагранжа діагоналізації квадратичної форми. Канонічний вигляд квадратичної форми над полями комплексних та дійсних чисел.
3. Додатно визначені квадратичні форми. Критерій Сильвестра.
4. Півторалінійні функціонали.
5. Простори із скалярним добутком, приклади та найпростіші властивості.
6. Алгоритм Грама-Шмідта побудови ортогонального базису.
7. Ортогональне доповнення та його властивості.

Розділ 4. Спектральна теорія лінійних операторів в просторах із скалярним добутком

1. Спектральна теорема для нормальних операторів в ермітовому просторі. Приклади: унітарні та самоспряжені оператори, їх власні значення.
2. Комплексифікація.
3. Канонічний вигляд матриці нормального оператора в евклідовому просторі. Випадок самоспряженого та ортогонального операторів.
4. Полярне розкладання лінійного оператора.
5. Квадратичні форми в евклідовому просторі. Теорема про головні осі.

3. Структура навчальної дисципліни

2-й семестр

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Розділ 1. Системи лінійних рівнянь, визначники та матриці												
Тема 1. Системи лінійних рівнянь та визначники	60	16	16			28						
Тема 2. Дії з матрицями	30	8	8			14						
Усього за розділом 1	90	24	24			42						
Розділ 2. Лінійні простори та лінійні відображення												
Тема 1. Лінійні простори	45	12	12			21						
Тема 2. Лінійні відображення	43	12	10			21						
Усього за розділом 2	88	24	22			42						
Контрольна робота	2		2									
Усього годин	180	48	48			84						

3-й семестр

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усьог о	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Розділ 1. Многочлени декількох змінних	30	8	8			14						
Розділ 2. Жорданова форма лінійного оператора	45	12	12			21						
Розділ 3. Білінійні та квадратичні функціонали. Лінійні простори із скалярним добутком	60	16	16			28						
Розділ 4. Спектральна теорія лінійних операторів в просторах із скалярним добутком	45	12	12			21						
Усього годин	180	48	48			84						

4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

2-й семестр

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Системи лінійних рівнянь та визначники Системи лінійних рівнянь. Алгоритм Гауса. Підстановки. Визначники. Алгоритм Гауса для обчислення визначника. Розкладання визначника за рядком (стовпцем). Визначник Вандермонда. Визначники Якобі. Лінійні однорідні рекурентні рівняння. Теорема Лапласа.	16
2	Дії з матрицями Операції над матрицями. Обернена матриця. Формули Крамера.	8
3	Лінійні простори Лінійна незалежність та повнота системи векторів. Базис та розмірність лінійного простору. Лінійна оболонка системи векторів. Розмірність лінійної оболонки. Сума та перетин підпросторів. Формула Грасмана. Ранг матриці. Застосування до теорії систем лінійних рівнянь. Пряма сума підпросторів. Пряме доповнення.	12
4	Лінійні відображення Лінійні відображення. Елементарні властивості та приклади. Факторпростір. Розмірність ядра та образу лінійного відображення. Лінійні функціонали. Спряжений простір. Теорія двоїстості. Зв'язок між лінійними відображеннями та матрицями. Матриця переходу. Залежність матриці лінійного відображення від вибору базисів. Інваріантні підпростори. Власні вектори та власні значення лінійного оператора. Напівпрості лінійні оператори.	10
5	Контрольна робота	2
	Разом	48

3-й семестр

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Многочлени декількох змінних Симетричні многочлени.	8
2	Жорданова форма лінійного оператора Кореневі підпростори лінійного оператора. Жорданова форма лінійного оператора. Функції від лінійного оператора. Централізатор лінійного оператора. Розв'язання операторних та матричних рівнянь.	12
3	Білінійні та квадратичні функціонали. Лінійні простори із скалярним добутком Білінійні та квадратичні функціонали, зв'язок між ними. Алгоритм Лагранжа діагоналізації квадратичної форми. Канонічний вигляд квадратичної форми над полями комплексних та дійсних чисел. Додатно визначені квадратичні форми. Критерій Сильвестра. Півторалінійні функціонали. Простори із скалярним добутком, приклади та найпростіші властивості. Алгоритм Грама-Шмідта побудови ортогонального базису. Ортогональне доповнення та його властивості.	14
4	Спектральна теорія лінійних операторів в просторах із скалярним добутком Спектральна теорема для нормальних операторів в ермітовому просторі. Унітарні та самоспряжені оператори. Канонічний вигляд матриці нормального оператора в евклідовому просторі. Випадок самоспряженого та ортогонального операторів. Полярне розкладання лінійного оператора. Квадратичні форми в евклідовому просторі. Теорема про головні осі.	12
5	Контрольна робота	2
	Разом	48

