

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра **фундаментальної математики**

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Декан факультету
математики і інформатики

Григорій ЖОЛТКЕВИЧ



2023 р.

Робоча програма навчальної дисципліни

Алгебри Лі

рівень вищої освіти **бакалавр**

галузь знань **11 – Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни **за вибором**

факультет **математики і інформатики**

2023 / 2024 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

29 серпня 2023 року, протокол № 8

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Каролінський Євген Олександрович, кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри фундаментальної математики, доцент.**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики
протокол від 28 серпня 2023 року № 1.

В. о завідувача кафедри



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика».

Гарант освітньої (професійної)

програми



Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і
інформатики.

Протокол від 29 серпня 2023 року № 1.

Голова науково-методичної комісії



Ольга АНОЩЕНКО

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «Алгебри Лі» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалавр

спеціальності **111 – Математика»**
освітня програма «Математика»

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни є навчання майбутніх спеціалістів основам теорії алгебр Лі, в першу чергу комплексних напівпростих.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни є навчання студентів теоретичним основам і методам теорії алгебр Лі та застосуванню цих методів для розв'язання різноманітних задач.

1.3. Кількість кредитів – **4**

1.4. Загальна кількість годин – **120**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Нормативна / за вибором	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
4-й	
Семестр	
8-й	
Лекції	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
56 год.	
у тому числі індивідуальні завдання	

1.6. Заплановані результати навчання

У результаті вивчення даного курсу студент повинен

Знати:

- ✓ Означення алгебр Лі, основні приклади та конструкції алгебр Лі.
- ✓ Що таке лінійна алгебраїчна група, приклади лінійних алгебраїчних груп, конструкцію алгебри Лі лінійної алгебраїчної групи. Функтор Лі.
- ✓ Основні загальноалгебраїчні поняття у контексті теорії алгебр Лі: гомоморфізм, підалгебра, ідеал, факторалгебра, пряма сума. Прості алгебри Лі.
- ✓ Диференціювання та внутрішні диференціювання, їх зв'язок з автоморфізмами.
- ✓ Основні поняття та визначення теорії представлень алгебр Лі: мова **g**-модулів, морфізми, підмодулі, фактормодулі, незвідність (простота), повна звідність (напівпростота). Лема Шура. Основні приклади представлень алгебр Лі.
- ✓ Означення тензорного добутку лінійних просторів. Основні операції над **g**-модулями: двоїстий модуль, тензорний добуток модулів. Структура **g**-модуля у просторі лінійних відображень.

- ✓ Розв'язні та нільпотентні алгебри Лі. Основні приклади. Теореми Лі та Енгеля, їх наслідки.
- ✓ Інваріантні білінійні форми. Форма Кілінга. Критерій Картана розв'язності.
- ✓ Означення напівпростих алгебр Лі. Напівпростота та невиродженість форми Кілінга. Розкладання напівпрості алгебри Лі в пряму суму простих ідеалів. Приклади напівпростих алгебр Лі.
- ✓ Теорему Вейля про повну звідність скінченновимірних представлень напівпростих алгебр Лі.
- ✓ Диференціювання напівпростих алгебр Лі.
- ✓ Розкладання Жордана для напівпростих алгебр Лі.
- ✓ Будову скінченновимірних представлень алгебри Лі $sl(2)$.
- ✓ Основи структурної теорії напівпростих алгебр Лі: картанівські підалгебри, корені, коренева розкладання, його властивості, приклади.
- ✓ Системи коренів. Класифікація систем коренів.
- ✓ Відбудову напівпрості алгебри Лі за системою коренів.
- ✓ Скінченновимірні представлення напівпростих алгебр Лі. Теорема Картана про найстаршу вагу.

Уміти:

- ✓ Перевіряти належність даної алгебри Лі до класу простих, напівпростих, розв'язних, нільпотентних, абелевих.
- ✓ Обчислювати значення функтора Лі на лінійних алгебраїчних групах та їх морфізмах.
- ✓ Обчислювати розкладання Жордана у даній напівпростій алгебрі Лі.
- ✓ Перевіряти незвідність представлень алгебр Лі, розкласти повністю звідні представлення на незвідні складники.
- ✓ Користуватись канонічними ізоморфізмами з теорії тензорних добутків.
- ✓ Обчислювати систему коренів даної напівпрості алгебри Лі. Вести обчислення в системах коренів.
- ✓ Обчислювати ваги представлень напівпростих алгебр Лі.

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Загальна теорія алгебр Лі.

1. Означення алгебри Лі. Категорія алгебр Лі. Основні приклади.
2. Алгебри Лі та лінійні алгебраїчні групи. Функтор Лі.
3. Представлення алгебр Лі. Представлення та g -модулі. Незвідність та повна звідність.
4. Тензорний добуток лінійних просторів. Операції над g -модулями.

