

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Кафедра **фундаментальної математики**

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Проректор з науково-
педагогічної роботи

Олександр ГОЛОВКО

“ ____ ” _____ 2022 р.

Робоча програма навчальної дисципліни

Теорія міри та інтеграла

рівень вищої освіти **бакалавр**

галузь знань **11 - Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика**

освітня програма **«Математика»**

вид дисципліни **обов'язкова**

факультет **математики і інформатики**

2022 / 2023 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

29 серпня 2022 року, протокол № 7

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Професор кафедри фундаментальної математики, доктор фізико-математичних наук,
професор Кадець Володимир Михайлович**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики
Протокол № 1 від 26 серпня 2022 року.

Завідувач кафедри



Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)
програми



Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики
протокол № 1 від 29 серпня 2022 року.

Голова науково-методичної комісії

Ольга АНОЩЕНКО

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “**Теорія міри та інтеграла**” складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки **бакалавр** спеціальності **111 – Математика** освітня програма «**Математика**»

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни “теорія міри та інтеграла” є надання майбутнім фахівцям знань у галузі сучасної теорії міри та інтеграла Лебега.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни “Теорія міри та інтеграла” є навчання студентів теоретичним основам і методам теорії міри та інтеграла та застосуванню цих методів у інших математичних дисциплінах.

1.3. Кількість кредитів – **4**

1.4. Загальна кількість годин – **120**

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Нормативна / за вибором	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
3-й	
Семестр	
5-й	
Лекції	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
56 год.	
у тому числі індивідуальні завдання	
розрахунково-графічні роботи (2)	

1.6. Заплановані результати навчання

У результаті вивчення даного курсу студент повинен

знати :

- термінологію теорії метричних просторів, теорему Бера, борелівську класифікацію множин, теорему Арцела;
- термінологію теорії міри, основні факти про вимірні множини, конструкцію міри Лебега;
- означення та властивості вимірних функцій, зв’язок між різними видами збіжності послідовностей вимірних функцій;
- конструкцію інтеграла Лебега, граничні теореми Фату, Лебега та Леві;
- конструкцію кратного інтеграла Лебега та теорему Фубіні;
- теорему Гана про розкладення заряду, теорему Радона-Нікодима;
- означення нормованого простору, критерій неперервності лінійного оператора;

– теореми про зв'язок між похідною та інтегралом Лебега.

уміти :

- застосовувати отримані знання, розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді, зокрема перевіряти замкненість, відкритість, вимірність множин, належність до відповідних борелівських класів, перевіряти вимірність та інтегрованість за Лебегом функцій, користуватися граничними теоремами теорії інтеграла Лебега;
- відшуковувати потрібну науково-технічну інформацію у науковій літературі та інших джерелах інформації;
- перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів.

1.7 Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні мати наступні ПРН:

Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми.

- Знати теоретичні основи і застосовувати методи математичного аналізу для дослідження функцій однієї та багатьох дійсних змінних.

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Метричні простори, простори з мірою.

Тема 1. Метричні простори.

1. Означення, приклади. Відкриті та замкнені множини, збіжні послідовності, неперервні функції.
2. Повнота. Теорема про вкладені множини. Теорема Бера.
3. Компакти у метричних просторах. Теорема Арцела.

Тема 2. Міра Лебега.

1. Алгебри та σ -алгебри множин. Борелівські множини. Борелівські класи множин.
2. Скінченно-адитивні та зліченно-адитивні міри. Атоми, атомарні та безатомні міри. Повні та неповні простори з мірою.
3. Теорія продовження мір. Конструкція зовнішньої міри та міри Лебега на відрізку.
4. Зв'язок між вимірністю за Лебегом та за Борелем.
5. Зміст терміну “майже усюди”. Теорема про існування похідної у монотонній функції.
6. Функція розподілу та загальний вигляд борелівської міри на відрізку.
7. σ -скінченні міри. Міра Лебега на \mathbb{R} .

Розділ 2. Інтеграл Лебега та його застосування.

Тема 3. Вимірні та інтегровані функції.

1. Різні означення вимірних функцій. Теорема про апроксимацію вимірної функції простими.
2. Збіжність за мірою та збіжність майже всюди. Теорема Єгорова. Теорема Лузіна.
3. Інтеграл Лебега та його базові властивості.
4. Теореми про границі послідовностей інтегрованих функцій: лема Фату, теорема Лебега про мажоровану збіжність, теореми Леві про послідовності та ряди.
5. Добуток просторів з мірою та теорема Фубіні. Обернена теорема Фубіні.
6. Інтеграл Лебега на просторах з σ -скінченною мірою.

Тема 4. Заряди.

1. Означення заряду, теорема про обмеженість, додатна та від'ємна частини заряду.
2. Теорема Гана про розкладення заряду.
3. Абсолютно неперервні заряди, сингулярні заряди та теорема Радона-Нікодима.

Тема 5. Зв'язок між похідною та інтегралом.

1. Нормовані простори. Критерій неперервності лінійного оператора. Щільність множини неперервних функцій у просторі інтегрованих за Лебегом функцій на відрізку.
2. Теорема про похідну інтеграла як функції верхньої границі інтегрування.
3. Абсолютно неперервні функції та формула Ньютона - Лейбниця.

3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Розділ 1. Метричні простори, простори з мірою.												
Тема 1. Метричні простори	16	4	4			8						
Тема 2. Міра Лебега	28	8	8			12						
Разом за розділом 1	44	12	12			20						
Розділ 2. Інтеграл Лебега та його застосування.												
Тема 3. Вимірні та інтегровані функції.	40	11	11			18						
Тема 4. Заряди	16	4	4			8						
Тема 5. Зв'язок між похідною та інтегралом.	20	5	5			10						
Разом за розділом 2	76	20	20			36						
Усього годин	120	32	32			56						

4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
	Опрацювання додаткового матеріалу за відповідними темами:	
1	Метричні простори.	4
2	Міра Лебега.	8
3	Вимірні та інтегровані функції.	11
4	Заряди.	4
5	Зв'язок між похідною та інтегралом.	5
	Разом	32

5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин

1	Метричні простори.	8
2	Міра Лебега.	12
3	Вимірні та інтегровані функції.	8
4	Заряди.	8
5	Зв'язок між похідною та інтегралом.	10
6	Виконання розрахунково-графічної роботи.	10
	Разом	56

6. Індивідуальні завдання

Розрахунково-графічна робота (1).

7. Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна.

8. Методи контролю

- 1) поточний семестровий (виконання домашніх завдань); перевірка розрахунково-графічної роботи ;
- 2) підсумковий екзамен.

9. Схема нарахування балів

Поточний контроль та самостійна робота		Розрахунково-графічна робота	Разом	Екзамен	Сума
Розділ 1	Розділ 2				
20	20	20	60	40	100

Критерії оцінювання навчальних досягнень

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.

50 –69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки.

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою	
	для чотиривимірної шкали оцінювання	для двовимірної шкали оцінювання
90 – 100	відмінно	зараховано
70-89	добре	
50-69	задовільно	
1-49	незадовільно	не зараховано

10. Рекомендована література

Основна література

1. Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Підручник. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія “Університетська бібліотека”)

Допоміжна література

1. Березанський Ю. М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г., Функціональний анализ, Київ: «Вища школа», 1990.

11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

1. http://page.mi.fu-berlin.de/werner99/kadetsbook/Kadets_Functional_Analysis.pdf
2. <https://www.springer.com/us/book/978331992003>