5. Завдання для самостійної роботи

2-й семестр

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
	Розв'язання задач з домашнього завдання за темами:	
1	Системи лінійних рівнянь та визначники	28
2	Дії з матрицями	14
3	Лінійні простори	21
4	Лінійні відображення	21
	Разом	84

3-й семестр

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
	Розв'язання задач з домашнього завдання за темами:	
1	Многочлени декількох змінних	14
2	Жорданова форма лінійного оператора	21
3	Білінійні та квадратичні функціонали. Лінійні простори із скалярним добутком	28
4	Спектральна теорія лінійних операторів в просторах із скалярним добутком	21
	Разом	84

6. Індивідуальні завдання

Не передбачені навчальним планом.

7. Методи навчання

Форми навчання: лекції (розкриваються принципові та найбільш важливі аспекти визначених тем) із застосуванням мультимедійних засобів навчання; інтерактивні практичні заняття з елементами теоретичних питань.

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину та в умовах воєнного стану, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна.

8. Методи контролю

- поточний семестровий (контрольна робота);
- підсумковий семестровий (екзамен).

9. Схема нарахування балів

2-й семестр

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання				Контрольні роботи, передбачені навчальним планом	Разом	Екзамен	Сума
Розділ 1		Розділ 2		20	60	40	100
T1	T2	T1	T2				
10	10	10	10				

3-й семестр

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання				Контрольні роботи, передбачені навчальним планом	Разом	Екзамен	Сума
Розділ 1	Розділ 2	Розділ 3	Розділ 4	20	60	40	100
10	10	10	10				

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

Критерії оцінювання навчальних досягнень

Поточний контроль: бали нараховуються за виконання домашніх завдань. За активність під час занять можуть нараховуватись бонусні бали.

За контрольні роботи бали нараховуються таким чином:

максимальний бал у разі правильно обґрунтованої відповіді;

за незначні помилки оцінка зменшується від 10 до 30 відсотків;

за значні логічні помилки оцінка зменшується до 50 відсотків, якщо хід розв'язання в цілому правильний;

у разі частково правильних міркувань за відсутності обґрунтованої відповіді виставляється до 30 відсотків від максимальної кількості балів;

відповідь не відповідає жодному з критеріїв, які сформульовані вище, – виставляється 0 балів.

Екзаменаційний білет складається з двох теоретичних питань та однієї задачі.

Максимальну кількість балів за теоретичні питання можна отримати, якщо сформулювати та довести відповідні твердження, навести необхідні приклади. Якщо студент правильно описав ідею доведення, але не зміг до кінця привести відповідні викладки, то оцінка зменшується від 10 до 30 відсотків. У випадку, коли студент зробив помилки при формулюванні тверджень або не зміг пояснити ідею доведення чи навести приклади, то

оцінка зменшується від 40 до 100 відсотків. Задача оцінюється за тими ж принципами, що контрольні роботи.

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою
	для чотирирівневої шкали оцінювання
90–100	відмінно
70–89	добре
50–69	задовільно
1–49	незадовільно

10. Рекомендована література

Основна література

1. Лінійна алгебра: навчальний посібник / А. М. Вишнякова, О. О. Заварзіна. – Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2024.
2. Андрійчук В. І., Забавський Б. В. Алгебра і теорія чисел. – Львів, 2005.
3. Андрійчук В. І., Забавський Б. В. Лінійна алгебра. – Львів, 2008.

Допоміжна література

1. Безущак О. О., Ганюшкін О. Г., Кочубінська Є. А. Навчальний посібник з лінійної алгебри. – Київ, 2019.
2. Безущак О. О., Ганюшкін О. Г., Кочубінська Є. А. Завдання до практичних занять з лінійної алгебри. – Київ, 2016.
3. Мазорчук В. С. Жорданова нормальна форма. – Київ, 1998.
4. Lang S. Algebra. – Springer, 2002.