Розділ 2. Розв'язні, нільпотентні, напівпрості алгебри Лі.

1. Розв'язні та нільпотентні алгебри Лі. Теореми Лі та Енгеля.
2. Інваріантні білінійні форми. Форма Кілінга. Критерій Картана розв'язності.
3. Напівпрості алгебри Лі: визначення, розкладання в пряму суму простих ідеалів, напівпростота та форма Кілінга, приклади.
4. Повна звідність скінченновимірних представлень напівпростих алгебр Лі. Диференціювання напівпростих алгебр Лі.
5. Розкладання Жордана в комплексній напівпростій алгебрі Лі.

Розділ 3. Структурна теорія напівпростих алгебр Лі.

1. Скінченновимірні комплексні $sl(2)$ -модулі.
2. Картанівські підалгебри. Коренева розкладання та його властивості.

3. Системи коренів.

Розділ 4. Класифікація напівпростих алгебр Лі та їх представлень.

1. Побудова комплексної напівпрості алгебри Лі за системою коренів.
2. Класифікація напівпростих комплексних алгебр Лі.
3. Класифікація скінченновимірних незвідних представлень комплексних напівпростих алгебр Лі.

3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Розділ 1. Загальна теорія алгебр Лі.	30	8	8			14						
Розділ 2. Розв'язні, нільпотентні, напівпрості алгебри Лі.	30	8	8			14						
Розділ 3. Структурна теорія напівпростих алгебр Лі.	30	8	8			14						
Розділ 4. Класифікація напівпростих алгебр Лі та їх представлень.	28	8	6			14						
Контрольна робота	2		2									
Усього годин	120	32	32			56						

4. Темі семінарських (практичних, лабораторних) занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Загальна теорія алгебр Лі.	8
2	Розв'язні, нільпотентні, напівпрості алгебри Лі.	8
3	Структурна теорія напівпростих алгебр Лі.	8
4	Класифікація напівпростих алгебр Лі та їх представлень.	6
5	Контрольна робота.	2
	Разом	32

5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
	Опрацювання теоретичного матеріалу з використанням конспекту та розв'язання задач з домашнього завдання:	
1	Загальна теорія алгебр Лі. (Домашнє завдання)	14
2	Розв'язні, нільпотентні, напівпрості алгебри Лі. (Домашнє завдання)	14
3	Структурна теорія напівпростих алгебр Лі. (Домашнє завдання)	14

4	Класифікація напівпростих алгебр Лі та їх представлень.	14
	Разом	56

6. Індивідуальні завдання

Не передбачені навчальним

7. Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

8. Методи контролю

- поточний семестровий (контрольна робота);
- підсумковий семестровий екзамен.

9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання				Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Разом	Екзамен	Сума
Розділ 1	Розділ 2	Розділ 3	Розділ 4				
10	10	10	10	20	60	40	100

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

Критерії оцінювання навчальних досягнень

Поточний контроль: бали нараховуються за виконання домашніх завдань. За активність під час занять можуть нараховуватись бонусні бали.

За контрольну роботу бали нараховуються таким чином:

максимальний бал у разі правильно обґрунтованої відповіді;

за незначні помилки оцінка зменшується від 10 до 30 відсотків;

за значні логічні помилки оцінка зменшується до 50 відсотків, якщо хід розв'язання в цілому правильний;

у разі частково правильних міркувань за відсутності обґрунтованої відповіді виставляється до 30 відсотків від максимальної кількості балів;

відповідь не відповідає жодному з критеріїв, які сформульовані вище, – виставляється 0 балів.

Екзаменаційний білет складається з теоретичного питання та задачі. Максимальну кількість балів за теоретичне питання можна отримати, якщо сформулювати та довести відповідні твердження, навести необхідні приклади. Якщо студент правильно описав ідею доведення, але не зміг до кінця привести відповідні викладки, то оцінка зменшується від 10 до 30 відсотків. У випадку, коли студент зробив помилки при формулюванні тверджень або не зміг пояснити ідею доведення чи навести приклади, то оцінка зменшується від 40 до 100 відсотків. Задача оцінюється за тими ж принципами, що контрольні роботи.

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою	
	для чотирирівневої шкали оцінювання	для дворівневої шкали оцінювання
90–100	відмінно	зараховано
70–89	добре	
50–69	задовільно	
1–49	незадовільно	не зараховано

10. Рекомендована література

Основна література

1. J. E. Humphreys. Introduction to Lie algebras and representation theory. Springer, 1973.

Допоміжна література

1. J.-P. Serre. Lie Algebras and Lie Groups. Springer, 1992.
2. A. L. Onishchik, E. B. Vinberg. Lie Groups and Algebraic Groups. Springer, 1990.
3. П. І. Голод, А. У. Клімик. Математичні основи теорії симетрій. Київ: Наукова думка, 1992.

11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

<http://mathworld.wolfram.com/topics/LieAlgebra.html>